

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXVIII

1931 (IX)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIV



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1931 (IX)

Digitized by the Internet Archive
in 2023

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1931 (Anno IX).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Generazione geometrica della funzione Ix (intero di x) e delle altre funzioni numeriche $Fr x$, $Cm x$, Rx ad essa associate.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. G. A. CROCCO.

1. Si abbia un poligono regolare, il cui lato a si assume come unità di lunghezza, e si consideri il rotolamento di esso su di una retta fissa, contando positivamente gli angoli di cui ruota il poligono durante il rotolamento in un senso e negativamente per il rotolamento nel senso contrario, e contando le lunghezze sulla retta fissa a partire da un punto origine che, per comodità, si sceglie coincidente con quello a destra dei due vertici del poligono a contatto con la retta nel momento in cui si immagina che cominci il moto.

Considerando la lunghezza L del segmento della retta fissa compreso fra il punto origine ed il vertice intorno al quale il poligono sta ruotando, come funzione $L(\alpha)$ dell'angolo α di cui ha ruotato il poligono, si portino, in un sistema di assi ortogonali, i valori degli angoli α come ascisse e come ordinate le lunghezze L dei segmenti compresi fra il punto origine e il corrispondente centro istantaneo di rotazione, prendendo come unità di lunghezza nella misura delle ascisse $\frac{na}{2\pi}$ se n è il numero dei lati del poligono considerato.

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

Con queste convenzioni si ha come rappresentazione grafica della funzione $L(\alpha)$ il diagramma A della fig. 1 e si scorge subito che la funzione così costruita non è altro che la funzione Ix , *intiero di x* di Legendre.

2. Se poi invece di considerare la distanza fra il punto origine e il centro istantaneo di rotazione come funzione dell'angolo di cui il poligono ha ruotato, si considera quest'angolo come funzione $\alpha(L)$ di quella distanza, si ottiene come rappresentazione grafica il diagramma B della stessa figura e si scorge che la funzione così ottenuta, inversa dell'altra, è la funzione $I^{-1}x$ *numero la cui parte intera è x*, la quale esiste solo per i valori intieri di x , ad ogni valore intiero n della variabile facendo corrispondere l'intiero segmento unitario n , $\vdash n + 1$ cioè il *numero segmentale* $n + I^{-1}0$.

Si osservi che dalla funzione Ix , che non è periodica, derivano le due funzioni periodiche già incontrate

$$(1) \quad Fr x = x - Ix \quad , \quad Cm x = I(x + 1) - x$$

ed, analogamente, dalla funzione inversa $I^{-1}x$ si ottengono le due funzioni periodiche, finora non denominate,

$$(2) \quad I^{-1}x - x \quad , \quad (x + 1) - I^{-1}x$$

che esistono soltanto per i valori intieri di x e prendono per essi rispettivamente i valori $I^{-1}0, 1 - I^{-1}0$, corrispondono cioè ai segmenti unitari $(0, \vdash 1)$, $(0, \dashv 1)$. Per i valori intieri di x esse coincidono con le funzioni, le quali però prendono il valore zero per x non intiero,

$$(3) \quad I^{-1}0 \text{ } I Cm x \quad , \quad (1 - I^{-1}0) \text{ } I Cm x.$$

Il diagramma C della fig. 1 è la rappresentazione grafica della (2) o della (3) secondo che i segmenti verticali si immaginano chiusi inferiormente o superiormente.

3. Delle funzioni $Fr x$, $Cm x$ ho già, nella Nota precedente, indicato un metodo di generazione geometrica come funzioni circolari, ma esse possono anche ottenersi direttamente come funzioni poligonali col metodo del rotolamento considerando un punto che percorre il perimetro del poligono con velocità proporzionale a quella istantanea di rotazione in modo da percorrere un intiero lato nel tempo che questo impiega a venire a contatto con la retta fissa, a descrivere cioè l'angolo $\frac{2\pi}{n}$.

$Fr x$ si ha nel rotolamento a destra ed esprime la distanza del punto mobile dal vertice intorno al quale la rotazione si sta compiendo e dal quale esso si allontana,

$Cm\ x$ si ha nel rotolamento a sinistra ed esprime la distanza che il punto mobile deve percorrere per giungere al vertice che sta per venire in contatto con la retta e verso il quale esso avanza.

4. Considerando poi, in un poligono con un numero pari di lati, il vertice diametralmente opposto a quello intorno al quale si compie la rotazione e la proiezione di esso sulla retta di appoggio, si vede che ad ogni rotazione, attorno ad un vertice, la detta proiezione percorre il segmento $(1, 1 + 1)$ essendo assunto come origine il vertice intorno al quale la rotazione si compie e convenendo di porre $D = 0$ quando l'intero lato si trova a contatto con la retta di appoggio. E quindi assumendo la distanza della proiezione mobile dal vertice temporaneamente fisso sulla retta come funzione $D(\alpha)$ dell'angolo di rotazione, si ha da una parte la funzione $R\ x$ di Riemann *eccesso di x* e dall'altra assumendo invece la stessa distanza come funzione $D(L)$ della lunghezza di perimetro sviluppato si ha la funzione che prende periodicamente il valore segmentale $Dir^{-1}(1)$, funzione che è analiticamente esprimibile ad esempio con

$$(4) \quad Dir_0^{-1}(Cm\ x)$$

e che ha per rappresentazione grafica il diagramma D della fig. 1.

Le funzioni $Fr\ x$, $Cm\ x$, $R\ x$ sono graficamente rappresentate dai diagrammi A, B, C della fig. 3 della Nota precedente. Esse discendono naturalmente dalla funzione $I\ x$ e sono fra loro connesse, come risulta dalla (1) e dalle relazioni

$$(5) \quad Fr\ x + Cm\ x = 1$$

$$(6) \quad R_{-1}\ x = 1 + 2\ Fr\ x \quad , \quad -R_{+1}\ x = -1 + 2\ Cm\ x.$$

5. Adoperando insieme con la funzione $I\ x$ anche queste altre funzioni della stessa famiglia si possono esprimere le cinque funzioni non periodiche

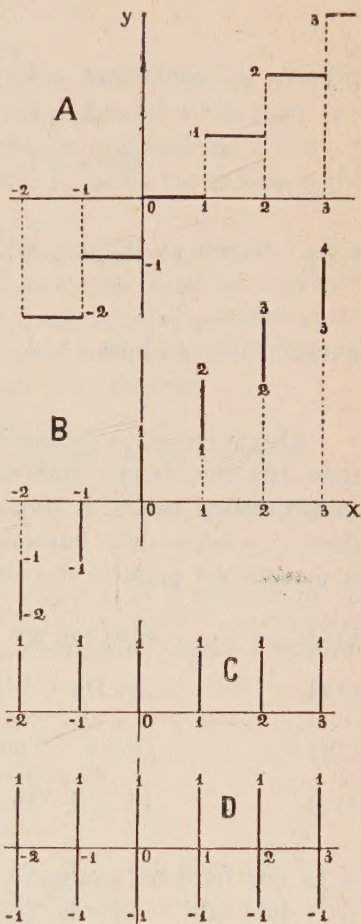


Fig. 1.

del gruppo $\operatorname{sgn} x^{(1)}$ in forma alquanto diversa da quella per esse innanzi indicata.

Si ha infatti

$$(7) \quad \varphi_0(a, 0, b) = a I \frac{\operatorname{Fr} e^x}{e^x} + b I \frac{\operatorname{Fr} e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$(8) \quad \operatorname{sem} \operatorname{sgn}_0 x = I \frac{\operatorname{Fr} e^{-x}}{e^{-x}} \quad \operatorname{sem} \operatorname{sgn}_0(-x) = I \frac{\operatorname{Fr} e^x}{e^x}$$

$$(9) \quad \operatorname{sgn} x = I \frac{\operatorname{Fr} e^{-x}}{e^{-x}} - I \frac{\operatorname{Fr} e^x}{e^x}$$

$$(10) \quad \operatorname{Dir}_0 x = I \frac{\operatorname{Fr} x^2 + 1}{1 + x^2}$$

$$(11) \quad \operatorname{Punt} x = I \frac{1}{1 + x^2}.$$

OSSERVAZIONE. — Le funzioni inverse delle costanti discontinue permettono data che sia una funzione discontinua, della quale siano già stati eliminati i valori isolati, di colmare le interruzioni del diagramma corrispondenti ai « salti » della funzione, sempre con la stessa facilità, quale che sia il numero dei punti di discontinuità e così ad esempio in

$$(12) \quad \operatorname{sgn}(\operatorname{sem} \operatorname{sgn} x) + I^{-1} \text{ o } \operatorname{Punt} x$$

$$(13) \quad \operatorname{sgn} \operatorname{Dir} x + I^{-1} \text{ o } \operatorname{Punt}(1 - x^2)$$

$$(14) \quad (\operatorname{Fal} x + \operatorname{Punt} \operatorname{Fr} x) + (-1 + 2) I \operatorname{Cm} x$$

$$(15) \quad I x + I^{-1} \operatorname{Fr} x$$

si ha una funzione $\operatorname{sem} \operatorname{sgn}_1 x$ con un salto, una funzione $\operatorname{Dir}_1 x$ con più (con due) salti e delle funzioni periodiche (Fal, x) o periodicamente variabili $(I x)$, con una infinità numerabile di salti, le quali tutte sono state rese continue facendo divenire « percorribili » i loro diagrammi. E la possibilità di rendere percorribile una linea discontinua è di fondamentale importanza in molte questioni, come mostrerò in altro mio scritto.

(1) V. la precedente Nota: *Le forme fondamentali delle costanti discontinue come funzioni circolari*.

Matematica (Analisi). — *A proposito di un teorema di Rosenblatt.* — Nota ⁽¹⁾ di G. SCORZA DRAGONI, presentata dal Corrisp. U. AMALDI.

In una Memoria recente ho dato un criterio d'unicità per le soluzioni di un'equazione differenziale, che assumano valori determinati in punti prestabiliti ⁽²⁾; ed ho riconosciuto che il mio teorema comprendeva, almeno in parte, un criterio analogo dovuto a Rosenblatt ⁽³⁾. In questa breve Nota voglio completare questo risultato.

Vedremo come Rosenblatt (restrizione che pare gli sia sfuggita) abbia dato un criterio sufficiente a stabilire l'unicità dell'integrale *solo in un intorno* del punto che si considera, agli estremi del quale intorno potrebbe anche biforcarsi ⁽⁴⁾; e vedremo come il criterio si possa ampliare notevolmente, però sempre restando per intero contenuto nei miei risultati.

1. Il criterio di Rosenblatt è il seguente:

La funzione $f(x, y)$ sia continua e (quindi) limitata nel rettangolo

$$R: -d \leq x \leq +d, \quad y_0 - d' \leq y \leq y_0 + d', \quad (d > 0, d' > 0),$$

e sia h il più piccolo dei due numeri d e $\frac{d'}{m}$ (dove m è il massimo di $|f|$ in R ; se $m = 0$, sarà $h = d$); allora in tutto l'intervallo $|x| \leq h$ l'equazione

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

ammette uno e un solo integrale, $y(x)$, che verifichi la

$$(2) \quad y(0) = y_0,$$

se è valida la disuguaglianza

$$(3) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{\vartheta(x) \cdot k(x)}{|x|} (y_1 - y_2),$$

$$(|x| \leq d, y_0 - d' \leq y_2 < y_1 \leq y_0 + d'),$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1931.

(2) *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1930.

(3) A. ROSENBLATT, *Sur les conditions d'unicité d'une solution des équations différentielles ordinaires*, « Comptes rendus », giugno 1928, e *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, « Rendiconti dei Lincei », serie 6^a, luglio 1928.

(4) Nel caso contemplato da Rosenblatt questa singolarità si presenta nei punti $+1$ e -1 .

dove

$$(4) \quad k(x) = 1 + \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^{-p}, \quad (p > 1),$$

e $\vartheta(x)$ è una funzione mai negativa nell'intervallo $|x| \leq d$, per la quale, posto

$$\vartheta_1(x) = \int_0^x \vartheta(t) dt,$$

riesce

$$(5) \quad 0 \leq \frac{\vartheta_1(x)}{x} \leq 1 \quad (1)$$

quando $x \neq 0$.

La posizione espressa dalla (4) è insostenibile. Quando p non è intero e $|x| > 1$, la (3) può perdere ogni significato. Perciò d'ora innanzi noi porremo

$$(4') \quad k(x) = 1 + \left| \log \frac{1}{|x|} \right|^{-p}.$$

La funzione $\frac{\vartheta(x)k(x)}{|x|}$ presenta due singolarità: una per $x = 0$, l'altra per $|x| = 1$. Però mentre la limitazione (3) è ancora abbastanza forte per stabilire l'unicità di $y(x)$ in tutto il segmento $|x| \leq 1$, vedremo che non è più tale da impedire che si biforchi quando si sia giunti nei punti $+1$ e -1 ; e poichè si può fare in modo che sia $b > 1$, questi due punti singolari non vengono esclusi dal criterio di Rosenblatt⁽²⁾.

2. Condurrò tutti i calcoli considerando solo i punti d'ascissa positiva.

Sia d_1 un numero positivo $\leq d$ e minore dell'unità. Allora nelle ipotesi poste l'unicità⁽³⁾ di $y(x)$ è assicurata in tutto il segmento $0 \leq x \leq d_1$.

A ciò, fissato $u_0 > 0$, basta dimostrare che si possono scegliere due numeri positivi δ e u_1 in modo che per ogni $\delta > 0$ e $\leq \delta$ si abbia, oltre alle

$$(6) \quad \delta < d_1, \quad \delta u_1 < u_0$$

anche la

$$(7) \quad \int_{\delta}^{d_1} \frac{k(x)\vartheta(x)}{x} dx \leq \int_{\delta u_1}^{u_0} \frac{du}{u} = \log u_0 - \log \delta u_1 \quad (4).$$

(1) Poichè $\vartheta(x) \geq 0$ e quindi $\vartheta_1(x)$, quando non è nulla, ha lo stesso segno di x , la prima delle disuguaglianze contenute nella (5) è una conseguenza delle ipotesi già fatte.

(2) Il numero b è introdotto esplicitamente da Rosenblatt nella sua Nota lineea.

(3) Si badi bene: l'unicità, non l'esistenza in tutto il segmento $0 \leq x \leq d_1$.

(4) Cfr. la mia Memoria già citata, n. 10.

Indicando con K il primo membro della (7), si ha

$$K = \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x} k(x) - \int_{\delta}^{d_1} \vartheta_1(x) d \frac{k(x)}{x};$$

indi (spezzato l'ultimo differenziale scritto nella differenza $\frac{dk(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} dx$) si trova

$$K = \frac{\vartheta_1(d_1)}{d_1} k(d_1) - \frac{\vartheta_1(\delta)}{\delta} K(\delta) + \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x} \frac{k(x)}{x} dx - \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x} k'(x) dx.$$

Ma il rapporto $\frac{\vartheta_1(x)}{x}$ è sempre compreso fra lo zero e l'unità; inoltre per $x > \delta (> 0)$ e $< d_1 (< 1)$ anche $k(x) = 1 + \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-p}$ e $k'(x) = -\frac{p}{x} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{1-p}$ sono positive; quindi K non supera l'espressione

$$\begin{aligned} & k(d_1) + k(\delta) + \int_{\delta}^{d_1} \frac{1}{x} \left[1 + \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-p} \right] dx + \int_{\delta}^{d_1} dk(x) \leq \\ & \leq 2k(d_1) + 2k(\delta) + \log d_1 - \log \delta - \int_{\delta}^{d_1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-p} d \log \frac{1}{x} = \\ & = 2k(d_1) + 2k(\delta) - \frac{1}{1-p} \left(\log \frac{1}{d_1}\right)^{1-p} + \frac{1}{1-p} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1-p} + \log d_1 - \log \delta. \end{aligned}$$

La somma dei primi cinque termini di questa espressione, presi in valore, assoluto ha un estremo superiore finito m_1 , al variare di δ nell'intervallo $0 < \delta \leq d_1$; e K non supera il numero $m_1 - \log \delta$. Ma allora perchè siano soddisfatte le (6) e (7) basta porre

$$\delta < d_1 (< 1) \quad , \quad u_1 = \frac{u_0}{e^{m_1}}.$$

Poichè d_1 è un numero arbitrario < 1 e $\leq d$, la (2) assicura l'unicità di $y(x)$ in tutto il segmento $0 \leq x \leq d$, quando $d < 1$; e quando $d \geq 1$, in tutto l'intervallo $0 \leq x < 1$, e quindi anche in tutto il segmento $0 \leq x \leq 1$ ⁽¹⁾.

3. Con un ragionamento analogo a quello svolto si dimostra che:

La (3) è sufficiente a stabilire l'unicità degli integrali che passano per il punto $(0, y_0)$ in tutto il segmento $|x| \leq d$, se, ferme restando le ipotesi

(1) Infatti se $y(x)$ si può definire in tutto l'intervallo $0 \leq x < 1$, $y(1)$ sarà determinato in modo unico dalla formula $y_0 + \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x f(t, y(t)) dt$, perchè f è limitata in R ed $y(x)$ è determinato in modo unico dalla (2) per tutti gli x positivi o nulli e < 1 .

fatte su $\vartheta(x)$, $k(x)$ è una funzione assolutamente continua, (e quindi) limitata e ≥ 1 in ogni intervallo del tipo $|x| \leq d_1 (< d)$, e se inoltre negli stessi intervalli è sommabile la funzione $\frac{k(x) - 1}{|x|}$ (1).

Consideriamo anche adesso solo i punti di ascissa positiva.

Posto $k'(x) = 0$ nei punti dove $k(x)$ non è derivabile, e introdotto di nuovo l'integrale $K = \int_{\delta}^{d_1} \vartheta(x) k(x) x^{-1} dx$, si ha, in base ai noti teoremi sul cambiamento di variabile sotto il segno d'integrale di Lebesgue,

$$\begin{aligned} K &= \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x} k(x) + \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x^2} k(x) dx - \int_{\delta}^{d_1} \frac{\vartheta_1(x)}{x} k'(x) dx \leq \\ &\leq k(d_1) + k(\delta) + \log d_1 - \log \delta + \int_{\delta}^{d_1} \frac{k(x) - 1}{x} dx + \int_{\delta}^{d_1} |k'(x)| dx \leq \\ &\leq -\log \delta + \log d_1 + k(d_1) + k(\delta) + \int_{\delta}^{d_1} \frac{k(x) - 1}{x} dx + \int_{\delta}^{d_1} |k'(x)| dx. \end{aligned}$$

E poichè $k(x)$ è limitata nel segmento $0 \leq x \leq d_1$, si ha di nuovo

$$K \leq m_1 - \log \delta, \quad (m_1 = \text{cost}),$$

per tutti i δ positivi e minori di d_1 ; ecc. . .

4. In questo numero darò un esempio per dimostrare che il criterio di Rosenblatt non è sufficiente ad assicurare l'unicità di $y(x)$ oltre il punto $x = 1$.

Posto

$$y_0(1) = 1, \quad y_0(x) = 1 + e^{t(x)}, \quad (x > 1),$$

dove $t(x) = \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-1}$, la funzione $y_0(x)$ riesce evidentemente continua insieme con la sua derivata prima in tutta la semiretta $x \geq 1$, e nel punto $x = 1$ la sua derivata è zero. Inoltre per $x > 1$ è sempre $y_0(x) > 1$.

Ciò posto, la f sia definita dalle eguaglianze

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0, & \text{se } x \leq 1, & \text{ oppure } y \leq 1, \\ f(x, y) &= y'_0(x), & \text{se } x \geq 1 & \text{ e } y_0(x) \leq y^{(2)}, \\ f(x, y) &= y'_0(x) \frac{1 - y}{1 - y_0(x)}, & \text{se } 1 < x & , \quad 1 < y < y_0(x); \end{aligned}$$

(1) Allora $k'(x)$ esiste in quasi tutti i punti di $|x| \leq d_1$; e, posto $k'(x) = 0$ nei rimanenti, $k'(x)$ e (quindi) $|k'(x)|$ sono sommabili, nel senso di LEBESGUE, in $|x| \leq d_1$.

(2) Si osservi che sulla semiretta $x = 1$, $y \geq 1$ le due posizioni coincidono.

di guisa che la f risulta continua in tutto il piano, e l'integrale della $y' = f$ che per $x = 0$ vale 1, al di là del punto $x = 1$ si può prolungare sia mantenendolo costante sia ponendolo eguale a $y_0(x)$. Eppure si verifica immediatamente che tutte le condizioni richieste da Rosenblatt sono soddisfatte. Infatti il rapporto incrementale

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2},$$

con $y_1 > y_2$, non è mai negativo; è nullo quando è $x \leq 1$, oppure $y_1 \leq 1$, oppure $y_2 \geq y_0(x)$; e in ogni altro caso — data la linearità della f rispetto a y nell'insieme $1 < x$, $1 < y < y_0(x)$ — è uguale a

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y_0(x)) - f(x, 1)}{y_0(x) - 1} &= \frac{y'_0(x)}{y_0(x) - 1} = x^{-1} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-2} < \\ &< x^{-1} \left(1 + \left| \log \frac{1}{x} \right|^{-2} \right), \quad (x > 1). \end{aligned}$$

E siccome la f è limitata nella striscia di base $-2 \leq x \leq 2$, detto m il suo estremo superiore in questo insieme, il numero h è uguale a 2 se calcolato rispetto al rettangolo $|x| \leq 2$, $|y - 1| \leq 2m$.

5. La funzione $1 + e^{t(x)}$ è un integrale particolare dell'equazione

$$y' = \frac{y - 1}{x \left(\log \frac{1}{x} \right)^2}, \quad (x > 1).$$

Nella costruzione del nostro esempio si può partire da un qualunque integrale particolare di questa equazione, $1 + ce^{t(x)}$, corrispondente a un valore positivo della costante d'integrazione, senza incontrare alcuna variante.

Non è poi difficile definire la f in modo che la singolarità riscontrata si presenti anche nel punto $x = -1$.

Resta a indicare come mai sia sfuggita al Rosenblatt l'osservazione oggetto di questa Nota. Applicando il suo ragionamento alla funzione $k(x)$,

definita dalla (4'), si viene a considerare l'integrale $\int_0^{x_0} |x| \left| \log \frac{1}{|x|} \right|^{-p} dx$,

che esiste precisamente solo quando $|x_0| < 1$.

Matematica. — *Sulle equazioni della superficie di Veronese.*
Nota⁽¹⁾ di D. MERCOGLIANO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Ho dimostrato in una Nota⁽²⁾ precedente che la congruenza degli assi di una cubica gobba è rappresentata analiticamente in modo completo dalle equazioni di tre (e non cinque) complessi quadratici; equazioni non disgiunte naturalmente dalla relazione identica esistente tra le coordinate p_{ij} delle rette dello spazio.

Ora, tenendo conto delle note *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette* del Segre⁽³⁾, era naturale pensare che la riduzione del numero delle equazioni rappresentanti la predetta congruenza si dovesse accompagnare alla riduzione del numero delle equazioni rappresentanti la superficie di Veronese:

$$(1) X_{00}X_{11} - X_{01}^2 = 0, \quad (2) X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \quad (3) X_{22}X_{00} - X_{02}^2 = 0, \\ (4) X_{01}X_{02} - X_{00}X_{12} = 0, \quad (5) X_{10}X_{12} - X_{11}X_{02} = 0, \quad (6) X_{20}X_{21} - X_{22}X_{01} = 0,$$

ove⁽⁴⁾ gli X_{ik} ($i, k = 0, 1, 2$) — coefficienti dell'equazione di una conica variabile nel piano — si assumono come coordinate correnti di un punto in S_5 .

Ed oggetto appunto di questa breve Nota è di mostrare che le equazioni (1), (2), (3) ed un'altra — che presto determineremo — bastano a rappresentare analiticamente la superficie di Veronese.

Quadrando infatti la (4) e tenendo conto di (1), (2) e (3), si ha:

$$\begin{aligned} X_{01}^2 X_{02}^2 + X_{00}^2 X_{12}^2 - 2 X_{00} X_{01} X_{02} X_{12} &= \\ &= X_{00}^2 X_{11} X_{22} + X_{00}^2 X_{11} X_{22} - 2 X_{00} X_{01} X_{02} X_{12} = \\ &= 2 X_{00}^2 X_{11} X_{22} - 2 X_{00} X_{01} X_{02} X_{12} \\ &= 2 X_{00} (X_{00} X_{11} X_{22} - X_{01} X_{02} X_{12}). \end{aligned}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1931.

(2) *I complessi quadratici contenenti la congruenza degli assi di una cubica gobba e le condizioni affinché due cubiche binarie abbiano due radici comuni*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. X, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 5-6, 1929.

(3) « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. 20^o, 1884-85.

(4) V. BERTINI, Introd.: *Geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ediz., p. 414.

Analogamente per la (5) e la (6) si ottiene:

$$\begin{aligned} X_{10}^2 X_{12}^2 + X_{11}^2 X_{02}^2 - 2 X_{10} X_{12} X_{11} X_{02} &= \\ = X_{00} X_{11}^2 X_{22} + X_{11}^2 X_{22} X_{00} - 2 X_{10} X_{12} X_{11} X_{02} &= \\ = 2 X_{11}^2 X_{00} X_{22} - 2 X_{10} X_{12} X_{11} X_{02} &= \\ = 2 X_{11} (X_{00} X_{11} X_{22} - X_{01} X_{02} X_{12}); \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_{20}^2 X_{21}^2 + X_{22}^2 X_{01}^2 - 2 X_{20} X_{21} X_{22} X_{01} &= \\ = X_{22} X_{00} X_{11} X_{22} + X_{22}^2 X_{00} X_{11} - 2 X_{20} X_{21} X_{22} X_{01} &= \\ = 2 X_{22}^2 X_{00} X_{11} - 2 X_{20} X_{21} X_{22} X_{01} &= \\ = 2 X_{22} (X_{00} X_{11} X_{22} - X_{01} X_{02} X_{12}). \end{aligned}$$

E poichè se si annullano (1), (2), (3) e

$$X_{00} X_{11} X_{22} - X_{01} X_{02} X_{12},$$

i quadrati di (4) (5) e (6) si annullano, si può concludere che le equazioni rappresentanti la superficie di Veronese si riducono alle 4 seguenti:

$$\begin{aligned} (1) X_{00} X_{11} - X_{01}^2 &= 0, (2) X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0, (3) X_{22} X_{00} - X_{02}^2 = 0, \\ (\mu) X_{00} X_{11} X_{22} - X_{01} X_{02} X_{12} &= 0; \end{aligned}$$

e ne segue la proprietà enunciata.

Osservazione. — Si può giungere al medesimo risultato tenendo conto di un noto teorema⁽¹⁾ di Frobenius, per cui se un determinante simmetrico è di caratteristica $p > 0$, esiste necessariamente almeno un suo minore principale, d'ordine p , diverso da zero. Infatti, poichè in fondo le equazioni della superficie di Veronese si ottengono annullando i minori di 2° ordine del discriminante

$$|X_{ik}|$$

della conica variabile

$$\sum X_{ik} \xi_i \xi_k = 0 \quad (X_{ik} = X_{ki})$$

sul piano; per esprimere che

$$X_{ik}$$

è di caratteristica < 2 , basta supporre che insieme con la relazione

$$(\nu) \quad |X_{ik}| = 0$$

(1) *Ueber das Pfaffsche Problem*, « Crelle's Journal », Bd. 82, p. 242.

sussistano le altre

$$(1) X_{00} X_{11} - X_{01}^2 = 0, (2) X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = 0, (3) X_{22} X_{00} - X_{02}^2 = 0.$$

Ora con lo sviluppo di (v), tenendo conto di (1), (2) e (3), si ottiene:

$$\begin{aligned} & X_{00} \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix} - X_{01} \begin{vmatrix} X_{10} & X_{12} \\ X_{20} & X_{22} \end{vmatrix} + X_{02} \begin{vmatrix} X_{10} & X_{11} \\ X_{20} & X_{21} \end{vmatrix} = \\ & = X_{00} X_{11} X_{22} - X_{00} X_{12}^2 - X_{01}^2 X_{22} + X_{01} X_{02} X_{12} + X_{02} X_{01} X_{12} - X_{02}^2 X_{11} \\ & = X_{00} X_{11} X_{22} - X_{00} X_{11} X_{22} - X_{00} X_{11} X_{22} + \\ & + X_{01} X_{02} X_{12} + X_{01} X_{02} X_{12} - X_{00} X_{11} X_{22} \\ & = 2(X_{01} X_{02} X_{12} - X_{00} X_{11} X_{22}), \end{aligned}$$

cioè appunto l'espressione (μ).

Matematica (Geometria). — *Corrispondenze proiettivamente associate, in un punto, ad una superficie.* Nota ⁽¹⁾ di G. PALOZZI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Data su una superficie non rigata σ e per un suo punto O una curva C, l'intorno del secondo ordine, E_2 , di O su C definisce due quadriche asintotiche osculatrici, Q_1 e Q_2 , che possono dirsi del primo e secondo sistema, se conveniamo di distinguere i due sistemi di asintotiche di σ chiamandoli *primo* e *secondo* ⁽²⁾.

In particolare, se μ è un piano qualunque per O, potremo considerare l'intorno E_2 sulla curva d'intersezione di μ con σ e le quadriche Q_1 e Q_2 da esso determinate. Siano P_1 e P_2 i punti, del piano ω tangente a σ in O, poli di μ rispetto a queste quadriche. Associando a μ una volta P_1 ed un'altra P_2 avremo due modi diversi di far corrispondere i punti di ω ai piani della stella di centro O: diremo *prima corrispondenza* quella fra i

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1931.

(2) Sono le quadriche individuate dalle tangenti asintotiche di uno stesso sistema uscenti da O e dai due punti infinitamente vicini ad O su C: Ved. le Note: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato e Ancora sulla geometria ecc.* (« Rend. Lincei », 1926) di BOMPIANI; il quale per primo ha introdotte, e poi sistematicamente adoperate come punto di partenza di molte ricerche, quelle quadriche nella Geometria proiettivo-differenziale delle superficie; e dal quale pure sono stato indotto a considerare le corrispondenze (μ, P_1) e (μ, P_2) della presente Nota.

piani μ ed i punti P_1 , e la indicheremo con (μ, P_1) ; seconda corrispondenza l'altra (μ, P_2) ⁽¹⁾.

Siano u e v le asintotiche di σ ; $x^i(u, v)$ ($i = 1, \dots, 4$) le coordinate proiettive omogenee dei suoi punti normalizzate secondo Fubini, le quali soddisferanno perciò al sistema

$$x_{uu} = \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + n x, \quad x_{vv} = \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + v x, \quad \left(x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \dots \right);$$

$\xi^i(u, v)$ le coordinate tangenziali corrispondenti ⁽²⁾ a quelle di punto x^i .

Un piano generico per O incontra σ secondo una curva il cui E_2 è determinato dai punti

$$x, \quad dx = x_u du + x_v dv, \quad d^2 x = x_u (\delta^2 u + \gamma dv^2) + x_v (\delta^2 v + \beta du^2) + 2 x_{uv} du dv$$

con

$$\delta^2 u = d^2 u + \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial u} du^2, \quad \delta^2 v = d^2 v + \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} dv^2;$$

le quadriche Q_1 e Q_2 costruite per quest'elemento, rispettivamente con le tangenti alle asintotiche u ($dv = 0$; primo sistema) e alle v ($du = 0$; secondo sistema), hanno le equazioni ⁽³⁾

$$a' T^2 - 2 \beta \gamma du^2 dv TN_1 - 2 \beta \gamma du dv^2 TN_2 + 2 \gamma dv^3 (T \Omega - N_1 N_2) = 0$$

e

$$a'' T^2 - 2 \beta \gamma du^2 dv TN_1 - 2 \beta \gamma du dv^2 TN_2 - 2 \beta du^3 (T \Omega - N_1 N_2) = 0$$

nelle quali a' ed a'' hanno espressioni che non importa conoscere, e

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|, \quad \Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|;$$

e i poli P_1 e P_2 del piano μ , determinato dai tre punti $x, dx, d^2 x$ e avente per conseguenza le coordinate

$$(du \delta^2 v - dv \delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3) \xi + 2 \xi_u du^2 dv - 2 \xi_v du dv^2,$$

(1) Nella polarità di Lie, a cui vien fatto di riavvicinare le corrispondenze (μ, P_1) e (μ, P_2) , il punto P_0 di ω che corrisponde ad un piano μ per O è il polo di μ rispetto ad una quadrica fissa: la quadrica di Lie relativa al punto O ; invece P_1 (P_2) è il polo di μ rispetto ad una quadrica Q_1 (Q_2) che varia con questo piano.

(2) Nel senso stabilito da FUBINI e ČECH al § 14 della: *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, (« I. G. P. D. »), Paris, Gauthier-Villars, 1931.

(3) Ved. BOMPIANI, *Ein Analogon der Quadrik von Lie in der projektiven Flächen-theorie*, « Math. Zeitschr. », 1929.

sono i punti di coordinate

$$\begin{aligned} (du\delta^2v - dv\delta^2u - 3\beta du^3 - \gamma dv^3)x + 2x_u du^2 dv - 2x_v du dv^2 \\ (du\delta^2v - dv\delta^2u + \beta du^3 + 3\gamma dv^3)x + 2x_u du^2 dv - 2x_v du dv^2. \end{aligned}$$

Dopo ciò, indicando con

$$\eta\xi + \zeta\xi_u + \tau\xi_v$$

le coordinate di μ e con

$$y_1x + \zeta_1x_u + t_1x_v, \quad y_2x + \zeta_2x_u + t_2x_v$$

quelle di P_1 e P_2 , si trova che le corrispondenze (μ, P_1) e (μ, P_2) sono definite rispettivamente dalle

$$(1) \quad y_1 = \eta\tau + 2\beta\zeta^2, \quad \zeta_1 = \zeta\tau, \quad t_1 = \tau^2$$

$$(2) \quad y_2 = \eta\zeta + 2\gamma\tau^2, \quad \zeta_2 = \zeta^2, \quad t_2 = \zeta\tau$$

da cui si deduce

$$(1') \quad \eta = y_1t_1 - 2\beta\zeta_1^2, \quad \zeta = \zeta_1t_1, \quad \tau = t_1^2$$

$$(2') \quad \eta = y_2\zeta_2 - 2\gamma t_2^2, \quad \zeta = \zeta_2^2, \quad \tau = \zeta_2t_2;$$

sicchè sono corrispondenze *birazionali quadratiche*.

Ai piani di un fascio, il cui asse s passi per O , ma non sia tangente a σ , corrispondono due coniche per O rispettivamente tangenti, in questo punto, alle asintotiche: le loro ulteriori intersezioni sono proiettate da O secondo le tangenti di Segre.

Se poi s è tangente a σ , ai piani del fascio corrispondono due punteggiate proiettive sovrapposte aventi per comune sostegno la tangente coniugata di s e di cui O è l'unico punto unito, a meno che s sia una delle tangenti di Darboux: allora, e soltanto allora, ad ogni piano del fascio corrisponde, in tutt'e due le corrispondenze, lo stesso punto⁽¹⁾ (e quella proiettività si riduce all'identità).

2. Fubini e Čech⁽²⁾ indicano con $C(j_1, j_2; r)$ la cubica, del piano ω ,

$$(3) \quad y\zeta t + p\zeta^3 + m\zeta^2 t + n\zeta t^2 + q t^3 = 0 \quad (m, n, p, q = \text{cost.})$$

(1) Proprietà questa che va ravvicinata a quella scoperta da Fubini per le tangenti di Segre: «Ad un piano corrisponde lo stesso punto nella polarità di Lie e nella corrispondenza di Segre soltanto se il piano passa per una direzione di Segre». Ved. FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, («G. P. D.»), Bologna, Zanichelli, 1926.

(2) «I. G. P. D.», §§ 38 e 39.

avente un punto doppio in O , tangente ivi alle asintotiche ed i cui flessi giacciono sulla retta r

$$y + m\chi + nt = 0;$$

cubica che è definita da questa stessa retta e dagli invarianti di contatto⁽¹⁾

$$j_1 = -\frac{2p}{\beta}, \quad j_2 = -\frac{2q}{\gamma},$$

che competono rispettivamente ai due rami uscenti da O e all'asintotica a cui ciascuno di questi rami è tangente. Con $\Gamma(j_1, j_2; p)$ indicano invece il cono che, nella polarità di Lie, corrisponde alla cubica $C(-j_1, -j_2; r)$. Ed hanno dimostrato che, fissati comunque j_1 e j_2 e facendo variare r nel fascio con centro nel punto

$$yx + \zeta x_u + tx_v,$$

i coni $\Gamma(j_1, j_2; \rho)$ riescono tangenti ad uno stesso piano

$$\eta\xi + \zeta\xi_u + \tau\xi_v,$$

ove le y, ζ, t e le η, ζ, τ son legate dalle relazioni

$$\eta = y\chi t - \frac{1}{2}(\beta j_1 \chi^3 + \gamma j_2 t^3) \quad , \quad \zeta = \chi^2 t \quad , \quad \tau = \chi t^2$$

dalle quali si ottengono le altre, ad esse equivalenti,

$$(4) \quad y = \eta\zeta\tau + \frac{1}{2}(\beta j_1 \zeta^3 + \gamma j_2 \tau^3) \quad , \quad \chi = \zeta^2 \tau \quad , \quad t = \zeta\tau^2.$$

Chiamando corrispondenti quel piano e quel punto, si può dunque stabilire, in ∞^2 modi, una corrispondenza fra i piani per O ed i punti di ω .

Di queste ∞^2 corrispondenze fanno parte, come casi particolarissimi, le nostre (μ, P_1) e (μ, P_2) : vogliamo provare che è sempre possibile, a partire da queste due, costruirne una qualunque altra.

Consideriamo una delle corrispondenze di Fubini e Čech, fissando i valori di j_1 e j_2 . Preso un piano μ per O , consideriamo, sulla tangente coniugata di quella costituita dall'intersezione di μ con ω , i punti P' e P'' per i quali si ha

$$(P'P_1P_2O) = \frac{1}{2}j_1 \quad , \quad (P''P_2P_1O) = \frac{1}{2}j_2,$$

(1) Per il significato di queste invarianti, ved. C. SEGRE: *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche ecc.*, « Rend. Lincei », 1897.

ove P_1, P_2 e P_0 sono i punti che corrispondono a μ rispettivamente nella prima e seconda corrispondenza e nella polarità di Lie, e j_1 e j_2 hanno i valori fissati: il punto che, nella corrispondenza considerata, corrisponde a μ è quello P , sulla tangente coniugata di $\mu \cdot \omega$, per cui si ha

$$(P'P''PO) = -1.$$

Infatti, poichè la polarità di Lie è definita da

$$y = \eta \quad , \quad z = \zeta \quad , \quad t = \tau,$$

le y, z, t di P' e P'' son date da

$$\begin{aligned} y &= \eta\tau + \beta j_1 \zeta^2 & , & & z &= \zeta\tau & , & & t &= \tau^2 \\ y &= \eta\zeta + \gamma j_2 \tau^2 & , & & z &= \zeta^2 & , & & t &= \zeta \end{aligned}$$

e quindi quelle di P dalle (4).

3. Fra le corrispondenze di Fubini e Čech è compresa anche la corrispondenza di Segre

$$(5) \quad y = \eta\zeta\tau + \beta\zeta^3 + \gamma\tau^3 \quad , \quad z = \zeta^2\tau \quad , \quad t = \zeta\tau^2$$

la quale, perciò, può esser costruita, a partire dalle (μ, P_1) e (μ, P_2) , nel modo ora indicato. Più semplicemente, però, si può notare che i punti P_1, P_2 e P_s che, nella prima e seconda corrispondenza ed in quella di Segre, corrispondono ad uno stesso piano μ per O formano, insieme ad O , un gruppo armonico.

Di qui ⁽¹⁾ poi segue che, se $P_1 \equiv P_2$, è pure $P_s \equiv P_1 \equiv P_2$; osservazione questa che potrebbe servire anch'essa a caratterizzare le tangenti di Darboux.

Infine, il birapporto dei punti P_1, P_2, P_0 e P_s che, nella prima e seconda corrispondenza, nella polarità di Lie e nella corrispondenza di Segre, corrispondono ad uno stesso piano per O vale

$$(P_1 P_2 P_0 P_s) = \frac{\beta du^3}{\gamma dv^3},$$

cioè eguaglia il rapporto degli elementi d'arco proiettivi delle asintotiche uscenti da O ⁽²⁾.

4. Le corrispondenze (μ, P_1) e (μ, P_2) possono ancora utilizzarsi per stabilire una corrispondenza fra i punti del pian tangente ω . Basta infatti

(1) O direttamente dal confronto delle (1) e (2) con le (5).

(2) Un altro significato geometrico di questo rapporto è stato dato da BOMPIANI nella Nota, già citata: *Ancora sulla geometria ecc.*

far corrispondere fra loro i punti P_1 e P_2 , che corrispondono allo stesso piano μ , per ottenere la corrispondenza birazionale cubica (P_1, P_2) definita da

$$y_2 = y_1 \tilde{\alpha}_1 t_1 - 2\beta \tilde{\alpha}_1^3 + 2\gamma t_1^3, \quad \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\alpha}_1^2 t_1, \quad t_2 = \tilde{\alpha}_1 t_1^2$$

o

$$y_1 = y_2 \tilde{\alpha}_2 t_2 + 2\beta \tilde{\alpha}_2^3 - 2\gamma t_2^3, \quad \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2^2 t_2, \quad t_1 = \tilde{\alpha}_2 t_2^2.$$

In questa corrispondenza (P_1, P_2) il luogo dei punti uniti è costituito dalle tangenti di Segre.

5. Anzichè da un piano μ per O , partiamo da un punto $P(yx + \tilde{\alpha}x_u + tx_v)$ di ω . Considerandolo una volta come un punto P'_1 ed un'altra come un punto P'_2 , potremo associargli rispettivamente i piani μ' ($\eta'\xi + \zeta'\xi_u + \tau'\xi_v$) e μ'' ($\eta''\xi + \zeta''\xi_u + \tau''\xi_v$) ove, giusta le (1') e (2'),

$$\eta' = \gamma t - 2\beta \tilde{\alpha}^2, \quad \zeta' = \tilde{\alpha} t, \quad \tau' = t^2$$

$$\eta'' = \gamma \tilde{\alpha} - 2\gamma t^2, \quad \zeta'' = \tilde{\alpha}^2, \quad \tau'' = \tilde{\alpha} t;$$

ed avremo così due corrispondenze (P, μ') e (P, μ'') che fanno corrispondere, in due modi diversi, ai punti di ω i piani della stella di centro O . Facendo poi corrispondere fra loro i piani μ' e μ'' , che corrispondono ad uno stesso punto P di ω , si verrà ad ottenere una corrispondenza fra i piani di quella stella.

Per queste corrispondenze valgono i risultati correlativi di quelli dei numeri precedenti.

6. All'equazione

$$(6) \quad du \, d^2 v - dv \, d^2 u = A du^3 + B du^2 dv + C du \, dv^2 + D dv^3$$

Fubini e Čech hanno associato una delle loro cubiche (3), cercando il luogo dei punti che, nella corrispondenza di Segre, corrispondono ai piani μ osculatori alle linee, uscenti da O , che soddisfano alla (6)⁽¹⁾.

Se, analogamente, si cercano i luoghi dei punti P_1 e P_2 che corrispondono, nella prima e seconda corrispondenza, a questi stessi piani μ , si trova che alla (6) si possono associare le due cubiche del tipo (3)

$$\gamma \tilde{\alpha} t + \frac{1}{2} (A - 3\beta) \tilde{\alpha}^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial u} - B \right) \tilde{\alpha}^2 t + \frac{1}{2} \left(C + \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} \right) \tilde{\alpha} t^2 - \frac{1}{2} (D - \gamma) t^3 = 0,$$

$$\gamma \tilde{\alpha} t + \frac{1}{2} (A + \beta) \tilde{\alpha}^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial u} - B \right) \tilde{\alpha}^2 t + \frac{1}{2} \left(C + \frac{\partial \lg \beta \gamma}{\partial v} \right) \tilde{\alpha} t^2 - \frac{1}{2} (D + 3\gamma) t^3 = 0$$

(1) « I. G. P. D. », § 40.

che hanno la stessa retta r dei flessi e gli invarianti j'_1 e j'_2 , j''_1 e j''_2 dati da

$$\begin{aligned} A - 3\beta &= -\beta j'_2 & , & & D - \gamma &= \gamma j'_2 \\ A + \beta &= -\beta j''_1 & , & & D + 3\gamma &= \gamma j''_2 . \end{aligned}$$

Soltanto se $j'_1 = -j''_1$ e $j'_2 = -j''_2$, è $A = \beta$ e $D = -\gamma$ e allora le due cubiche hanno addirittura gli stessi flessi, cioè questi cadono nelle intersezioni $\neq O$ delle due cubiche, e la (6) è l'equazione di un sistema radiale ⁽¹⁾.

Se, in luogo delle corrispondenze (μ, P_1) e (μ, P_2) , si utilizzassero le (P, μ') e (P, μ'') si potrebbero associare alla (6) due coni correlativi di quelle cubiche e ricavarne un'osservazione analoga alla precedente per le equazioni dei sistemi assiali ⁽²⁾.

Meccanica. — *Osservazioni sul moto piano di un sistema di punti nel quale è stazionario il centro delle velocità.* Nota di A. MASOTTI, presentata ⁽³⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. « Centro » di un sistema di vettori applicati, il cui risultante è diverso da zero, è quel punto dell'asse centrale rispetto al quale il viriale del sistema è nullo. — I vettori considerati siano le velocità di n punti mobili in un piano, e il loro centro sia stazionario. Si osserva che in un tale movimento si mantiene costante la somma dei quadrati delle distanze dei punti mobili dal centro fisso, ed è costantemente nulla la somma delle velocità areolari rispetto a questo punto. Per due soli punti mobili si constata che se è assegnato il moto di uno di essi, ed è assegnata in un certo istante la posizione dell'altro, il moto di quest'ultimo è completamente determinato; questa proposizione è estensibile ad un numero qualsiasi di punti. Si accenna poi ad un caso particolare: quello di due punti mobili sopra due circonferenze concentriche; il centro delle velocità è costantemente il centro delle due traiettorie se i punti si muovono, in ogni istante, in sensi opposti, ed i valori delle velocità stanno fra loro in ragione inversa dei raggi; se i moti dei due punti sono uniformi sulle rispettive traiettorie, i

(1) BOMPIANI, *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva della superficie*, « Rend. Istituto Lombardo », 1924. Ved. anche « G. P. D. », appendice II.

(2) Per l'interpretazione proiettiva della (6), e in particolare dell'equazione dei sistemi assiali, ved., oltre la Nota ripetutamente citata di BOMPIANI, i lavori dello stesso Autore: *L'intorno del 2° ordine e i sistemi pluriassiali di una superficie qualsiasi*, « Memorie Accad. Scienze di Bologna », 1926-27; *Sull'interpretazione proiettiva dell'equazione $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$* , « Boll. Un. Mat. Ital. », 1930.

(3) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1931.

valori delle accelerazioni (centripete) stanno fra loro in ragione inversa dei cubi dei raggi.

2. Siano \mathbf{v}_h le velocità dei punti P_h ($h = 1, \dots, n$), mobili in un piano. Sia O il centro delle velocità, che si suppone stazionario. Assumeremo il punto O come origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, ed allora saranno soddisfatte, in ogni istante, le due equazioni seguenti:

$$(1) \quad \sum (x_h \dot{y}_h - y_h \dot{x}_h) = 0,$$

$$(2) \quad \sum (x_h \dot{x}_h + y_h \dot{y}_h) = 0;$$

x_h e y_h sono le coordinate cartesiane del punto P_h , \dot{x}_h e \dot{y}_h sono le loro derivate rispetto al tempo t , cioè le componenti di \mathbf{v}_h , e le somme comprendono i termini ottenuti dando ad h tutti i valori interi da 1 ad n . Queste equazioni esprimono, rispettivamente, l'annullarsi del momento e del viriale, rapporto al centro O , del sistema delle velocità⁽¹⁾.

Discendono dalle (1) e (2) le seguenti proprietà del movimento:

a) Posto $r_h^2 = x_h^2 + y_h^2$, con che r_h designa la distanza del punto P_h dal centro O , si deduce dalla (2), con una integrazione, che

$$(3) \quad \sum r_h^2 = \text{costante}:$$

è costante la somma dei quadrati delle distanze dei punti mobili dal centro fisso O ⁽²⁾.

b) Poiché $\frac{1}{2}(x_h \dot{y}_h - y_h \dot{x}_h)$ è, notoriamente, la velocità areolare del punto P_h rispetto ad O , sembra lecito denominare « velocità areolare del sistema » rispetto ad O lo scalare

$$(4) \quad A = \frac{1}{2} \sum (x_h \dot{y}_h - y_h \dot{x}_h),$$

(1) Il sistema delle velocità \mathbf{v}_h è un sistema piano di vettori a risultante diverso da zero; è quindi nullo il suo momento rispetto a qualsiasi punto dell'asse centrale, in particolare rispetto al centro.

(2) Si osserva che, in generale, detto O il centro delle velocità \mathbf{v}_h di n punti P_h comunque mobili nello spazio, dalla relazione

$$\sum (P_h - O) \times \dot{P}_h = 0$$

discende che

$$\sum (P_h - O) \times (\dot{P}_h - \dot{O}) = -\dot{O} \times \sum (P_h - O),$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} \sum r_h^2 = -2 \dot{O} \times \sum (P_h - O).$$

Quindi la (3) vale sempre quando $\dot{O} = 0$, e più in generale se

$$\dot{O} \times \sum (P_h - O) = 0.$$

che è la somma delle velocità areolari rispetto ad O dei singoli punti del sistema ⁽¹⁾. Ciò premesso, la (1) esprime che

$$(5) \quad A = 0 :$$

è costantemente nulla la velocità areolare del sistema rispetto al centro fisso O ⁽²⁾.

Se la posizione del punto P_h è definita mediante le coordinate polari r_h e θ_h (essendo O il polo), la (1), e quindi la (5), divengono :

$$(6) \quad \sum r_h^2 \dot{\theta}_h = 0 .$$

3. Consideriamo, in particolare, due soli punti P_1 e P_2 , mobili sul piano in modo che sia stazionario il centro delle loro velocità. È facile constatare che se è assegnato il moto di uno di essi, e in un certo istante è assegnata la posizione dell'altro, risulta completamente determinato il moto di quest'ultimo.

(1) Per un sistema di punti mobili nello spazio, si chiamerebbe « velocità areolare del sistema » rispetto ad un punto O il vettore

$$A = \frac{1}{2} \sum (P_h - O) \wedge v_h .$$

(2) Più generalmente si potrebbero considerare movimenti piani di sistemi di punti nei quali la velocità areolare del sistema rispetto ad un punto è costante. Per questi moti si potrebbe adottare la denominazione di « moti centrali ». — Un esempio è offerto da un sistema di n vortici puntiformi, mobili liberamente in un velo liquido piano indefinito, ed aventi tutti la stessa intensità. Rispetto ad un punto qualsiasi del piano come polo, valgono le seguenti relazioni :

$$(a) \quad \sum r_h^2 = \text{cost.} , \quad \sum r_h^2 \dot{\theta}_h = \text{cost.} = \frac{1}{2\pi} \binom{n}{2} C ,$$

C essendo la comune intensità dei vortici (cfr. LAMB, *Hydrodynamics*, form. 7 e 9 del § 157; Cambridge, University Press, 1924); la prima coincide con la (3), e la seconda esprime che il moto del sistema dei vortici è centrale, nel senso accennato, rispetto a qualunque punto del piano, con la stessa velocità areolare. Si osserva però che

$$(b) \quad \sum \dot{x}_h = 0 , \quad \sum \dot{y}_h = 0 ,$$

(loc. cit., form. 9 del § 154). sicchè, essendo nulla la somma delle velocità, non esiste il centro delle velocità. — Se i vortici hanno intensità diverse, valgono le relazioni

$$(c) \quad \sum C_h r_h^2 = \text{cost.} , \quad \sum C_h r_h^2 \dot{\theta}_h = \text{cost.} = \frac{1}{2\pi} \sum_{rs} C_r C_s ,$$

$$(d) \quad \sum C_h \dot{x}_h = 0 , \quad \sum C_h \dot{y}_h = 0 ,$$

nelle quali sono contenute le (a) e (b). Non si possono più trarre le precedenti conclusioni, però si osserva che si mantiene costantemente nullo il viriale dei vettori $C_h v_h$ rispetto a qualsiasi punto del piano, mentre il loro momento mantiene valore costante; essendo nulla la somma di questi vettori, non esiste il loro centro,

In questo caso, infatti, le condizioni (3) e (6) così si esprimono:

$$(7) \quad r_1^2 + r_2^2 = a^2,$$

$$(8) \quad r_1^2 \dot{\theta}_1 + r_2^2 \dot{\theta}_2 = 0,$$

designando a^2 una costante positiva, *a priori* arbitraria. La (8) permette di affermare che le velocità angolari dei due punti, $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$, hanno sempre segni opposti.

Dalle (7) e (8) discendono le due relazioni seguenti:

$$(9) \quad r_2 = \sqrt{a^2 - r_1^2},$$

$$(10) \quad \theta_2 = - \int \frac{r_1^2 \dot{\theta}_1}{a^2 - r_1^2} dt + \alpha,$$

dove α è una costante arbitraria; esse contengono quanto fu asserito. Infatti se il moto di P_1 è assegnato, sono note le due equazioni

$$r_1 = r_1(t), \quad \theta_1 = \theta_1(t)$$

che danno, in ogni istante, la posizione di P_1 mediante le sue coordinate polari; le (9) e (10), eseguita la quadratura che compare nella seconda, danno due relazioni del tipo

$$r_2 = r_2(t), \quad \theta_2 = \theta_2(t)$$

che definiscono parimenti, in ogni istante, la posizione di P_2 ; le costanti a^2 e α risultano determinate dalla conoscenza della posizione, ad un istante t_0 , del punto $P^{(1)}$.

È facile estendere quanto precede al caso di n punti mobili: assegnato il moto di $n - 1$ punti, resta definito il moto dell' n -esimo, purché di questo punto sia assegnata la posizione in un istante determinato.

4. A titolo d'esempio consideriamo ancora il moto di due punti, con l'ipotesi che uno di essi, P_1 , si muova sopra una circonferenza col centro in O , sicché r_1 è costante. Segue dalla (9) che anche r_2 è costante, e

(1) La (10) può esser scritta come segue:

$$(10^{bis}) \quad \theta_2 = - \int \frac{r_1^2}{a^2 - r_1^2} d\theta_1 + \alpha.$$

Nota la traiettoria di P_1 , data cioè la sua equazione $r_1 = \varphi(\theta_1)$, le (9) e (10^{bis}) sono le equazioni parametriche della traiettoria di P_2 , essendo θ_1 il parametro. Le costanti a^2 ed α risultano determinate se è assegnata la posizione di P_2 in un istante in cui è nota l'anomalia θ_1 di P_1 .

quindi anche P_2 descrive una circonferenza col centro in O . Fu già osservato che le velocità angolari dei due punti hanno segni opposti; nel caso attuale discende, di più, dalla (8) che

$$(11) \quad r_1^2 \dot{\theta}_1 + r_2^2 \dot{\theta}_2 = \text{costante}.$$

Poichè $r_1 |\dot{\theta}_1|$ e $r_2 |\dot{\theta}_2|$ sono i valori delle velocità, che indicheremo con V_1 e V_2 , risulta ancora dalla (8) che

$$(12) \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{r_2}{r_1};$$

i valori delle velocità, in ogni istante, stanno fra loro in ragione inversa dei raggi delle traiettorie.

In questo modo si muovono due punti che descrivono con velocità di valore costante due circonferenze concentriche in opposti sensi, se le loro accelerazioni hanno valori che stanno fra loro in ragione inversa dei cubi dei raggi.

Geofisica. — *Sulla depressione gravimetrica di Gattatico-Parma.* Nota ⁽¹⁾ di A. BELLUIGI, presentata dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

Le Stazioni gravimetriche presso Gattatico furono distribuite a gruppi: talvolta ai vertici di poligoni con un numero maggiore o minore di lati, a seconda delle esigenze del rilievo, talvolta lungo semplici profili rettilinei.

Spesso le Stazioni vennero duplicate o eseguite a poca distanza l'una dall'altra, ripetute di quando in quando con osservazioni a 3 o a 5 azimuths, com'è buona norma di rilievo.

Un primo gruppo furono distribuite parallelamente a 1 km. ad Est del T. Enza, presso la località Torretta.

Il T. Enza ha, in questa zona, una larghezza media di 500 m., con dislivello medio di 2 m. dagli argini: la sua influenza topografica è, perciò, sulle Stazioni in esame, trascurabile.

In vicinanza dei grandi corsi d'acqua l'elemento maggiormente perturbatore dei rilievi è l'inomogeneità dell'immediato sottosuolo, e a questo inconveniente si sa che si può spesso rimediare.

Data la grande vicinanza dell'Enza, e tenuto conto che questo torrente ha avuto, nel passato il suo letto ad Est dell'attuale, le Stazioni del gruppo risultano alquanto influenzate dalle inomogeneità subsuperficiali.

Il Bolognini riferisce che: « Prima del 1000 le acque dell'Enza si spandevano in 3 rami: uno di essi, sortendo dal torrente superiore a Mon-

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1931.

tecchio, scorreva per Barco e fossa di Barco nei confini di Cavriago, passando per Gaida e Cadè, diffondendosi nella gran Padusa per la parte di Castelnuovo. Un altro entrava per le campagne al disotto del Castello stesso (Montecchio) e le acque si spandevano per Calerno e S. Ilario, ove presentemente ne restano le vestigia, dette le basse: passando poi per Campesine terminavano nella comune valle di Poviglio e Castelnuovo. Questa diramazione è poi citata anche dallo storico L. Alberti che dice che nel 1115 questo torrente tagliava la strada Emilia in più parti. Il 3° ramo passava per dove presentemente esiste il ponte della strada postale di Parma ».

L'orientamento medio dei Gradienti di questo Gruppo, tenuto conto delle varie correzioni, è verso Est, con un valore assoluto oscillante intorno alle 10 (U. E.) con leggera tendenza ad aumentare a Nord.

Più costante si mantiene la curvatura, oscillando essa, sia per il valore assoluto, che per la direzione, in limiti molto piccoli.

Orientamento costante di gradienti e curvature dunque, lungo un percorso Sud-Nord di circa 3 km.

Dalla località di Torre al Cavo Cassa nulla da osservare, tranne una anomalia locale con un Gradiente di 20 unità.

Procedendo il rilievo a Nord, fino al Po, sempre sulla destra dell'Enza, si sono avuti i seguenti risultati: Gr. orientati ad Est, con tendenza a ruotare verso Nord, valore assoluto poco superiore alle 10 U. E.

Curvature (orientate Sud-Ovest, Nord-Est) quasi tutte uguali, sia in grandezza che in direzione.

Un profilo trasversale ai precedenti non offre nulla di nuovo: gli andamenti dei Gr. e delle C. rimangono invariati.

Un profilo Sud-Nord parallelo all'Enza e a 3 km. circa Est da questo da Gr. orientati ad Est, valori assoluti piuttosto oscillanti, da un minimo di 10 a un massimo di 20 U. E. Le C. mantengono un andamento complessivamente regolare. Si nota tuttavia la tendenza ad aumentare il valore assoluto dei Gr. lungo il percorso Gattatico-Brescello 13 km.

La forma e l'andamento delle isogamme, nella regione Brescello-Praticello-Poviglio rilevano una tectonica del sottosuolo a Sinclinale. Questa rimonta verso Est, dolcemente da Gattatico a Praticello, verso Brescello.

Un gruppo di Gr., alla sinistra dell'Enza, all'altezza di Gattatico, risultano orientati complessivamente verso Sud-Ovest, con qualche anomalia nella grandezza.

Subito a Nord Gr. orientati verso Nord-Est, con valore assoluto crescente, procedendo da Sud a Nord e andamento generale piuttosto regolare, grandezza oscillante intorno alle 10 U. E.

Gr. ad Ovest della linea S. Lazzaro P.-S. Polo tutti orientati verso Ovest: orientamento caratteristico, inquanto sta ad indicare che una massa pesante profonda risale verso Ovest.

Un gruppo di Gr. orientali a Sud-Ovest manifestamente indicano il lato Sud della depressione di Gattatico-S. Secondo.

Alcune isogamme a forma ellittica si chiudono tra l'Enza e il Parma. Con ciò si viene a prolungare, verso Ovest, la linea d'inversione dei Gr. in-

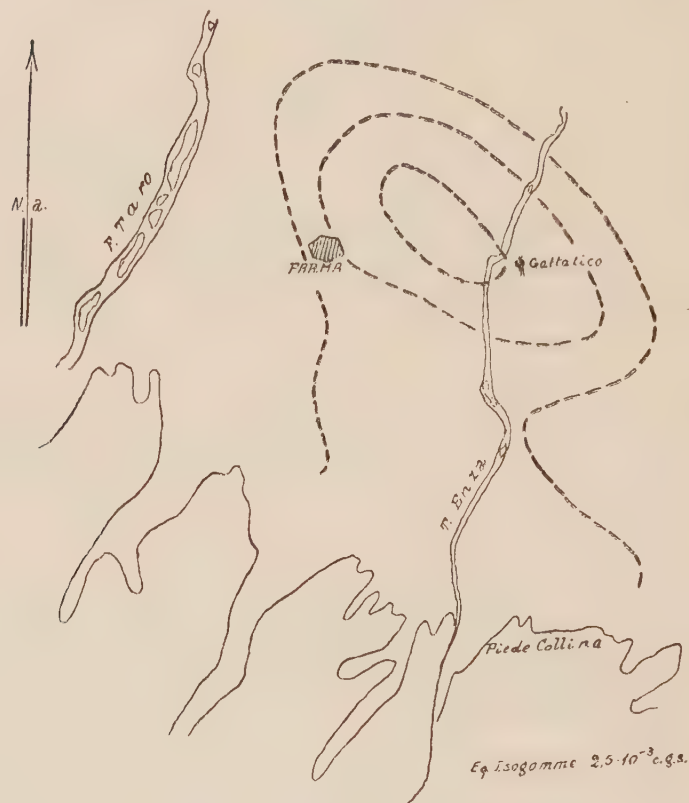


Fig. 1.

dividuata nella zona di Gattatico, da Sud-Est di Gattatico, a Nord di Parma, per uno sviluppo, in linea retta, di circa 20 km.

Questa linea d'inversione rappresenta l'asse di una vera ampia conca subsuperficiale i cui versanti risalgono:

- I. — Dolcemente a Nord e Nord-Est di Gattatico, verso Brescello, con andamento ben visibile dalla figura annessa.
- II. — Ad Est di Gattatico.
- III. — A Sud-Est di Gattatico fino a Campegine-Cadè.
- IV. — A Sud fino a Montecchio (alla destra dell'Enza).
- V. — Ad Ovest verso il Parma e il Taro.

Per il computo delle caratteristiche quantitative basta seguire lo stesso metodo che ho applicato in una mia precedente Nota « Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto », utilizzando ad esempio le isogamme di gravità.

È il noto metodo a reticolo di Hayford rielaborato da Numerov e Jung che presuppone però, per l'applicabilità l'esatta scelta dei punti d'in-

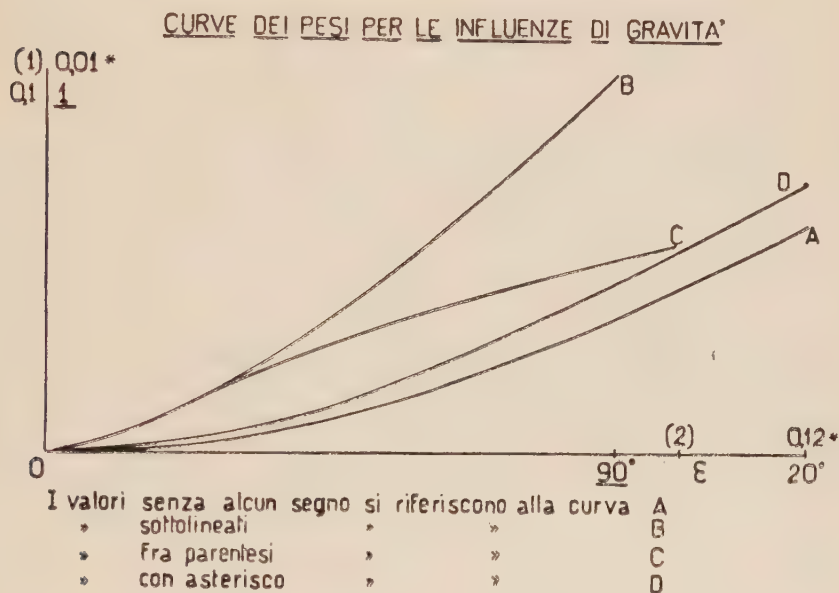


Fig. 2.

fluenza da cui valutare planimetria e angolo o angoli di sito ϵ dell'influenza.

Poichè l'influenza è uguale al peso moltiplicato pel valore numerico è bene costruirsi, una volta per sempre, i profili dei pesi riguardanti la gravità $P(\epsilon)$, la curvatura $K(\epsilon)$, e i Gr. $G(\epsilon)$. Vedi tipo dei profili.

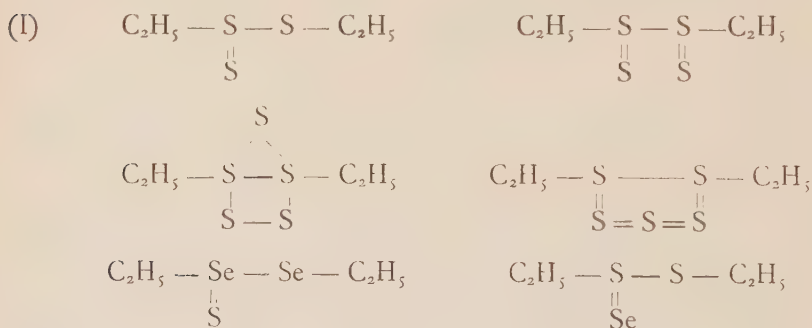
Se si utilizzano le isogamme ricavate dai gradienti orizzontali si ricordi però che l'angolo di sito si riferisce alla struttura influenzante indipendentemente dall'eventuale copertura orizzontale del terreno, e, in tal caso, conviene usare il procedimento Hayford nella forma datogli dallo Haalck.

Chimica. — *Le misure del paracoro applicate allo studio della costituzione dei polisolfuri, poliseleniuri e delle catene miste di zolfo e selenio* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Il problema della costituzione dei polisolfuri, poliseleniuri e delle catene miste di zolfo e selenio con radicali alchilici, di cui ebbi già occasione di occuparmi ⁽³⁾, è in relazione con l'esistenza di cloruri politionici nelle soluzioni di zolfo in cloruro di zolfo studiata precedentemente da altri autori ⁽⁴⁾. Questo studio è risultato notevolmente complicato dalla dimostrata esistenza di due pentasolfuri dietilici isomeri a punto di ebollizione 119° e 130°. Questi pentasolfuri non si sono potuti fino ad ora preparare in altre serie, alchiliche e ariliche, perchè infatti le successive ricerche sui polisolfuri metilici e fenilici ⁽⁵⁾, mi hanno permesso di ottenere al massimo il trisolfuro a causa della notevole instabilità dei composti solforati superiori che si decompongono anche per distillazione nel vuoto separando zolfo.

Anche lo studio delle catene miste di zolfo e selenio che, oltre allo specifico interesse non essendo state precedentemente preparate, avrebbe potuto contribuire alla conoscenza della struttura dei polisolfuri, ha permesso di trarre deduzioni molto incerte dovute alla difficile interpretazione dei risultati delle misure chimico fisiche su di esse eseguite (densità, rifrazione molecolare).

Le formule che vennero date allora le più probabili per i polisolfuri e per le catene miste di zolfo e selenio con radicali alchilici, sono le seguenti:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

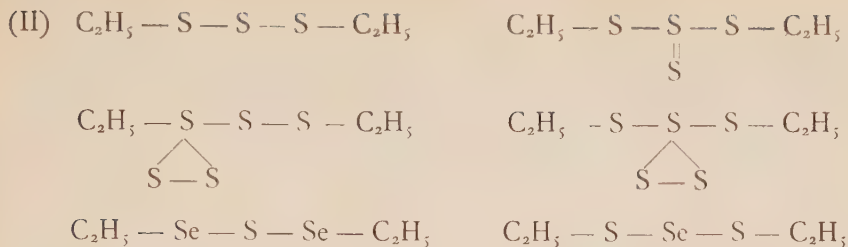
(2) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1931.

(3) LEVI e BARONI. Questi «Rendiconti», IX, 6^a, 772-778; IX, 6^a, 1019-1024.

(4) ARONSTEIN e MEIHZEN, «Proc. K. Ak. wetens», Amsterdam, 1, 1, 1898; ATEN, «Z. phys. Chem.», 81, 257 (1913) e 86, 10 (1913); BRUNI e AMADORI, «Rend. Lincei» 28, 217 (1919) e «Z. anorg. Chem.», 149, 387 (1925); RUFF e GOLLA, «Z. anorg. Chem.», 138, 33 (1924); LOWRY, McHATTON e JONES, «J. Chem. Soc.», 131, 746 (1927); HAMMICK e ZVEGINZOV, «J. chem. Soc.», 133, 1785 (1928).

(5) Questi «Rendiconti», XI, 6^a, 579-582.

oppure



Le misure dell'indice di rifrazione e del peso specifico dei diversi polisolfuri e la successiva determinazione della rifrazione molecolare mediante la formula di Lorentz, mi hanno permesso di osservare solo un notevole incremento nella rifrazione atomica dello zolfo nel passaggio dal disolfuro al trisolfuro. Per il passaggio ai termini successivi, come si vede dalla tabella I, si hanno per la rifrazione atomica dello zolfo valori notevolmente inferiori. Nella tabella non è data la rifrazione molecolare calcolata, ma solo quella trovata: infatti la rifrazione molecolare non si può calcolare per questi composti non essendo nota tutt'ora con esattezza la rifrazione atomica dello zolfo. Questo elemento presenta infatti valori molto diversi a seconda che la sua rifrazione atomica è calcolata da composti organici o inorganici, ed anche nella stessa serie di composti, come in quella dei suoi diversi derivati clorurati, si hanno valori variabili fra 8.63 e 8.81.

Le misure effettuate non mi hanno permesso di trarre nessuna deduzione utile. Infatti per la rifrazione atomica dello zolfo si hanno anche per questi composti valori diversi, ma da essi non si è osservato un netto cambiamento quando la catena eventualmente si ramifica ed un atomo di zolfo passa da bi- a tetravalente.

TABELLA I.

Composto	n_D^{20}	D_4^{20}	R. M. trov.	R. A. trov.
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}$	1.44233	0.83675	28.52	8.01
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_2$	1.50633	0.99267	36.67	8.08
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_3$	1.56473	1.11400	47.48	8.99
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_4$	1.58125	1.12530	55.19	8.46
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (I)	1.59901	1.16226	63.83	8.66
$(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{S}_5$ (II)	1.59149	1.15556	63.48	8.69

Anche per i poliseleniuri e per le catene miste di zolfo e selenio, valgono le stesse considerazioni; faccio però notare che nel caso del selenio gli scarti della rifrazione atomica risultano molto minori che per lo zolfo. Nelle catene miste per poter calcolare la rifrazione atomica dello zolfo, ho introdotto per la rifrazione atomica del selenio il valore 10.9 che si ricava come media da molti suoi composti.

TABELLA II.

Composto	n_D^{20}	D_4^{20}	R. M. trov.	R. A. trov.
$(C_2H_5)_2Se$	1.47680	1.2300	31.63	per il 10.9
$(C_2H_5)_2Se_2$	1.58852	1.6849	43.01	Se 10.8
$(C_2H_5)_2Se_3$	1.60919	1.7693	53.03	10.9
$(C_2H_5)_2SeS_2$	1.57914	1.3981	47.50	per lo 8.0
$(C_2H_5)_2Se_2S$	1.60244	1.6957	49.97	S 8.4

Risultati più precisi ho potuto ottenere applicando a questa serie di sostanze la misura del paracoro introdotto già da molto tempo nel campo chimico da Sugden⁽¹⁾. Il paracoro, che lega la tensione superficiale di una sostanza col suo peso molecolare e con la densità alla stessa temperatura, è espresso dalla relazione:

$$P = \frac{M}{D - d} \gamma^{1/4}$$

nella quale M è il peso molecolare, D e d sono rispettivamente la densità del liquido e del vapore e γ è la tensione superficiale misurata alla stessa temperatura ed espressa in dine/cm.⁽²⁾

La tensione superficiale di questi diversi composti è stata da me misurata col metodo della massima pressione nelle bolle studiato da Sugden⁽³⁾; le densità vennero determinate con un picnometro per liquidi della capacità di circa 1 cc. I risultati ottenuti sono riuniti nella tabella III.

(1) SUGDEN, *The Parachor and Valency*, London, G. Routledge e Sons, 1930.

(2) Un elenco dei principali valori numerici dei paracori eseguiti fino al 1930, si trova nel Supplemento II, p. 172 del «Landolt-Tabellen».

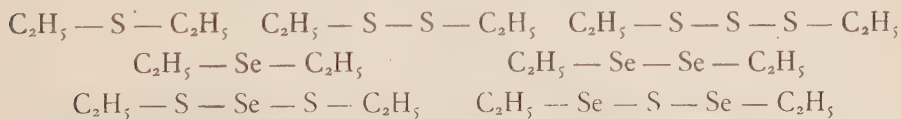
(3) «J. Chem. Soc.», 121, 858 (1922); 125, I, 27 (1924).

TABELLA III.

Composto	t°	D ₄ ²⁰	γ	P trov.	P calc. con la form. (I)	P calc. con la form. (II)
(C ₂ H ₅) ₂ S	20°	0.8367	22.19	239.1	238.4	238.4
(C ₂ H ₅) ₂ S ₂	»	0.9926	23.71	287.6	286.6	286.6
(C ₂ H ₅) ₂ S ₃	»	1.1140	24.22	335.3	334.8	358.0
(C ₂ H ₅) ₂ S ₄	»	1.1253	24.54	406.4	406.0	429.4
(C ₂ H ₅) ₂ S ₅ (I)	»	1.1622	23.89	449.0	447.9	439.7
(C ₂ H ₅) ₂ S ₅ (II)	»	1.1555	23.74	448.7	447.9	439.7
(C ₂ H ₅) ₂ Se	»	1.2300	22.94	256.1	255.4	255.4
(C ₂ H ₅) ₂ Se ₂	»	1.2849	24.63	316.4	315.8	315.8
(C ₂ H ₅) ₂ SeS ₂	»	1.3981	24.25	350.2	349.1	372.3
(C ₂ H ₅) ₂ Se ₂ S	»	1.6957	24.84	364.0	363.4	386.6

Nella tabella non è dato il paracoro per il triseleniuro dietilico che io ho preparato nel 1930, perchè nella preparazione di questo composto i rendimenti sono così piccoli che il prepararne una certa quantità quale è richiesta da queste misure, sarebbe stato troppo penoso. Per esso è verosimile ammettere una struttura identica a quella del trisolfuro. Maggiore interesse avrebbe avuto agli effetti di questo studio, la conoscenza del paracoro del tetraseleniuro, sostanza non ancora conosciuta.

Come si vede da questa tabella la correlazione fra i valori del paracoro trovati e quelli calcolati dalla somma dei paracori atomici dei singoli componenti, per i primi tre termini della serie dei polisolfuri dietilici, per i poliseleniuri e per le catene miste di zolfo e selenio, induce ad ammettere per essi l'esistenza di una struttura del tipo:



cioè l'esistenza di una catena lineare perchè il paracoro calcolato risulta dalla somma dei soli paracori atomici dei singoli componenti.

L'esistenza della catena lineare nel disolfuro è del resto confermata anche dall'azione dei magnesioalchili su di esso ⁽¹⁾. Si verifica infatti la demolizione della molecola con formazione di monosolfuro e di mercaptano. Per il trisolfuro l'esistenza della catena lineare degli atomi di zolfo era

(1) Questi « Rendiconti », XI, 6^a, 905-909.

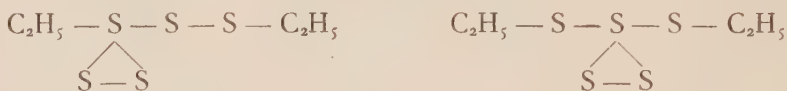
già stata da me prevista⁽¹⁾, avendo potuto ottenere da esso il dietiltrisolfido per azione dell'acido nitrico diluito ed il dietiltrisolfone per azione dell'acido nitrico fumante o del permanganato di potassio o dell'acqua ossigenata, la cui costituzione non si può infatti spiegare che ammettendo una catena normale di atomi di zolfo.

Per il tetrasolfuro in base al valore del paracoro, bisogna invece ammettere che la catena si ramifichi, che cioè un atomo di zolfo si unisca alla catena normale del trisolfuro come è indicato dalla formula:



Infatti il paracoro calcolato risulta dalla somma dei paracori atomici del carbonio, idrogeno e zolfo, con aggiunto il valore 23.2 che compete ad un doppio legame presente nella catena.

I due pentasolfuri presentano valori di paracoro identici che giustificano le formule già da me date a suo tempo, cioè:



ossia l'esistenza di una catena tripla di tre atomi di zolfo, perchè infatti il paracoro molecolare è in entrambi i casi la somma dei paracori atomici degli elementi componenti con aggiunto il valore 16.7 dovuto alla presenza di un anello triplo.

Questi risultati concordano anche con le prove qualitative di riscaldamento dei diversi polisolfuri con acetato neutro di piombo in soluzione acquosa, in base alle quali ho potuto osservare che mentre mono-, bi- e trisolfuro rimangono inalterati, il tetra ed i due pentasolfuri isomeri lasciano separare facilmente zolfo, ciò che riceve ora la conferma nelle formule attribuite a queste sostanze, avendo l'atomo di zolfo ramificato e l'anello di tre atomi di zolfo una instabilità indubbiamente notevole.

Riassumendo:

Viene applicata la misura del paracoro allo studio della costituzione dei polisolfuri, poliseleniuri e catene miste di zolfo e selenio con radicali alchilici. Le misure fanno ritenere plausibile per i composti che contengono tre atomi di zolfo o di selenio, una catena lineare; questa si ramificherebbe per il tetrasolfuro e presenterebbe un anello di tre atomi di zolfo per i due pentasolfuri dietilici isomeri. I risultati concordano sostanzialmente col tipo (III) di formula già da me considerata fra le possibili per questi composti.

(1) Loc. cit.

Chimica. — *Ricerche sugli spinelli.* - IV. *I solfocromiti di manganese e di cadmio* ⁽¹⁾. Nota di L. PASSERINI e M. BACCAREDDA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In alcune Note precedenti ⁽³⁾ sono stati esaminati parecchi spinelli dalle formule generiche: $\overset{\text{II}}{\text{Me}} \overset{\text{III}}{\text{Me}_2} \overset{\text{IV}}{\text{O}_4} = \overset{\text{II}}{\text{MeO}} \cdot \overset{\text{III}}{\text{Me}_2} \overset{\text{IV}}{\text{O}_3}$, e $\overset{\text{II}}{\text{Me}_2} \overset{\text{IV}}{\text{MeO}_4} = 2 \overset{\text{II}}{\text{MeO}} \cdot \overset{\text{IV}}{\text{MeO}_2}$, ed è stato fatto rilevare che la comparsa della struttura tipo spinello, in un composto AB_2X_4 , dipende soprattutto dall'esistenza di particolari rapporti tra le dimensioni degli elementi da cui esso è formato, mentre scarsa influenza hanno la valenza e le proprietà chimiche in genere.

Ricerche analoghe per scopi e metodi sperimentali sono state iniziate, in una recente Nota ⁽⁴⁾, sui composti solforati che posseggono la formula generica: $\overset{\text{II}}{\text{Me}} \overset{\text{III}}{\text{Me}_2} \text{S}_4 = \overset{\text{II}}{\text{MeS}} \cdot \overset{\text{III}}{\text{Me}_2} \text{S}_3$, che differisce da quella degli spinelli propriamente detti, solo perchè al posto dell'ossigeno si trova lo zolfo. Sono state esaminate alcune linneiti di varia provenienza, e il solfocromito di zinco, ZnCr_2S_4 , e si è trovato che questi composti posseggono la struttura degli spinelli.

La non forte differenza che esiste tra i raggi dell'ione S^{--} e dell'ione O^{--} , 1.74 Å e 1.32 Å rispettivamente, secondo Goldschmidt ⁽⁵⁾, rende probabile che, analogamente a quanto si verifica pei corrispondenti composti ossigenati, anche parecchi altri composti solforati dalla formula generica detta, posseggono una struttura reticolare tipo spinello.

Continuando in questa Nota le ricerche sui solfocromiti dei metalli bivalenti, classe di sostanze scarsamente studiata sia dal lato chimico che cristallografico, abbiamo esaminato coi raggi X alcuni solfocromiti col metallo bivalente a diametro più grande di quello dello zinco, anche per tentar di giungere al limite del rapporto, nelle dimensioni atomiche, entro il quale è possibile la struttura tipo spinello.

Così abbiamo esaminato il solfocromito di manganese, MnCr_2S_4 , in cui il catione bivalente ha un raggio di 0.89 Å, e il solfocromito di cadmio, CdCr_2S_4 , in cui il catione bivalente ha un raggio molto superiore, 1.04 Å, ed è risultato, come verrà diffusamente esposto in seguito, che questi composti hanno una struttura tipo spinello.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 27 giugno 1931.

(3) G. NATTA e L. PASSERINI, «Gazz. Chim. Ital.», 59, 280, 1929; questi «Rendiconti», VI, 9, 557, 1929; L. PASSERINI, questi «Rendiconti», VI, 9, 338, 1929; «Gazz. Chim. Ital.», 60, 389, 1930; 60, 957, 1930.

(4) G. NATTA e L. PASSERINI, questi «Rendiconti».

(5) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochem. Verteilungsgesetze der Elem.*, 7, «Norske Vid. Akad. Oslo», 1926.

Solfocromito di manganese — MnCr_2S_4 .

Il solfocromito di manganese è stato preparato da M. Gröger ⁽¹⁾ per fusione, in atmosfera di idrogeno, della miscela dei due idrossidi con zolfo. Abbiamo preparato il composto sia col metodo di Gröger, operando però in corrente di H_2S , che con un metodo analogo a quello seguito da R. Schneider ⁽²⁾ per preparare vari solfocromiti di metalli bivalenti, cioè per ebollizione di una soluzione di MnCl_2 contenente in sospensione $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{S}_4$ e fusione successiva, con eccesso di zolfo e in atmosfera di idrogeno, del prodotto ottenuto.

Il prodotto che si ottiene per trattamento della soluzione del sale manganeso con $\text{Na}_2\text{Cr}_2\text{S}_4$ è stato esaminato pure coi raggi X e dà fotogrammi totalmente diversi da quelli del MnCr_2S_4 . Probabilmente è costituito da un idrato di questo composto. Analogo comportamento ha il solfocromito di cadmio.

Il solfocromito di manganese, ottenuto coi metodi descritti, è una sostanza pulverulenta, di color bruno scuro, insolubile in acqua, solubile in acido nitrico e in acqua regia.

Per accertarci del grado di purezza del prodotto ottenuto, l'abbiamo analizzato, fondendolo prima con carbonato sodico e nitrato potassico, poi, sciolto il prodotto di fusione in acqua, determinando il cromo come Cr_2O_3 e lo zolfo come BaSO_4 . Il manganese è stato ottenuto per differenza.

Nello specchio seguente vengono paragonate le quantità percentuali trovate pei vari componenti, con quelle teoriche.

	Composizione %	
	teorica	trovata
Cr . . .	36.20	31.04
S . . .	44.67	49.65
Mn . . .	19.13	19.31
	100.00	100.00

La quantità di cromo risulta del 5 % inferiore al teorico, quella dello zolfo è invece d'altrettanto superiore, il manganese entra nella quantità teorica.

(1) M. GRÖGER, «Sitzungsber. d. k. k. Akad. Wiss. Wien», 81, II, 531; «Monatshefte f. Chem.», Wien, 1, 248; «Chem. Centralblatt», 261, 1880; «Jahresbericht über Fortschr. d. Chem.», 310, 1880.

(2) R. SCHNEIDER, «J. f. prakt. Chem.», 2, 56, 401; 57, 208, 1898.

Il disvario notato si può spiegare ammettendo che si sia formata una piccola quantità di MnS_2 .

Abbiamo ritenuto il prodotto sufficientemente puro pei nostri scopi di ricerca, e lo abbiamo esaminato coi raggi X, col metodo delle polveri, usando le radiazioni K_α e K_β emesse da un anticatodo di cromo di un tubo Philips.

I dati inerenti al calcolo dei fotogrammi sono raccolti nella tabella I.

TABELLA I.
Solfocromito di manganese. Cr ant.

sen $\theta/2$	d	$h\ k\ l$	a	λ	Intensità	
					osservata	calcolata
0.2036	5.619	1 1 1	9.74	α	d	149
0.3296	3.470	2 2 0	9.81	α	md	144
0.3556	2.927	1 1 3	9.705	β	d	—
0.3880	2.946	1 1 3	9.77	α	f	332
0.4053	2.821	2 2 2	9.77	α	d	298
0.4226	2.465	4 0 0	9.86	β	d	—
0.4630	2.470	4 0 0	9.87	α	mf	795
0.5410	1.925	1 5 1	9.98	β	d	—
		3 3 3			d	—
0.5616	2.036	2 2 4	9.97	α	dd	166
0.5948	1.921	1 5 1	9.97	α	f	209
		3 3 3			f	69
0.6472	1.766	4 4 0	9.98	α	ff	2522
0.6766	1.690	3 5 1	9.94	α	md	312
0.7343	1.557	2 6 0	9.85	α	d	129
0.7489	1.527	5 3 3	10.01	α	d	163
0.7613	1.502	2 2 6	9.96	α	dd	123
0.7889	1.450	4 4 4	10.04	α	md	655
0.8107	1.410	7 1 1	10.06	α	d	130
		5 5 1			d	130
0.8503	1.344	2 4 6	10.05	α	dd	217
0.8753	1.307	5 5 3	10.04	α	m	139
		3 7 1			m	278
0.9111	1.255	8 0 0	10.04	α	m	893

Il composto cristallizza nel sistema cubico. Per il lato della cella elementare troviamo $a = 10.045 \text{ \AA} \pm 0.005$, per il volume della cella $v = 1013.56 \times 10^{-24} \text{ cc.}$, per la densità, calcolata per una cella contenente 8 molecole MnCr_2S_4 , $d = 3.736$.

La densità sperimentale, determinata con un picnometro contenente acqua, risulta $D^{21} = 3.44$.

Le ultime due colonne della tabella portano l'una i dati per l'intensità osservata delle linee che compaiono nei fotogrammi, l'altra quelli delle intensità teoriche, calcolate per una struttura tipo spinello.

Le formule usate per questo calcolo e le coordinate degli atomi sono quelle indicate nei precedenti lavori sugli spinelli.

L'accordo tra le intensità osservate e quelle calcolate appare sufficiente per assegnare al solfocromito di manganese una struttura cristallina tipo spinello.

Solfocromito di cadmio CdCr_2S_4 .

Questo composto è stato ottenuto da M. Gröger⁽¹⁾, col metodo precedentemente indicato per il MnCr_2S_4 . Per prepararlo ci siamo serviti dei metodi prima descritti pel solfocromito di manganese.

Il CdCr_2S_4 così ottenuto si presenta come una sostanza pulverulenta, di color grigio-scuro, insolubile in acqua, solubile in acido nitrico e in acqua regia.

La composizione del prodotto è stata accertata con analisi. Analogamente al precedente composto, il cromo è stato determinato come Cr_2O_3 , lo zolfo come BaSO_4 , il cadmio per differenza. I risultati delle analisi sono raccolti, assieme alle percentuali corrispondenti alla composizione teorica, nello specchio qui annesso:

	Composizione %	
	teorica	trovata
Cr . . .	30.19	32.63
S . . .	37.23	34.09
Cd . . .	32.58	33.28
	100.00	100.00

(1) M. GRÖGER, «Sitzungsber. d. k. k. Akad. Wiss. Wien», 83, II, 757; «Monatshefte f. Chem.», Wien, 2, 274; «Jahresber. über Fortschr. Chem.», 6, 231, 1881.

Il composto è stato esaminato coi raggi X, col metodo delle polveri, usando le radiazioni K_{α} , K_{β} , di un anticatodo di cromo. I dati ottenuti dal calcolo dei fotogrammi sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.
Solfocromito di cadmio. Cr ant.

sen $\theta/2$	d	$h\ k\ l$	a	λ	Intensità	
					osservata	calcolata
0.1979	5.780	1 1 1	10.01	α	d	544
0.3228	3.542	2 0 2	10.02	α	mf	815
0.3434	3.204	1 1 3	10.03	β	d	—
0.3761	3.041	1 1 3	10.08	α	f	697
0.4526	2.528	4 0 0	10.10	α	dd	449
0.5567	2.058	2 2 4	10.08	α	m	663
0.5866	1.952	1 5 1	10.13	α	f	469
		3 3 3				156
0.6394	1.790	4 4 0	10.13	α	ff	3475
0.6648	1.720	3 5 1	10.16	α	d	623
0.7122	1.606	2 6 0	10.15	α	m	514
0.7382	1.550	3 5 3	10.16	α	m	373
0.8410	1.360	2 4 6	10.17	α	f	938
0.8628	1.326	5 5 3	10.18	α	f	634
		1 3 7				317
0.8981	1.274	8 0 0	10.19	α	m	1280
0.9515	1.202	6 6 0	10.19	α	md	191
		2 2 8				283

Il solfocromito di cadmio cristallizza nel sistema cubico. Per il lato della cella elementare troviamo $a = 10.190 \text{ \AA} \pm 0.005$, per il volume della cella $v = 1058.09 \times 10^{-24} \text{ cc.}$, per la densità, calcolata per una cella contenente 8 molecole CdCr_2S_4 , $d = 4.295$.

Il solfocromito di cadmio risulta isomorfo con quello di manganese. Come esso possiede una struttura reticolare tipo spinello, come si può dedurre dal paragone tra le intensità osservate per le linee che compaiono nei fotogrammi e quelle calcolate per una struttura di questo tipo e raccolte nella tabella annessa.

Chimica. — *Solfosali aventi la struttura degli spinelli*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di G. NATTA e L. PASSERINI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Il tipo di struttura reticolare caratteristico dello spinello non è limitato solo a certi composti tra ossidi di metalli bivalenti e trivalenti. L'analisi röntgenografica ha dimostrato che possono presentare pure la struttura degli spinelli certi composti tra ossidi di metalli monovalenti ed esavalenti del tipo $\overset{\text{I}}{\text{Me}}_2\overset{\text{II}}{\text{MeO}}_4$, quale il molibdato di argento⁽³⁾, tra ossidi bivalenti e tetravalenti del tipo $\overset{\text{II}}{\text{Me}}_2\overset{\text{IV}}{\text{MeO}}_4$, quali certi ortostannati⁽⁴⁾ ed ortotitanati⁽⁵⁾. Condizione necessaria e sufficiente perchè si presenti la struttura degli spinelli è che gli ioni positivi A e B, nei composti del tipo AB_2O_4 , posseggano dei raggi i cui rapporti tra di loro e rispetto al raggio dell'ione ossigeno siano compresi entro determinati limiti. Al di fuori di questi limiti e per raggi di B poco maggiori si ha una deformazione del reticolo cubico degli spinelli in quello analogo ma tetragonale del Mn_3O_4 ⁽⁶⁾ e degli indati di cadmio e di calcio⁽⁷⁾, per raggi di B ancor maggiori si hanno simmetrie rombiche. Per raggi invece di A inferiori a detti limiti appare la struttura rombica dell'olivina e del crisoberillo, se anche B è molto piccolo compare la struttura rombica della fenacite Be_2SiO_4 .

Mentre sono stati sinora descritti oltre una trentina di composti tra ossidi (di cui 19 sono stati esaminati dagli autori) che appartengono al tipo di struttura reticolare degli spinelli, scarsi sono gli esempi di composti di questo tipo il cui ione negativo sia diverso dall'ossigeno. Sarebbe da prevedersi, analogamente a quanto avviene per altri tipidi composti ionici, che, anche per quelli del tipo AB_2X_4 , la comparsa di uno piuttosto che di un altro tipo di struttura reticolare dipenda prevalentemente dalle dimensioni geometriche relative degli ioni costituenti e solo in grado minore dalla valenza e dal carattere chimico di essi.

La maggiore polarizzabilità dell'ione solfo rispetto all'ossigeno, non ci permette di affermare a priori che anche per i solfosali del tipo AB_2S_4 debba presentarsi la struttura degli spinelli per quegli stessi rapporti tra i

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1931.

(3) R. W. G. WYCKOFF, « Journ. Am. Chem. Soc. », 44, p. 1994 (1922).

(4) G. NATTA e L. PASSERINI, « Rend. R. Accad. Lincei », IX, p. 557 (1929).

(5) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochem. Verteilungsgesetze d. Elem.*, 7, « Norske Vid. Akad. Oslo » (1926); L. PASSERINI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 957 (1930).

(6) G. AMINOFF, « Zeitschr. f. Krist. », 64, p. 475 (1926).

(7) L. PASSERINI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 754 (1930).

raggi di A e di B e quello dello zolfo, che per i composti tra ossidi definiscono tale tipo di struttura. Questi limiti, dagli spinelli sinora noti, risultano i seguenti:

$$\text{Me: O}^{\text{II}} = 0.58-0.77; \text{Me: O}^{\text{III}} = 0.43-0.51; \text{Me: O}^{\text{IV}} = 0.48-0.56.$$

Per i composti del tipo AB_2S_4 rari sono quelli di cui si conosca la struttura reticolare. È noto che posseggono quella degli spinelli soltanto certi solfosali del nichelio e del cobalto: la linneite Co_3S_4 , la polianite Ni_3S_4 ⁽¹⁾ e la carollite ⁽²⁾.

Nell'iniziare lo studio dei solfosali del tipo AB_2S_4 abbiamo dapprima esaminato diverse linneiti di varie provenienze ed in seguito preparato per via sintetica alcuni solfocromiti di metalli bivalenti. Comunichiamo in questa Nota i risultati dell'esame röntgenografico delle linneiti e del solfocromito di zinco.

In una prossima Nota uno di noi (L. Passerini) riterirà su altri solfocromiti di metalli bivalenti e precisamente su quelli di manganese di cadmio, che analogamente a quello di zinco appartengono alla classe degli spinelli.

Esame della linneite.

Già G. Menzer ⁽³⁾ nel 1926 aveva esaminato della linneite di Müsen e trovato per essa una struttura cubica con un lato della cella elementare $a = 9.398 \pm 0.007 \text{ \AA}$, la struttura degli spinelli con un parametro $u = 0.375 \pm 0.015$. Successivamente W. F. de Jong ⁽⁴⁾ ha esaminato una linneite di Littfeld trovando una cella di 9.36 \AA ed un'altra di Müsen trovando una cella di $9.42 \pm 0.01 \text{ \AA}$, ed in ottimo accordo tra intensità calcolate e sperimentali per la struttura degli spinelli ed un parametro eguale a $3/8$.

Noi abbiamo riesaminato, allo scopo di confrontare i fotogrammi della linneite con quelli di altri solfosali per esaminarne l'isomorfismo, diverse linneiti e precisamente due campioni della miniera Heinrichsseen presso Littfeld (Westfalia) uno della miniera Vittoria pure presso Littfeld ed un altro di Schwabengrube presso Müsen. Per tutti quattro i campioni abbiamo trovato costanti identiche e precisamente di $9.41 \pm 0.01 \text{ \AA}$.

Nella unita tabella sono raccolti i risultati del calcolo di un fotogramma di una linneite di Heinrichsseen, che riteniamo interessante riportare data la composizione di questo minerale.

(1) G. MENZER, « Zeitschr. f. Krist. », 64, p. 506 (1926), « Centralbl. f. Min. », p. 367 (1926); W. F. DE JONG, « Zeitschr. f. anorg. Chemie », 161, p. 311 (1927).

(2) W. F. DE JONG e A. HOGG, « Zeitschr. f. Krist. », 66, p. 169 (1927).

(3) G. MENZER, loc. cit.

(4) W. F. DE JONG, « Zeitschr. f. anorg. Chemie », 161, p. 311 (1927).

TABELLA I.

Linneite - Anticatodo di ferro.

sen $\theta/2$	d	$h\ k\ l$	a	K	Intensità	
					osservata	calcolata
0.2937	3.291	2 0 2	9.30	α	m	169
0.3145	2.788	1 1 3	9.25	β	d	—
0.3447	2.802	1 1 3	9.30	α	f	412
0.3786	2.317	4 0 0	9.26	β	md	—
0.4159	2.327	4 0 0	9.31	α	f	868
0.4885	1.795	3 3 3 1 5 1	9.33	β	d	—
0.5075	1.905	2 2 4	9.33	α	md	195
0.5373	1.800	3 3 3 1 5 1	9.35	β	f	88 230
0.5854	1.653	4 4 0	9.35	α	ff	2425
0.6098	1.586	3 5 1	9.37	α	d	238
0.6516	1.484	2 6 0	9.38	α	d	157
0.6744	1.434	3 5 3	9.39	α	md	208
0.7122	1.356	4 4 4	9.40	α	f	668
0.7353	1.317	5 5 1 1 7 1	9.40	α	d	99
0.7706	1.255	2 4 6	9.39	α	m	253
0.7898	1.224	3 5 5 1 3 7	9.40	α	f	178 356
0.8081	1.085	5 5 5 7 5 1	9.39	β	dd	—
0.8241	1.174	8 0 0	9.40	α	m	1010
0.8732	1.107	6 6 0 2 2 8	9.40	α	md	56.5 113
0.8896	1.087	5 5 5 7 5 1	9.41	α	f	53 315
0.9188	1.052	4 8 0	9.41	α	ff	1548

Nell'analisi quantitativa si è determinato il rame come solfuro, il ferro come ossido, la somma del nichelio più cobalto come metalli, il nichelio come sale della dimetilgliossina, il cobalto per differenza dei due ultimi valori.

Sono espressi nella seguente tabellina i risultati analitici espressi in percentuali in peso ed in percentuali molecolari e raffrontate alle percentuali teoriche per una formula di costituzione del tipo $(\text{Ni}^{\text{II}}, \text{Cu})^{\text{II}} (\text{Ni}^{\text{III}}, \text{Co}, \cdot\text{Fe})_2\text{S}_4$. Il cobalto ed il ferro sono stati considerati come trivalenti, il nichelio parte come bivalente, parte come trivalente.

TABELLA II.

Linneite di Littfeld.

Elementi	% in peso	% atomiche	% atomiche teoriche
Cu	2.57	1.78	
Ni	28.94	12.44	
		$\Sigma = 14.22$	14.29
Ni		8.84	
Co	19.46	14.08	
Fe	7.13	5.50	
		$\Sigma = 28.42$	28.57
S	41.90	57.20	57.14

Il minerale non risulta una vera linneite ma una soluzione solida di composizione intermedia a quella della linneite propriamente detta (Co_3S_4) e della polianite (Ni_3S_4), in cui parte del nichelio e del cobalto sono sostituiti in modo isomorfo dal rame e dal ferro.

Dal calcolo del fotogramma delle polveri assumiamo per la costante a quel valore (9.41 \AA) che risulta dai valori medi calcolati per a , come limite per angoli θ tendenti a 180° , non essendosi introdotta nella tabella una correzione nei valori sperimentali di θ per l'opacità e per il diametro del preparato. Il volume della cella elementare risulta così $833.2 \cdot 10^{-24} \text{ cc}$. La densità, ammettendo che la cella elementare contenga 8 molecole Co_3S_4 , risulterebbe 4.87, valore vicino a quelli sperimentali.

L'accordo tra intensità osservata e quella calcolata per la struttura degli spinelli, corrispondente al gruppo spaziale O_h^7 , e per un valore del para-

metro $u = 3/8$, risulta soddisfacente, come si può osservare dalla seconda e dall'ultima colonna della tabella I.

Vengono così confermati, per quanto riguarda la struttura della linneite, i risultati ottenuti da Menzer e da de Jong.

Esame del solfocromito di zinco.

Il solfocromito di zinco è stato preparato col metodo di Gröger⁽¹⁾ e di Schneider⁽²⁾ per reazione tra il solfocromito di sodio ed una soluzione di cloruro di zinco. Siccome il prodotto ottenuto per precipitazione non è sufficientemente cristallino, si è calcinato in crogiolo chiuso il solfocromito di zinco precipitato, mescolato con zolfo per evitare l'ossidazione.

Il prodotto così ottenuto ha fornito, nell'esame coi raggi col metodo delle polveri e con anticatodo di cromo, un fotogramma, analogo a quello della linneite.

Nella tabella III sono raccolti i risultati del calcolo del fotogramma. Risulta come limite dei valori medi di a per θ tendenti a 180° un lato della cella elementare cubica di $9.92 \pm 0.02 \text{ \AA}$.

TABELLA III.

Solfocromito di zinco - Anticatódo di cromo.

sen $\theta/2$	d	$h \ k \ l$	a	K	Intensità	
					osservata	calcolata
0.2050	5.580	1 1 1	9.65	α	dd	180
0.3338	3.426	2 0 2	9.69	α	d	218
0.3551	2.932	1 3 1	9.71	β	d	—
0.3891	2.940	1 3 1	9.75	α	f	389
0.4067	2.813	2 2 2	9.745	α	d	—
0.4679	2.444	4 0 0	9.775	α	mf	710
0.5505	1.893	1 5 1	9.83	β	d	—
		3 3 3				—
0.5707	2.003	2 2 4	9.80	α	f	252
0.6029	1.897	1 5 1	9.845	α	f	248
		3 3 3				83

(1) M. GRÖGER, « Wiener Monatsh. », 2, p. 266 (1881), « Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 83, p. 748 (1881); « Abegg's Handbuch der anorganischen Chemie », IV. Bd., I. Abt., 2. H., p. 129, Lipsia (1921).

(2) R. SCHNEIDER, « Journ. prakt. Chem. », (2), 56, p. 401 (1897); 57, p. 208 (1889).

Segue: TABELLA III.

sen $\theta/2$	d	$h \ k \ l$	a	K	Intensità	
					osservata	calcolata
0.6573	1.741	4 4 0	9.85	α	ff	2740
0.7349	1.557	2 6 0	9.85	α	d	195
0.7566	1.511	3 3 5	9.91	α	d	198
0.8017	1.427	4 4 4	9.89	α	md	545
0.8651	1.322	2 4 6	9.90	α	md	332
0.8862	1.291	1 3 7	9.92	α	m	336
		3 5 5				168
0.9225	1.240	8 0 0	9.92	α	md	970

L'analisi del solfocromito di zinco ha fornito i seguenti risultati:

Cr = 38.14 % (teorico per ZnCr_2O_4 = 35.69 %),

S = 42.31 % (teorico = 44.05 %)

Zn per differenza: 19.55 (teorico 20.26 %).

Essendo il volume della cella elementare di $976 \cdot 10^{-24}$ cc., la densità calcolata, ammettendo che la cella contenga 8 molecole ZnCr_2S_4 , risulta 4.05. Tale valore è solo leggermente superiore a quello sperimentale. L'accordo tra intensità sperimentale e quella calcolata per le singole riflessioni, per le stesse ipotesi di struttura (gruppo spaziale O_h^7 , $u = 3/8$ ammesse per la linneite) è soddisfacente e permette di affermare l'isomorfismo tra la linneite, Co_3S_4 , ed il solfocromito di zinco. La leggera divergenza tra intensità calcolata e sperimentale per qualche linea può forse attribuirsi ad un parametro dello zolfo un poco diverso da quello ammesso, ma l'accordo è nel complesso soddisfacentemente buono.

Risulta così che il solfocromito di zinco appartiene strutturalmente alla classe degli spinelli ed è prevedibile, dato il piccolo raggio ionico dello zinco, che altri solfocromiti di metalli bivalenti, a raggio ionico leggermente superiore a quello dello zinco, posseggano la stessa struttura reticolare. Per analogia con gli spinelli ordinari si dovrebbe anzi prevedere, dato il maggior raggio ionico dello zolfo rispetto a quello dell'ossigeno, che tutti i solfocromiti di metalli bivalenti a raggio ionico compreso tra quello dello zinco (0.80 Å) e quello del calcio (1.08 Å) appartengano cristallograficamente allo stesso gruppo isomorfo.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti)*⁽¹⁾. Nota VI⁽²⁾ di GIULIO COTRONEI e CELSO GUARESCHI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Nella Nota V⁽³⁾, presentata lo scorso anno, abbiamo comunicato i primi risultati ottenuti eseguendo trapianti omoplastici, eteroplastici e xenopla-

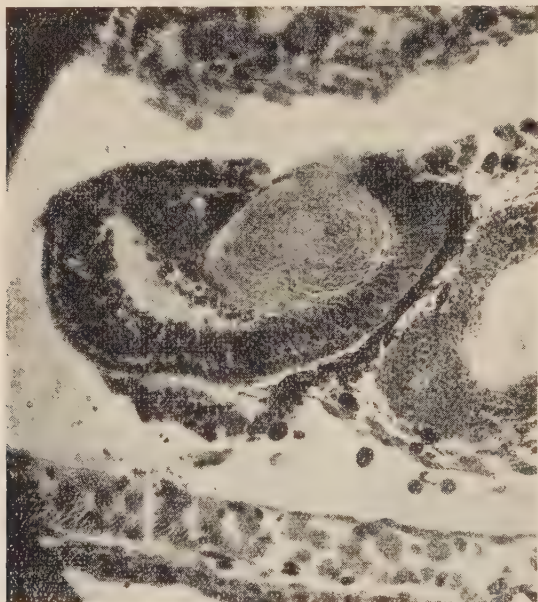


Fig. 1. — La microfotografia rappresenta un occhio di *Bufo vulgaris* sviluppatosi e differenziatosi in una larva di *Axolotl*.
Obb. 8 Koristka.

stici (tra Anfibi Anuri ed Anfibi Urodeli), operando con abbozzi embrionali trapiantati in larve differenziate e che assumevano nutrimento. Esperienze di tale tipo sono state eseguite anche quest'anno, e con questa Nota vogliamo dare un breve cenno dei nuovi risultati conseguiti.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1931.

(3) Questi «Rendiconti», vol. XII, Serie 6^a, II sem., fascicolo 3-4, 1930.

I) Esperienze di trapianto di abbozzi embrionali di Anuri
su larve di Urodeli (*Bufo vulgaris* su *Axolotl*).

Abbiamo ottenuto il differenziamento della vescicola ottica (in un occhio mancante del vitreo, con un cristallino assai cospicuo) (fig. 1), dell'organo olfattorio e di parte dell'encefalo. In esemplari fissati in tempi più lontani dalla data di operazione abbiamo notato la distruzione degli abbozzi trapiantati, cosa che dimostra come i pezzi embrionali trapiantati negli organismi

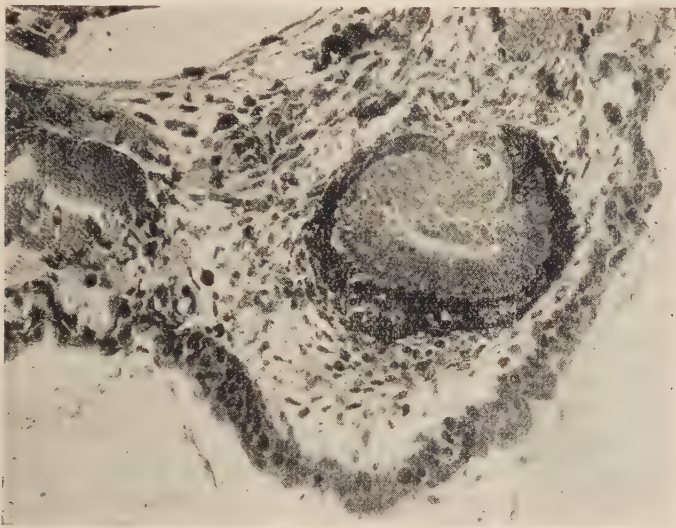


Fig. 2. — La microfotografia rappresenta un occhio di *Rana esculenta* sviluppatosi e differenziatosi in una larva in metamorfosi di *Triton taeniatus*.

differenziati vadano rapidamente in distruzione quando si stabiliscono quelle condizioni che sono state messe in luce dalle ricerche di Cotronei e Spirito ⁽¹⁾.

Questi risultati confermano ed estendono quelli annunziati lo scorso anno sul differenziamento della vescicola ottica di *Rana esculenta*, trapiantata in larve di *Triton taeniatus* (fig. 2). Aggiungiamo inoltre che in quest'ultimo caso il differenziamento è possibile anche se la larva dell'Urodelo è in metamorfosi.

II) Esperienze di trapianto di abbozzi embrionali di Urodeli su girini di Anuri.

Nessun caso di vera differenziazione tipica ottenemmo lo scorso anno, chè anzi le esperienze ci fecero mettere in evidenza un fenomeno di blocco

(1) G. COTRONEI e A. SPIRITO. Questi «Rendiconti», 1929 e 1930.

del vitello (vogliamo intendere con questa espressione un'azione inibitrice dei fenomeni che conducono al riassorbimento delle sferule vitelline) contenuto negli abbozzi embrionali di *Triton cristatus* trapiantati su girini che già si nutrivano di *Hyla arborea*. Abbiamo ripetuto quest'anno esperienze di questo tipo, perchè esse si ricollegano a questioni molto interessanti che riguardano le così dette « differenziazioni atipiche » ottenute da molti Autori nei trapianti di abbozzi embrionali su organismi differenziati. A tale scopo abbiamo seguito il comportamento degli abbozzi embrionali della vescicola ottica, della corda dorsale, dell'encefalo, di cartilagine, ecc. di *Triton cristatus*, trapiantati su girini di *Hyla arborea*, di *Bufo vulgaris* e di *Rana esculenta*, ed abbiamo anche impostato nuove esperienze intese ad indagare il comportamento degli abbozzi embrionali di *Axolotl* trapiantati su girini di *Bufo vulgaris*.

Le nostre osservazioni ci consentono di dire che i risultati delle operazioni di embrioni di Urodeli su girini di Anuri, almeno negli stadi da noi usati, sono di gran lunga inferiori a quelli ottenuti nelle operazioni inverse di abbozzi embrionali di Anuri su larve che già si nutrivano di Urodeli.

L'importanza del differente ospite risulta, nelle nostre esperienze, quando si è operato con *Triton cristatus* sia sulla *Rana esculenta*, che sul *Bufo vulgaris* e sull'*Hyla arborea*. In questi ultimi due casi già dall'anno scorso abbiamo accennato a fenomeni di blocco del vitello, cui segue la distruzione degli impiantati; sulla *Rana* invece questo fenomeno di blocco non si è presentato, o forse non ha quell'imponenza con cui si presenta nei casi precedenti. Anche nelle esperienze di trapianto degli abbozzi embrionali di *Triton cristatus* su girini di *Rana esculenta* gli abbozzi trapiantati vanno in distruzione; essi presentano però, e ciò sembra di notevole importanza, una resistenza maggiore che se fossero trapiantati su embrioni della medesima *Rana*: notiamo cioè una resistenza maggiore quando l'ospite non presenta più il suo vitello. Da notare anche che gli abbozzi di *Triton cristatus* presentano una resistenza maggiore se trapiantati nei girini di *Rana esculenta* che non se trapiantati in quelli di *Bufo vulgaris*, dove solo la corda dorsale ha resistito fino all'ottavo giorno dal trapianto (esperienze eseguite alla fine di marzo e al principio di aprile).

Le esperienze sul *Bufo vulgaris* ci hanno permesso di saggiare l'importanza dell'ospite quando si vari il datore (*Axolotl* e *Triton cristatus*). Anche qui troviamo notevoli differenze: mancanza di blocco, o almeno blocco molto meno imponente operando con embrioni di *Axolotl* su larve di *Bufo*. In quest'ultimo caso si nota una resistenza molto notevole, e, forse, si può anche parlare di differenziazioni atipiche, per quanto rimanga da chiarire cosa si voglia intendere precisamente con questa espressione.

Un altro problema che abbiamo affrontato quest'anno di proposito è quello di verificare la natura di quel comportamento di antagonismo o no del metabolismo vitellino, che è l'idea centrale di chi (Cotronei) guida tutto il gruppo di ricerche che si stanno eseguendo nel nostro Istituto, antago-

nismo o meno che può spiegare il diverso comportamento dei trapianti di abbozzi embrionali di un medesimo Urodelo su i diversi Anuri (*Rana esculenta*, *Hyla arborea*, *Bufo vulgaris*) (Cotronei e Spirito)⁽¹⁾.

Nell'*Hyla* abbiamo anche sperimentato il comportamento differenziale dello stesso abbozzo di organo di Urodelo in vari stadi di sviluppo (vescicola ottica primaria, vescicola ottica secondaria giovane, vescicola ottica secondaria più avanzata). Nei primi due stadi, che contengono ancora gran quantità di tuorlo, non abbiamo notato differenza: ci si presenta il caratteristico fenomeno del blocco; nel terzo di tali stadi, in cui il vitello era ormai del tutto, o quasi, consumato abbiamo notato invece una molto maggiore resistenza dei tessuti ai processi distruttivi: si può anche, forse, parlare di una certa attività di sviluppo, come possiamo arguire dal comportamento della cartilagine che circonda la corda dorsale. Anche l'occhio, per quanto già, insieme con l'encefalo, nelle osservazioni finora compiute, in preda a processi distruttivi, lascia pensare che abbia potuto proseguire un po' nel suo sviluppo. Queste ricerche sugli stadi degli abbozzi debbono essere più estesamente ripetute, perchè è da sperare che potranno spiegare molti dei dati contraddittori che si incontrano nella letteratura dell'argomento (Weber, Dürken, Holtfreter, ecc.)⁽²⁾. Naturalmente insieme con lo stadio dell'abbozzo va considerata la fase di metabolismo vitellino degli abbozzi trapiantati colla suscettibilità maggiore o minore che essi presentano.

Fenomeni di blocco si possono presentare anche nei trapianti eteroplastici di embrioni di Anuri su girini di altri Anuri (*Hyla arborea* su *Bufo vulgaris*; *Rana esculenta* su *Bufo vulgaris*) la descrizione dei quali, per ragioni di spazio, siamo costretti a rimandare ad una prossima Nota.

Le esperienze ora esposte, suffragate da quelle che descriveremo nella Nota successiva sui trapianti eteroplastici, conducono a ritenere che nel metabolismo vitellino agiscano delle sostanze attivanti (enzimi, forse trefoni) che permettono i processi di elaborazione e di utilizzazione del vitello. Nei processi di incompatibilità di abbozzi embrionali di *Triton* su embrioni di *Rana* queste sostanze attivanti del metabolismo sono incompatibili con il tuorlo del donatore, cosa che non si verifica nella vescicola ottica di *Triton* trapiantata nell'embrione di *Hyla*, e nei casi di trapianto di vescicola ottica di *Anuri* su embrioni di *Urodeli*. Naturalmente nel quadro di questi fenomeni che riguardano le nutrizioni embrionali, vanno associati i fenomeni delle ossidazioni organiche connesse a questi processi metabolici. Nei fenomeni di blocco descritti in questa Nota, in cui il vitello rimane inalterato o quasi per molto tempo, si può pensare che le sostanze attivanti il metabolismo del tuorlo

(1) G. COTRONEI e A. SPIRITO. Questi « Rendiconti », vol. XI, Serie 6^a, I sem., fascicolo 9, 1930.

(2) WEBER, « C. R. Soc. Biol. », 1921, 1922, 1923, 1925; DÜRKEN, « Arch. f. Entw. Mech. », V, 107-1926; HOLTFRETER, « Arch. f. Entw. Mech. », V, 117-1929.

vengano inibite dalle condizioni umorali dei tessuti ormai differenziati dell'ospite, come dimostra il complesso delle nostre esperienze. Può anche avvenire (*Axolotl* su *Bufo vulgaris*) che senza il fenomeno del blocco si abbia la distruzione dell'impiantato in un secondo tempo. In questi ultimi fenomeni può darsi rientri il quadro delle differenziazioni atipiche.

Tutta una serie di altre ricerche compiute nel nostro Istituto da vari studiosi (Spirito, Perri, Marcucci, ecc.) concorrono alla verifica di queste idee.

Biologia. — *Enzimi ed immunità* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. GHIRON, presentata dal Corrisp. A. DIONISI.

Dalle ricerche del prof. Bottazzi e della sua scuola ⁽³⁾ è già da tempo stato dimostrato, contrariamente alle concezioni classiche, come i grassi alimentari, almeno in parte, giungano nella circolazione solo attraverso le vie linfatiche e il dotto toracico, ma vengono portati al fegato dalla vena porta. Il contenuto percentuale di grasso della vena porta è superiore a quello della vena giugulare.

Questi grassi, nel lume intestinale, per i fermenti lipolitici del pancreas sono stati emulsionati e così assorbiti, ma verosimilmente nel fegato subiscono quelle ulteriori trasformazioni necessarie a renderli atti alla nutrizione dei tessuti.

Nel fegato sono stati messi in evidenza ed estratti dagli studiosi di chimica pura, quali il Willstätter, fermenti analoghi ai lipolitici del pancreas, ma da questi differenti perchè la loro sfera d'azione si esercita su grassi più completi della vita animale, che vanno dai butirrati agli acidi grassi componenti le cere. È verosimile inoltre che tali fermenti del fegato esplicino un'azione di primo ordine sul ricambio generale dei grassi, agiscano cioè, oltrechè nel fegato ove vengono prodotti, a distanza.

Da queste premesse ne risulta la logica conseguenza che tali fermenti possono avere una importanza notevole anche in condizioni patologiche, e che la loro azione si svolge anche se nell'organismo vengono a trovarsi grassi estranei al grasso alimentare, quali sono quelli che formano l'involucro del bacillo tubercolare, a cui si è rivolta speciale attenzione.

Da me è stata fatta oggetto di numerose ricerche l'azione che possono esercitare gli enzimi sull'involucro del bacillo. È convinzione generale che la membrana di sostanze grasse e cerosi che avvolge il bacillo può essere intaccata da enzimi lipolitici. Se l'involucro ceroso può venire disciolto il

(1) Le ricerche anatomiche furono compiute sotto la direzione del prof. Dionisi.

(2) Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1931.

(3) D'ERRICO, « Archivio di Fisiologia », 1907.

bacillo tubercolare può paragonarsi a molti altri germi che l'organismo con le sue energie già note può aggredire e distruggere (anticorpi, fermenti proteolitici, ecc.).

Dallo studio di questo potere enzimatico risulta un secondo vantaggio: la possibilità di idrolizzare il contenuto dei tubercoli, facilitandone l'assorbimento (enzimi lipolitici del fegato + enzimi proteolitici).

Con questi problemi così precisi ho cominciato ad isolare dal fegato di maiale questo speciale enzima, di cui ho determinato in primo luogo il potere di scissione del butirrato di metile. La tecnica di estrazione è la seguente:

Il fegato tolto dall'animale appena sacrificato viene sgrassato con acetone ed etere e messo in glicerina all'87 %.

Risulta che tale facoltà idrolizzante dell'enzima epatico varia secondo la specie animale, essendo massima nel maiale, minore nel cane e minima nel vitello e nel cavallo. In queste determinazioni si osservano in secondo luogo oscillazioni del potere enzimatico fra individuo e individuo della stessa specie.

Le determinazioni vengono eseguite con l'enzima sospeso in glicerina e con la bromocresolo-purpura come indicatore.

Ho continuato questi studi, passando dal campo puramente chimico a quello biologico ed ho dovuto nella preparazione usare quelle cautele e quegli accorgimenti, non sempre facili, per giungere ad un prodotto completamente atossico e sterile.

Ottenuto così un'enzima chimicamente attivo, atossico, sterile, sospeso in glicerina, ho ricercato quale ne fosse l'azione nelle colture di bacillo tubercolare in brodo glicerinato.

Ho osservato costantemente che la patina di sviluppo è molto sottile rispetto al controllo. Per assicurarmi che tale ritardo dello sviluppo della coltura fosse dovuto all'enzima e non a prodotti secondari che la glicerina avesse asportato dal fegato, cioè sostanze dannose alla vita del bacillo, ho eseguito controlli con la glicerina contenente l'enzima distrutto dalla sterilizzazione in autoclave.

Procedendo nelle mie indagini ho iniettato queste brodocolture sviluppatesi in presenza di enzima, dell'età di 20 giorni, in vari lotti di cavie ed in quantità scalari di brodocolture (iniettata sottocute all'inguine). Il risultato ottenuto era un ingrossamento dopo circa 20 giorni delle ghiandole inguinali bilaterali, ingrossamento che era notevole e che poteva raggiungere il rammollimento caseoso se la dose corrispondeva a 1-2 cmc. ma che conduceva costantemente, nello spazio di un secondo mese, alla riduzione degli ingorghi ghiandolari, alla scomparsa di essi nel termine di due mesi e alla sopravvivenza delle cavie, rispetto ai controlli, morti fra 20 giorni e due mesi.

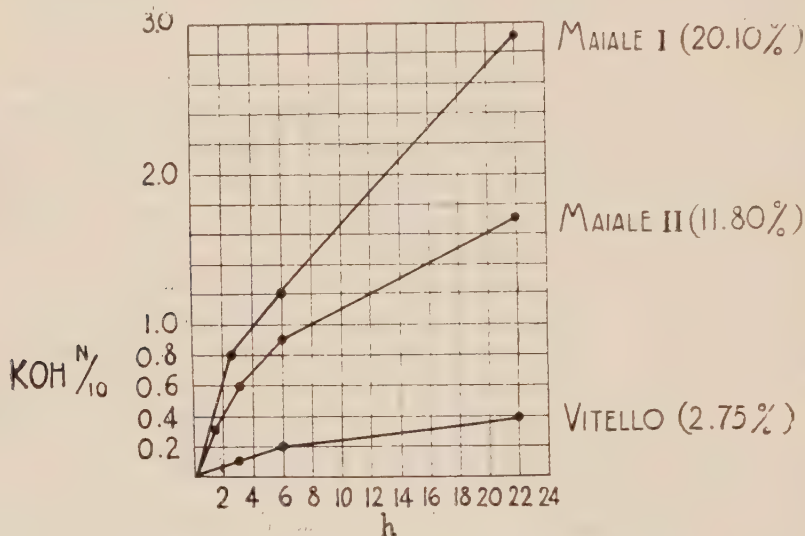
Successivamente ho inoculato in altri lotti di cavie culture di tubercolosi umana virulenta e quindi per quindici giorni la sospensione di enzima

in glicerina in quantità di 0.5, 1.0 cmc. I controlli morivano costantemente nello spazio fra 20 giorni e due mesi. Le cavia trattate con emulsione di enzima sono tutte sopravvissute e hanno ormai dieci mesi di sopravvivenza.

Questi esperimenti pongono in luce questi due concetti:

1° La cultura in terreno contenente enzima è così attenuata da non procurare la morte e se le cavia così vaccinate vengono inoculate con cultura virulenta, sopravvivono a questa seconda infezione;

2° Le cavia trattate con cultura virulenta, capace di condurle alla morte, riescono a difendersi dall'infezione per azione dell'enzima che è stato sistematicamente introdotto nel loro organismo.



Sorge ora naturale il problema di ricercare e di rendersi conto delle differenti alterazioni istologiche tra animali tubercolari e quelli trattati con virus + enzima (virus attenuato) e quegli animali trattati con enzima durante lo svolgersi dell'infezione tubercolare. Tali ricerche furono compiute nell'Istituto di Anatomia Patologica diretto da S. E. il prof. Dionisi, che assisteva alle esperienze e prese cognizione diretta di ogni risultato ottenuto nell'esperienza e nelle indagini microscopiche. Le esperienze per il controllo istologico del lavoro hanno avuto la durata di tre mesi.

Mentre l'autopsia degli animali di controllo ha presentato una diffusione miliaria dopo 20 giorni, disseminata a tutti gli organi e sierose, con degenerazione grassa del fegato, con formazioni caratteristiche del tubercolo, l'autopsia degli animali trattati con enzima ha dimostrato, dopo 20 giorni, la presenza di scarsi noduli tubercolari e dopo tre mesi l'assenza di qualsiasi formazione tubercolare microscopicamente dimostrabile.

Del massimo interesse sono le alterazioni istologiche osservate dopo un mese di trattamento; p. es., le ghiandole linfatiche presentano una no-

tevole ipertrofia degli elementi del reticolo, i quali appaiono ingrossati come nelle linfo-adeniti croniche. Sono specialmente le cellule dei seni che presentano tali modificazioni.

I follicoli sono variamente ingrossati e presentano talora la porzione centrale ben distinta dalla periferica.

Venti giorni dopo l'iniezione di cultura virulenta, le cavie trattate con esterasi presentano nei polmoni focolai di broncopolmonite sotto la pleura, caratterizzati dalla formazione di aree triangolari con la base verso la pleura e l'apice verso l'ilo del polmone, dove si rinviene lesione dei bronchi con ricco contenuto di essudato che predomina negli alveoli. L'essudato è rappresentato da elementi leucocitari che infiltrano la parete alveolare e si rinvencono anche nel lume di esso, occupando acini e lobuli. Non si nota alcuna particolarità negli elementi cellulari che facciano pensare a processo specifico tubercolare.

Questi sono i punti salienti degli esami istologici finora presentati, da cui risulta che il processo tubercolare negli animali trattati con germi virulenti e lasciati a sè, percorre tutte le fasi della flogosi tubercolare (cellule giganti, caseosi, ecc.) mentre negli animali inoculati con lo stesso stipite di bacilli tubercolari umani e trattati metodicamente con l'enzima, si osservano alterazioni che si arrestano alle prime fasi della flogosi e guariscono.

Altro fatto istologico degno di nota è la differenza profonda fra il fegato degli animali non trattati e quello di animali trattati con enzima. I primi presentano la degenerazione grassa delle cellule epatiche con tipiche formazioni nodulari costituite da cellule epitelioidi e da cellule giganti, focolai multipli di necrosi, infiltrati epitelioidi negli spazi di Kiernan.

Nei secondi animali, trattati, i lobuli sono bene evidenti, le cellule epatiche sono ben conservate ed a forte ingrandimento presentano una infiltrazione degli spazi di Kiernan di lievissimo conto, che non ha rapporto con malattie infiammatorie dell'apparato biliare. Mancano alterazioni dell'endotelio.

L'attento esame di questi fatti porta al concetto che negli animali trattati non si osserva alcuna caratteristica del processo tubercolare, ma che questo si è trasformato in un cronico processo infiammatorio, quale si può osservare per azione di un germe qualsiasi di modica virulenza, processo che l'organismo animale è capace di combattere e di condurre a guarigione.

A questo punto delle esperienze sorgono altri due problemi i quali potranno condurre ad una più completa spiegazione dei fenomeni morbosi e dei meccanismi di difesa.

1° Le trasformazioni morfologiche e l'attenuazione che il germe ha subito nello sviluppo nel terreno con enzima, fa sorgere il quesito che il bacillo si sia trasformato: si ritiene intanto necessario ripetere gli esperimenti anche col filtrato per candela.

2° Gli infiltrati leucocitari e le speciali alterazioni linfadeniche osservate nelle cavie trattate con l'enzima fanno sorgere l'ipotesi che esse

siano determinate da una speciale trasformazione del virus tubercolare e quindi la necessità di inoculare alla cavia normale la pappa di questi organi ridotti a poltiglia sterile.

Queste serie di esperimenti che sono in corso possono avere interesse per la somiglianza che i preparativi istologici di queste ghiandole hanno coi preparati istologici di biopsie che si vanno continuamente eseguendo in Clinica e di cui l'attento esame microscopico lascia l'istologo anche il più provetto nel dubbio se tali alterazioni ghiandolari siano o meno di natura tubercolare.

In molti casi il dubbio viene risolto dalla prova biologica.

*
* *

Dalle esperienze esposte è lecito trarre le seguenti conclusioni:

1° L'enzima nelle culture dà luogo alla produzione di un ceppo di bacilli tubercolari attenuati;

2° L'enzima inoculato sistematicamente durante lo svolgersi del processo tubercolare determina un arresto di esso alla prima fase del processo infiammatorio (fase essudativa), la quale può essere seguita dalla guarigione senza ulteriore progresso delle lesioni.

Biologia. — *Azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da circuito aperto oscillante di rame e di zinco, funzionanti in prossimità di radio-oscillatore per onde ultracorte.* Nota⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Abbiamo esposto in altre tre Note⁽²⁾ del 1930 l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte ($\lambda = 2-3$ m.) emesse dal nostro Radio Oscillatore, sullo sviluppo dei bachi da seta.

In questa Nota vogliamo riferire dei risultati ottenuti facendo crescere i bachi da seta, sotto l'influenza di anelli metallici aperti e isolati.

Gli anelli erano formati da una spira unica aperta di rame e di zinco del diametro di 30 cm., spessore 4 mm.

Si fecero tre lotti di 200 bachi ciascuno, di cui uno fu tenuto come confronto, uno suddiviso in sottogruppi di 25 bachi ciascuno, posti in scatole di cartone, munite di circuito oscillante di rame isolato su ebanite, e l'ultimo gruppo suddiviso pure in modo analogo e munito di circuito oscillante di zinco.

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1931.

(2) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ m., *sui bachi da seta*, « Rendic. R. Acc. dei Lincei », vol. XII, serie 6°, fasc. 3-4, agosto 1930, e fasc. 5-6, settembre 1930. •

Le scatole erano poste su tavoli di legno, ricoperti di lastre di alluminio. Un Radio oscillatore per onde $\lambda = 3$ m. circa, funzionava per 5 ore circa in una aula.

La differenza fra i bachi posti sotto i circuiti e quelli di confronto si accentua sempre più; nel corso dello sviluppo, il ciclo di vita dei primi è accelerato, ed essi si presentano più grandi, più robusti e vivaci dei bachi di confronto.

Per porre in evidenza con dati precisi, questa differenza, riportiamo il peso medio dei bachi appartenenti alle diverse prove e il diverso raccolto in peso dei bozzoli formati.

Le esperienze vennero eseguite su seme Bachi Oro 54 e Giallo 144 dello Stabilimento Bacologico Sbrojavacca di Vittorio Veneto.

Esperienza su bachi Oro 54.

TABELLA I.

Bachi Oro al 12° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi posti nel circuito di rame	Bachi posti nel circuito di zinco
Peso medio	68.2 mgr.	112 mgr.	110.2 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di rame: 64 %

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di zinco: 61 %⁽¹⁾.

TABELLA II.

Bachi Oro al 20° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi posti nel circuito di rame	Bachi posti nel circuito di zinco
Peso medio	756 mgr.	1302 mgr.	1360.4 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di rame: 71.7 %

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di zinco: 79.9 %.

Imboscatura:

Per quanto riguarda la salita al bosco dei bachi, fu osservato che questa avviene per i bachi posti sotto i circuiti di rame di zinco, da 2 o 3 giorni prima dei bachi della prova di confronto.

(1) Le percentuali vennero calcolate prendendo il peso dei bachi confronto come normale.

Bozzoli:

I bozzoli ottenuti vennero raccolti e pesati poi, in tutte le prove, dopo un ugual tempo dall'inizio affinchè si trovassero nelle identiche condizioni di età ed avessero subito già una uguale perdita in peso:

Peso di 100 bozzoli provenienti dai bachi di confronto . . .	gr. 154
» » » » » del circuito di rame »	170.50
» » » » » del circuito di zinco »	174.70.

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi posti nei circuiti di rame:
10.5 %;

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi posti nei circuiti di zinco:
13.4 %.

Bachi Giallo 144.

Per questo tipo di bachi si seguì la stessa tecnica, descritta in precedenza, e i risultati ottenuti furono anche più favorevoli:

TABELLA III.

Bachi Giallo 144 al 12° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi posti nel circuito di rame	Bachi posti nel circuito di zinco
Peso medio	73.75 mgr.	126 mgr.	128.5 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di rame: 70.8 %.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di zinco: 74.3 %.

TABELLA IV.

Bachi Giallo 144 al 20° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi posti nel circuito di rame	Bachi posti nel circuito di zinco
Peso medio	800 mgr.	1484.2 mgr.	1510.5 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di rame: 85.5 %.

Percentuale in più nel peso dei bachi posti nel circuito di zinco: 88.9 %.

Imboscatura:

Ha luogo circa tre giorni prima per i bachi posti nei circuiti.

Bozzoli:

Peso di 100 bozzoli provenienti dai bachi confronto . . .	gr. 166
» » » » » nei circuiti di rame »	189.2
» » » » » nei circuiti di zinco »	192.1.

Percentuale in più nel peso dei bozzoli provenienti dai bachi:

nei circuiti di rame: 14 %.

nei circuiti di zinco: 15.7 %.

CONCLUSIONE E RIASSUNTO.

Fu sperimentato l'azione che i circuiti oscillanti di rame e di zinco esercitano sullo sviluppo dei bachi da seta (circuiti formati da una spira aperta di 30 cm. di diametro e 4 mm. di spessore).

1. Si osservò una azione favorevole esercitata da tutti i circuiti sullo sviluppo dei bachi sottoposti alla loro azione, ed in particolare nelle nostre condizioni, un'azione leggermente più favorevole nei circuiti di zinco.

2. Tutto il ciclo di vita dei bachi posti sotto l'azione dei circuiti viene accelerato, e il loro sviluppo viene esaltato, essi si presentano più robusti dei bachi confronto, e presentano un peso notevolmente maggiore, rispetto ai confronti della stessa età.

3. I bachi posti sotto l'azione dei circuiti iniziano la tessitura dei bozzoli circa tre giorni prima di quelli confronto.

4. Il raccolto in peso dei bozzoli provenienti dai bachi sottoposti all'azione dei circuiti oscillanti è dal 10 al 15 % superiore a quelli confronto.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Sul differenziamento correlativo della lente cristallina e della cornea nello sviluppo di Anfibî Anuri ed Urodeli*. Nota ⁽¹⁾ di P. PASQUINI, presentata dal Corresp. F. RAFFAELE.

Mi propongo in questa Nota di portare a conoscenza i risultati ai quali sono giunto nello studio sperimentale del differenziamento precoce e visibile della lente in Anfibî Anuri ed Urodeli e precisamente in *Rana catesbiana*, in *Rana esculenta* e *Amblystoma opacum*.

Queste ricerche eseguite in parte presso l'O. Z. L. della Yale University (S. U.), in parte presso l'Istituto di Zoologia di Roma, mirano a completare ed illustrare più ampiamente l'analisi che iniziai di tale problema qualche anno fa in *Pleurodeles waltli* ⁽²⁾. Recentemente infatti mi fu possibile in *Rana catesbiana* di mettere in completa evidenza, e per la prima volta, con esperimenti adeguati il tipo e grado di correlazione di sviluppo, fra abbozzo oculare ed ectoderma sopraoculare, sia quello proprio presuntivo della lente che altro ectoderma estraneo trasferito, con il trapianto, sull'occhio.

Per lo studio della determinazione della lente, nei varî stadî embrionali, fu rimossa dalla sua sede la vescicola ottica primaria, ciò che rese possibile di individuare lo stadio corrispondentemente al quale il differenziamento iniziato della lente dipende ancora o non dall'influenza della vescicola ottica, la quale, nella prima eventualità, deve agire continuatamente.

Per saggiare la capacità induttrice dell'abbozzo oculare, questo fu trasferito per trapianto omoplastico, eteroplastico, omo- ed eteropleurale, orto- ed eterotopico sempre al di sotto di epidermide ed il controllo di tale capacità organizzatrice fu fatto esaminando il risultato del trapianto di ectoderma banale di regione prossima o lontana al territorio oculare, sull'abbozzo omonimo lasciato *in situ*. Infine, per poter definire come e quanto agisse sull'ectoderma presuntivo lentogeno, la vescicola ottica sottostante, furono di questa asportate varie porzioni rimettendo in posto l'ectoderma che la ricopre oppure fu eseguito il trapianto di frammenti qualsiasi di vescicola al disotto di ectoderma estraneo, di altre regioni.

Per altra via ripresi ancora la questione dell'*organizzatore* della lente con due nuovi tipi di esperimenti i quali però, fino ad oggi, non mi hanno dato risultati conclusivi e soddisfacenti: a) mediante iniezioni di estratti embrionali acquosi di vescicola ottica al di sotto di ectoderma banale, espe-

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 luglio 1931.

(2) P. PASQUINI, in « Boll. Ist. di Zoologia R. Univ. di Roma », vol. V, (1927) ed in questi « Rendiconti », vol. VI, serie 6^a, 2° sem., fasc. 11 (1927).

rimenti questi che urtano contro la difficoltà di ottenere un'azione localizzata e circoscritta; b) mediante sovrapposizione alla vescicola ottica di lembi di ectoderma indifferente, colorati vitalmente e poi ritrapiantati sotto ectoderma di altra sede in modo da mettere in luce, qualora fosse stato possibile, l'acquisto del potere organizzante da parte dell'ectoderma per il contatto subito con la vescicola ottica.

Riservandomi di tornare su questo importante argomento, non appena sarò in possesso di risultati più precisi, mi limito per ora ad esporre sol-

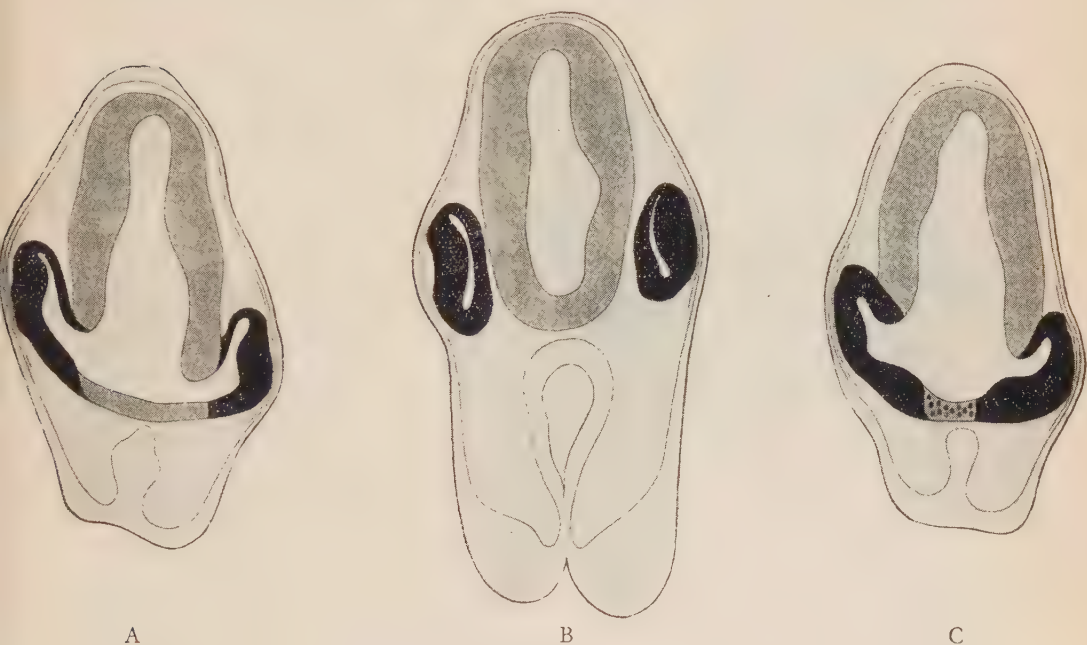


Fig. 1. — Sezioni trasversali schematiche di embrioni di *R. catesbiana*, interessanti il territorio oculare (in nero) durante gli stadi di bottone codale (A), di bottone codale avanzato (B) e di pieghe midollari fuse (C) (Ingr. $\times 95$).

tanto e succintamente quei risultati, ormai assoluti, raggiunti con il primo gruppo d'esperimenti.

In *Rana catesbiana*, il periodo di induzione della lente è molto più esteso che negli altri Anuri, noti sotto tale aspetto, ed il suo differenziamento è dipendente ed al massimo grado dall'abbozzo oculare, in assenza del quale e, limitatamente dallo stadio di bottone codale in sù, si possono produrre dal territorio presuntivo, dei lentoidi abortivi. Questo accade per una tendenza limitatissima e latente del placode lentogeno all'autodifferenziamento e negli stadi in cui la vescicola ottica poggia con la sua parete distale (la presuntiva della retina) sul foglietto interno del territorio sopra-oculare ancora non ispessito e con il quale la vescicola è a diretto contatto. (Vedi A, B, C nella figura 1).

Negli altri casi la lente si determina e si differenzia sia quando ectoderma non presuntivo è trasferito sull'occhio, sia se l'abbozzo di questo agisce fuori sede su ectoderma indifferente, mentre mai l'ectoderma lentogeno si sviluppa in lente, per autodifferenziamento, in regione diversa dalla normale, almeno che non sia associato a materiale della vescicola ottica che, anche in minima quantità, dà lo stimolo «lentogenico» ed organizza la lente. Il differenziamento correlativo si esplica in questo caso purchè sussista la sorgente del potere *organizzatore*, indipendentemente dall'integrità dell'abbozzo oculare e quindi del suo volume.

In *Rana esculenta*, già fatta oggetto di ricerche per questo scopo da Spemann (1907, '08, '12), e Filatow (1924, '25), cercai di fissare fino a quale stadio la capacità induttrice dell'abbozzo oculare fosse attiva e, a tale proposito, non potendo usufruire di ectoderma indifferente della stessa

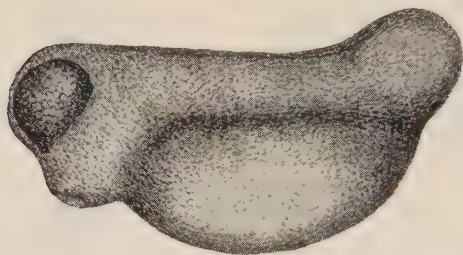


Fig. 2. — Embrioncino ospite di *Rana*, 24 h. dopo l'operazione di scambio dell'ectoderma lentogeno proprio, con ectoderma presuntivo branchiale di rospo (da un disegno alla camera chiara, Ob. 54 mm. Oc. 3, ridotto di 1/3).

specie che non sembra dare la reazione lentogena se trapiantato sull'occhio (Spemann, 1912; Filatow, 1924) dovetti ricorrere al trapianto eteroplastico e xenoplastico utilizzando cioè rispettivamente ectoderma indifferente di *Bufo* e di *Axolotl*⁽¹⁾.

Gli esperimenti con *Bufo* sono stati eseguiti dalle fasi terminali dello stadio di *neurula* a quelle del bottone codale (per *Bufo* anche in stadio più avanzato) ricoprendo l'abbozzo ocu-

lare dell'ospite (*Rana*) con un largo lembo di ectoderma del fianco del ventre, senza traccia di tuorlo, del donatore (*Bufo*) o del suo ectoderma presuntivo branchiale. L'operazione richiedeva il denudamento della vescicola ottica che, pur essendo strettamente aderente all'epiblasto cristallinico era lasciata integra; seguì poi lo sviluppo della larveta ospite fino al settimo giorno dopo l'operazione. Data la intensa pigmentazione dei tessuti di *Bufo* era naturalmente facile seguire sul vivo i fenomeni intervenuti nel territorio impiantato (fig. 2); così potei osservare la permanenza prolungata del movimento ciliare nell'epidermide di rospo; la sua graduale depigmentazione fino alle prime fasi del differenziamento della cornea con la trasparenza susseguente della calotta sopra-oculare. L'ectoderma estraneo impiantato confinava, a cicatrizzazione completa, caudalmente con il sollevamento del territorio presuntivo branchiale, ventralmente con la base di uno degli

(1) Gli esperimenti con *Axolotl*, sia d'impianto di ectoderma indifferente di *Rana*, sulla vescicola ottica di *Axolotl* che di trapianto xenoplastico in senso inverso, verranno illustrati in altra occasione.

organi adesivi, comprendendo o non, cefalicamente, il territorio dell'abbozzo olfattorio di un alto (il sinistro).

Non ho notato, in queste condizioni, alcun rallentamento nello sviluppo dell'embrione ospite, nè un diminuito vigore di questo, come è stato descritto dal Filatow ⁽¹⁾. I risultati ottenuti in questa serie, confermano però i due reperti dello stesso Filatow, poichè l'ectoderma banale di *Bufo*, ha dato la reazione lentogena sotto lo stimolo dell'organizzatore di *Rana*, ma in più dimostrano la *non specificità dell'organizzatore di secondo ordine* che è avvalorata dal fatto che tale reazione lentogena è avvenuta sia in ectoderma del ventre che in ectoderma presuntivo branchiale; dimostrano altresì il differenziamento correlativo della lente fra *Rana* e *Bufo* in stadio successivo all'avvenuto contatto della vescicola ottica di *Rana* con l'ectoderma proprio e dimostrano infine il differenziamento della cornea da ectoderma eterogeneo, non soltanto non presuntivo, ma revocato dalla sua stessa determinazione (ect. pres. branchiale) e proveniente da altra specie ed altro genere.

Riferisco per maggiore chiarezza due casi fra i più evidenti scelti fra gli esperimenti positivi:

In uno dei due (*Bu Ra E 5*), tre giorni dopo l'operazione, l'ospite è nello stadio di pinna codale con territorio presuntivo branchiale sporgente e già sdoppiato; il lembo ectodermico impiantato di *Bufo* si estende caudalmente fino alla base delle branchie, cefalicamente fino alla linea mediana del capo; quattro giorni dopo l'embrione viene fissato. L'epidermide di *Bufo* appare in sezione abbastanza più spessa di quella di *Rana*, con cellule ricche di granuli di tuorlo; lo strato esterno è densamente pigmentato. Ambedue gli occhi sono nella stessa fase di organizzazione del calice, all'inizio del differenziamento del *tapetum*.

In corrispondenza del calice ottico sinistro di *rana* si trova la lente di *rospo* indotta allo stadio di vescicola la quale cefalicamente si continua, con un bottone, con lo strato interno dell'ectoderma di *rospo* (fig. 3).

In un altro caso (*Bu Ra E 6*), la lente, differenziatasi dipendentemente dall'abbozzo oculare di *Rana*, è già distaccata dall'ectoderma di *Bufo*

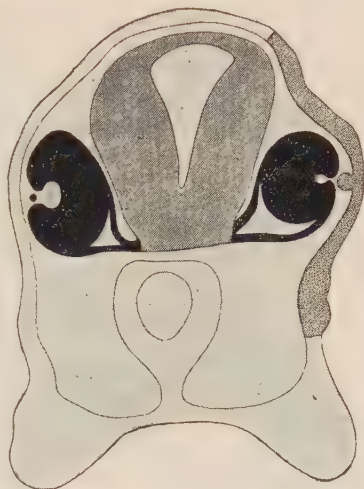


Fig. 3. — Sezione trasversale dell'embrione ospite (*Rana*) nel caso 5. L'epidermide punteggiata corrisponde al lembo ectodermico del fianco del ventre di *Bufo* ove è stata indotta la lente (ingr. $\times 75$).

(1) « Arch. für Entwicklungsmech. », Bd. 105 (1925).

e da questo separata dalla membrana di Descemet; il differenziamento della cornea è alquanto progredito con l'assottigliamento dell'ectoderma sopra-oculare che è appena debolmente pigmentato. Nelle osservazioni fatte sul vivo, la depigmentazione è già iniziata al terzo giorno progredendo dal centro alla periferia del lembo ectodermico, che al settimo giorno manifesta lo schiarimento caratteristico.

È dimostrato dagli esperimenti negativi, che, come il Durken (1913) ha messo in luce in *Rana fusca*, anche in assenza di lente, l'ectoderma indiffe-

rente di *Bufo trapiantato*, reagisce pel differenziamento della cornea, pure in presenza del calice ottico di *Rana* anche se questo appare alterato.

In embrioni di *Amblystoma opacum*, la cui raccolta debbo alla cortesia del Prof. Noble dell'Am. Mus. of Nat. Hyst. di New York, di stadi corrispondenti al 23 di Harrison per *Amblystoma punctatum* ho eseguito (ottobre 1930) varie operazioni di prelevamento dell'ectoderma sovrastante l'abbozzo oculare (fig. 4). Il lembo asportato, di diametro poco maggiore della vescicola ottica, era già aderente a questa, ma non così strettamente talchè era possibile di separarlo senza portar via cellule dell'abbozzo oculare. Questo rimase così intatto allo scoperto venendo ad essere poi costretto alla base dall'ectoderma cicatriziale



Fig. 4. — Embrione di *A. opacum*: a, stadio operato (i due cerchi indicano l'ectoderma sopraoculare asportato e la zona d'impianto sul fianco del ventre); b, lo stesso 4 giorni dopo l'operazione (ingr. $\times 12$).

che il giorno dopo l'operazione crebbe sull'occhio ricoprendolo nuovamente. Già quattro giorni dopo l'operazione, in embrioni fissati, colorati e tagliati in serie, ho riscontrato, per la prima volta in questa specie, l'induzione di una lente dall'ectoderma adiacente al territorio lentogeno. Come si vede nella figura 5, in corrispondenza del calice ottico, irregolare nella introflessione del suo foglietto esterno ed anomalo nella distribuzione dei suoi elementi, si nota l'ispessimento lentogeno del foglietto interno dell'ectoderma, già individualizzabile in una zona introflessa. La lente indotta è, cioè, in uno stadio più precoce che l'abbozzo della lente dell'occhio normale del lato opposto, che è in fase vescicolare e quasi completamente separato dall'ectoderma sopraoculare.

Il trapianto dell'ectoderma *proprio* lentogeno sul fianco del ventre non mi ha dato, per lo stadio 23, risultati positivi per l'autodifferenziamento

del cristallino sebbene questo fenomeno si sia manifestato, almeno per un certo periodo, in sede anche molto eterogenea quando l'ectoderma fu trapiantato omoplasticamente, dopo lo stadio 24 delle tabelle di Harrison.

Le attuali esperienze hanno così dimostrato:

in *Rana catesbiana*, la lente si sviluppa per differenziamento correlativo fra abbozzo oculare ed ectoderma che lo ricopre per un legame intimo fra abbozzo inducente e territorio indotto, come è presumibile che



Fig. 5. — Sezione trasversale di un embrione di *A. opacum*, con la nuova lente (a sinistra nella fig.) indotta nell'ectoderma di cicatrizzazione (ingr. $\times 55$).

avvenga anche nel normale sviluppo (possibilità di formazione della lente da ectoderma indifferente delle varie regioni del corpo);

in *Rana esculenta* l'abbozzo oculare, capace di fornire lo stimolo lentogenico in ectoderma indifferente di *Bufo* (Filatow) mantiene questo potere anche negli stadi terminali di neurula e di bottone codale e la correlazione di sviluppo pel differenziamento dipendente della lente si verifica anche qualora si tratti di ectoderma pres. branchiale di *Bufo*. Il differenziamento della cornea si esplica pure fra epidermide di rospo e calice ottico di rana e non è dipendente dalla presenza della lente indotta;

in *Amblystoma opacum* ectoderma estraneo sostituito all'ectoderma lentogeno si differenzia in lente quando appartiene al territorio limitrofo a quello dal quale normalmente si sviluppa la lente; nello stesso tempo l'ectoderma lentogeno (per lo meno dallo stadio 24) è dotato di un certo potere di autodifferenziamento.

Biologia (Patologia). — *Ricerche sui lipoidi dei tumori umani e particolarmente sul solfofosfolipide del tumore*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ADA BOLAFFI, presentata dal Corrisp. P. RONDONI.

Per estendere il significato delle osservazioni fatte su alcune frazioni lipidali dell'adenocarcinoma del topo e degli organi di questo animale complessivamente, si sono sottoposti al medesimo studio estratti di vari tumori mammari umani, preparati a mezzo di acetone acquoso ($d = 0,850$) con le precise modalità descritte nella precedente comunicazione⁽³⁾. Il medesimo procedimento ha pure servito al frazionamento dell'estratto acetone e cioè: dalla sostanza estratta e portata a secco nel vuoto si separa la parte solubile in alcool assoluto ottenendo un residuo costituito da tracce di colesterina e di sostanze fosforate e da una preponderanza di saponi (potassici). Dalla soluzione in alcool assoluto si possono separare successivamente: 1° con aggiunta di etere una *base aminata più o meno pura*, trovata particolarmente abbondante sul tumore in confronto ai tessuti normali dell'organismo; 2° la colesterina precipitando con digitonina; 3° ottenuto un soluto eterico acolesterinico, mediante acetone anidro si può rendere insolubile *un fosfatide* avvicinabile alla leucopoina di Fränkel. Di questo si mostrò molto ricca la media dei tessuti normali, relativamente ricca quella dei tessuti dell'organismo neoplastico, ma esso è invece assai ridotto nel tessuto neoplastico del topo; 4°. Il soluto etere-acetonico derivante (vedere in 3°) contiene grassi e un lipide solfo-sosforato particolarmente concentrato nel tessuto tumorale del topo in confronto all'insieme dei tessuti normali. Di questa sostanza furono date le caratteristiche approssimative dovute al fatto che le precedenti ricerche non andarono oltre per la separazione del solfolipide dai grassi e per la sua purificazione.

Oggetto della presente comunicazione è, oltre ai risultati ottenuti nella separazione degli estratti preparati da tumori umani, un 5° punto del procedimento analitico riguardante la separazione dei grassi dal soluto etere-acetonico del punto 4° e la cristallizzazione del solfolipide per una possibile identificazione.

Per quanto riguarda i punti 1, 2, 3, 4 della separazione, le osservazioni fatte su i tumori umani sono perfettamente analoghe a quelle fatte sul tumore di topo; si può però notare: che il fosfatide separato al punto 3°

(1) Lavoro eseguito nella Sezione Biologica dell'Istituto Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura del Cancro in Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 26 giugno 1931.

(3) « Rendic. R. Accad. Naz. dei Lincei », Classe di scienze fisiche, vol. XIII, serie 6ª, 1° sem. fasc. 4°, Roma 1931.

nei tumori umani sembra essere ancora più scarso che nel tumore da innesto; che i grassi si trovano nel tumore umano sovrabbondanti per le inevitabili infiltrazioni di materiale estraneo alla cellula tumorale e per la maggiore o minore ricchezza di questi tumori in connettivo. Questi grassi non sembrano essere omogenei ma piuttosto una miscela dei grassi provenienti appunto dalle infiltrazioni e di quelli propri alla cellula neoplastica. Una parte di questi grassi si può allontanare per filtrazione già dall'estratto primitivo, essendo il solvente capace di più o meno largamente estrarli, ma non di scioglierli completamente neanche a caldo.

Il 2° punto analitico relativo alla Colesterina era stato già da me ampiamente considerato in apposite ricerche sul topo e sul tumore di questo animale. Qui io ho a parte determinato il contenuto colesterinico (colesterina libera ed eterificata) su una serie di tumori umani di tipo svariato e di varia provenienza, dai quali ho preparato appositi estratti eteri per eseguire il dosaggio ponderale secondo Windaus. I risultati ottenuti confermano l'alto contenuto colesterinico anche nei tumori umani (sarcoma e carcinoma) e insieme che questo composto è anche qui, come regola generale, quasi completamente costituito da colesterina libera. Il valore medio trovato su un grammo secco di tessuto è un po' più basso che per il tumore del topo: fatto spiegabile, sia con la minore omogeneità dei tumori umani, sia con la minor esattezza del calcolo fatto considerando costantemente un contenuto acquoso approssimativo dell'80%, ciò che in questo caso non corrisponde alla realtà.

Punto 5° della separazione analitica: tanto per i tumori del topo, quanto per i tumori umani si ottengono al 4° punto miscele etere-acetoniche contenenti un solfolipide unito a quantità più o meno grandi di grassi. Tali miscele presentano quindi contenuto in solfo e fosforo proporzionale ma variabile da tumore a tumore. La sostanza solfofosforata si può separare cristallizzando a bassa temperatura (-12° -15°) una soluzione concentrata contenente il lipide e i grassi disciolti in acetone anidro. Il lipide abbandona il solvente mentre la massima parte dei grassi si mantiene in soluzione. Il solfofosfolipide così concentrato si ridiscioglie in etere e si sottopone a una o più purificazioni precipitandolo con acetone anidro dalla sua soluzione eterea, poichè l'assenza dei grassi che l'accompagnavano lo ha reso insolubile in questo solvente. Il solfofosfolipide separato sia dal tumore del topo che da alcuni tumori umani, rappresenterebbe una sostanza caratteristica e probabilmente esso ha anche una costituzione specifica per ogni tumore. Infatti il contenuto in solfo e fosforo delle diverse sostanze purificate è costante, ma varia da tumore a tumore. Così per quanto riguarda i tumori umani si sono individuate due sostanze (provenienti da tumori diversi) corrispondenti ai seguenti valori percentuali:

$$P = 3,40\% \quad S = 2,40\% \quad ; \quad P = 2,71\% \quad S = 1,48\%,$$

che concordano con i valori estremi trovati nella letteratura per la *jecorina*. Anche gli altri caratteri di solubilità, il potere riducente di fronte al AgNO_3 ammoniacale e il carattere di sostanza satura *ravvicinano* il lipide dei tumori umani alla *jecorina*. Tuttavia i valori in solfo e fosforo trovati indicherebbero trattarsi sia di diverse *jecorine* rispondenti ai medesimi caratteri fisici nei singoli casi, sia di una miscela diversa per ogni tumore di alcune sostanze fondamentali, conforme all'opinione di alcuni autori che vedono nella *jecorina* non una sostanza unica e costante ma un complesso aggregato di corpi diversi. È incerto se il solfofosfolipide del tumore del topo sia da omologarsi ad uno dei due tipi trovati nei tumori umani, che per difficoltà dovute alla diversa natura del grasso di topo non abbia raggiunto un egual grado di purezza, o se invece si differenzi maggiormente dalla *jecorina* per un carattere di insaturazione dei radicali grassi, oltre che per il contenuto in solfo e fosforo trovato nelle seguenti percentuali:

$$P = 2,47\% \quad , \quad S = 2,27\% \quad , \quad \text{assai prossime fra loro.}$$

Comunque resta stabilito che tutti i tessuti neoplastici finora considerati, umani o da innesto, forniscono nette analogie nella costituzione lipoidale. Essi contengono sempre un lipide solfofosforato complesso estraibile con acetone $d = 0,850$ ma insolubile, se puro, in questo solvente anidro. Questo lipide che si trova nel tumore assai concentrato, ha molto probabilmente carattere costituzionale specifico per ogni tumore e rappresenta una sostanza assai caratteristica se anche non proprio specifica del tessuto neoplastico. Nei tumori umani essa è probabilmente identificabile con la cosiddetta *jecorina*.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1931 (Anno IX).

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo)

Astronomia. — *Nuova interpretazione cosmogonica dell'equipartizione dell'energia tra le stelle.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. In questa Nota ci proponiamo di dare un'interpretazione cosmogonica — che crediamo nuova e radicalmente diversa da quella oggi comunemente adottata — di un fenomeno di alta importanza astronomica: quello dell'equipartizione dell'energia tra le stelle. E questa nostra interpretazione ci sembra degna d'interesse perchè potrebbe modificare molte idee, oggi ammesse, sopra l'età delle stelle.

Così p. es. un illustre scienziato inglese, il Jeans, partendo dall'equipartizione energetica, crede di dedurne che *le stelle esistono almeno da cinque o dieci trilioni di anni* ⁽²⁾. Ora, come vedremo, se si ammette la nostra nuova interpretazione, l'argomento su cui il Jeans fonda i suoi calcoli, viene a crollare interamente. Ma entriamo, senz'altro, in materia.

2. Fin dal principio del secolo presente gli astronomi avevano notato che, generalmente, le stelle di piccola massa apparivano dotate di forte velocità, mentre invece le stelle di grande massa avevano spesso velocità debolissima. I recenti progressi dell'Astronomia Siderale permisero a questi studi di svilupparsi rapidamente, fino a che il Seares, in una classica memoria ⁽³⁾, potè mostrare che, in generale, la velocità delle stelle è, presso a poco,

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1931.

(2) Cfr. JEANS, *The Universe around us*, p. 164, Cambridge, University Press, 1929.

(3) Cfr. SEARES, *The masses and densities of the stars*, in « *Astrophysical Journal* », vol. LV.

inversamente proporzionale alla radice della loro massa, o — in altre parole — che *tutti gli astri hanno*, presso a poco, *la stessa energia cinetica*. E questa conclusione va ritenuta come un fenomeno dimostrato dalle osservazioni; fenomeno assai importante e che si tratta di spiegare.

3. Come è noto, la spiegazione che si presenta spontanea alla nostra mente e che è oggi generalmente ammessa dagli astronomi, consiste nel paragonare i movimenti delle stelle con quelli delle molecole di un gas. Infatti la fisica insegna che le molecole di un gas, a cagione degli urti reciproci, assumono la medesima energia cinetica, onde — in linea di massima — lo stesso fenomeno dovrà riprodursi per le stelle: colossali molecole che si muovono nell'immensità dei cieli. Soltanto tra le molecole gassose gli urti sono frequentissimi, almeno alla pressione ordinaria, e quindi l'equipartizione dell'energia si raggiunge dopo un tempo estremamente breve; per le stelle invece — anche chiamando « urto » il semplice passaggio di due astri a breve distanza, in modo che la loro traiettoria risulti modificata dalla reciproca attrazione — il tempo richiesto è immensamente lungo. E precisamente il Jeans ⁽¹⁾ calcola che occorrono almeno cinque triloni di anni ($5 \cdot 10^{12}$ anni) per una grossolana ripartizione energetica e quindi — poichè tale ripartizione oggi esiste in via di fatto — ne deduce che le stelle sussistono almeno da un tale intervallo di tempo.

4. Questo risultato, come ognuno vede, sarebbe immensamente importante per tutte le nostre ricerche sopra l'evoluzione stellare, purchè però si ammetta la spiegazione ora data come unica spiegazione possibile. Ora invece, nella presente Nota, io mi propongo di mostrare che il fenomeno può essere spiegato in modo radicalmente diverso. E precisamente io mi propongo di mostrare che, *se si ammette l'ipotesi cosmogonica di Sir Norman Lockyer e di R. Du Ligondès* — secondo la quale ⁽²⁾ le nebulose e gli astri furono originariamente costituiti dalla riunione di un gran numero di meteoriti preesistenti — *ne risulta, come conseguenza matematica, l'equipartizione dell'energia tra le stelle*.

5. Per dimostrarlo, consideriamo l'immenso sciame dei meteoriti primordiali — che supporremo di massa μ poco differente tra loro — dai quali, secondo N. Lockyer, si formarono gli astri e prendiamo il baricentro G come origine di un sistema di assi cartesiani, di direzione invariabile. Allora, se i meteoriti si muovevano a caso nello spazio, la probabilità P affinchè le componenti della velocità di un dato meteorite fossero comprese tra u, v, w ed $u + du, v + dv, w + dw$ poteva esprimersi con la formula di Maxwell e Gauss:

(1) Cfr. JEANS, op. cit.

(2) Cfr. N. LOCKYER, *L'évolution inorganique*, Paris, Alcan, 1905; R. DU LIGONDÈS, *Formation mécanique du système du monde*, Paris, Gauthier, 1897; cfr. anche POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris, Hermann, 1913.

$$(1) \quad P = \frac{hkl}{\sqrt{\pi^3}} e^{-(h^2 u^2 + k^2 v^2 + l^2 w^2)} du dv dw$$

dove h, k, l sono tre costanti che, per generalità, supporremo diverse tra loro, poichè è possibile che la *mobilità* dei meteoriti primordiali sia stata diversa nelle varie direzioni. In appresso chiameremo μ, h, k, l col nome di *costanti caratteristiche dello sciame primordiale*.

6. Ciò posto, immaginiamo che un gran numero n di questi piccoli meteoriti si siano riuniti — contemporaneamente o successivamente — dando origine ad un astro S . Allora, essendo i meteoriti di massa poco differente tra loro, la velocità U dell'astro S secondo l'asse delle x , sarà per il teorema del baricentro:

$$(2) \quad U = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Ora, tenendo presente la (1), il calcolo insegna che la probabilità P' affinchè U sia compresa tra U ed $U + dU$ è data ⁽¹⁾ dall'espressione:

$$(3) \quad P' = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 U^2} dU$$

essendo:

$$(4) \quad H^2 = nb^2.$$

In conseguenza il valore probabile del modulo di U e cioè *il valore probabile U_p della grandezza della velocità dell'astro S lungo l'asse delle x* , sarà:

$$(5) \quad U_p = \frac{2H}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-H^2 U^2} U dU = \frac{1}{H\sqrt{\pi}} = \frac{1}{b\sqrt{n\pi}}.$$

Analogamente, i valori probabili V_p e W_p della grandezza della velocità dell'astro S , rispetto agli assi x ed y , saranno:

$$(6) \quad V_p = \frac{1}{k\sqrt{n\pi}}$$

$$(7) \quad W_p = \frac{1}{l\sqrt{n\pi}}$$

(1) Cfr. ogni buon trattato di calcolo delle probabilità, come pure PIZZETTI, *Geodesia teoretica*, p. 284, Bologna, Zanichelli, 1928.

ed anzi, essendo n certamente grandissimo, la probabilità affinchè le grandezze effettive della velocità siano vicine ai loro valori probabili è molto forte.

Ciò posto, poichè l'astro S è stato formato dalla riunione — contemporanea o successiva — di n meteoriti, la sua massa totale M sarà eguale a μn e quindi la sua *energia cinetica probabile* T_p sarà:

$$(8) \quad T_p = \frac{\mu n}{2} [U_p^2 + V_p^2 + W_p^2] = \frac{\mu n}{2} \left[\frac{1}{h^2 n \pi} + \frac{1}{k^2 n \pi} + \frac{1}{l^2 n \pi} \right] =$$

$$= \frac{\mu}{2 \pi} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right]$$

e cioè *risulterà indipendente da n* .

7. In conseguenza, se adottiamo l'ipotesi cosmogonica di N. Lockyer, noi troviamo che l'energia cinetica probabile di un astro qualsiasi S è indipendente dal numero dei meteoriti che sono occorsi a formarlo e dipende unicamente dalle quattro costanti caratteristiche dello sciame primordiale μ, h, k, l . *L'energia cinetica probabile avrà dunque lo stesso valore per tutti gli astri.*

8. Così noi vediamo come la Cosmogonia possa facilmente spiegare l'equipartizione dell'energia stellare, senza bisogno di ricorrere a parecchi triloni di anni per l'età delle stelle. Non è qui naturalmente il luogo di fare una discussione approfondita dei vantaggi e dei difetti dell'ipotesi meteoritica e delle sue relazioni con le nostre ultime conoscenze sopra le nebulose. Vogliamo solo rilevare come il risultato, a cui siamo ora giunti, mentre da un lato fortifica l'elegante cosmogonia del Lockyer, d'altro lato getta alcuni dubbi sull'età delle stelle che il Jeans ha dedotto dall'equipartizione dell'energia e dal confronto degli astri con le molecole dei gas.

Chimica. — *I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. XIV. Solfati di praseodimio e sodio*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Socio F. ZAMBONINI e di SILVIA RESTAINO.

Nella presente Nota riferiremo brevemente sui risultati che abbiamo ottenuti, come al solito per l'isoterma di 25°, nello studio di una parte del sistema $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$. I metodi usati sono i medesimi già più volte descritti.

I nostri dati sperimentali sono riuniti nella seguente

TABELLA I.

N. esperienza	Composizione della fase liquida				Composizione del corpo di fondo					Costituenti del corpo di fondo
	$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3$	Na_2SO_4	H_2O	$\frac{\text{Na}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$	Pr	SO_4	H_2O	Na	$\frac{\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3}{\text{Na}_2\text{SO}_4}$	
1	—	9.45	90.55	0.10	36.16	52.30	4.52	7.02	3.22	4—5—8H ₂ O
2	—	6.61	93.39	0.07	36.14	52.34	4.41	7.11	3.21	
3	—	5.24	94.76	0.05	36.84	52.20	4.01	6.95	3.47	
4	—	3.64	96.36	0.037	37.24	51.65	4.61	6.42	3.75	
5	—	1.44	98.56	0.014	37.28	51.62	4.78	6.38	3.78	1—1—2H ₂ O
6	2.34	0.01	97.65	0.0001	37.81	51.40	4.64	6.15	4.06	
7	2.36	0.01	97.63	0.0001	37.55	51.59	4.60	6.26	3.89	

Composizione teorica dei composti ottenuti.

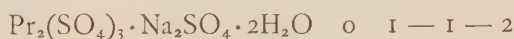
	Pr	SO_4	H_2O	Na
$4\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 - 5\text{Na}_2\text{SO}_4 - 8\text{H}_2\text{O}$	35.85	52.26	4.58	7.31
$\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - 2\text{H}_2\text{O}$	37.67	51.37	4.81	6.15

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli. Per i lavori precedenti, si vedano le Note pubblicate in questi «Rendiconti» a partire dal secondo semestre 1924.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1931.

Con i dati della tabella I si è costruito il diagramma riprodotto nella fig. 1, ponendo sull'asse delle ascisse i valori del rapporto $\frac{\text{Na}_2\text{SO}_4}{\text{H}_2\text{O}}$, e sull'asse delle ordinate, invece, quelli del rapporto dei due solfati.

Dalla tabella e dalla fig. 1 emerge chiaramente che, nelle nostre condizioni sperimentali, non si formano che i due composti



e



Si tratta, cioè, dei due composti che abbiamo osservato nei sistemi $\text{Ce}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$ e $\text{Nd}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$. Come ri-

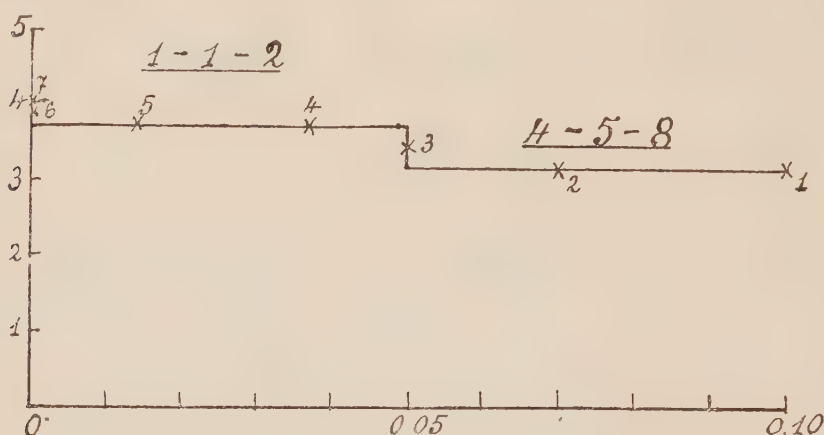


Fig. 1.

sulta da un nostro precedente lavoro, il composto 4—5—8 non è stato ottenuto nel sistema $\text{La}_2(\text{SO}_4)_3 - \text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{H}_2\text{O}$.

Abbiamo già osservato, nelle ricerche pubblicate sui solfati doppi di cerio ceroso e sodio e di neodimio e sodio, che i due composti 1—1—2 e 4—5—8 hanno una composizione chimica molto vicina: però, come risulta dai dati sopra riportati, le differenze superano gli errori analitici, ed il fatto stesso di avere, in differenti sistemi, ritrovato il composto 4—5—8 parla molto in favore della sua reale esistenza. Non abbiamo mancato, del resto, di procedere anche in questo caso, come in quello dei solfati doppi di cerio (ceroso) e sodio, constatando la costanza di composizione, anche dopo il trattamento con carta bibula umida, che avrebbe dovuto asportare il solfato di sodio commisto, se ve ne fosse stato.

I due composti 1—1—2 e 4—5—8 si presentavano sotto forma di polveri minutissime, di colore verdognolo piuttosto chiaro. Al microscopio si riconoscono minutissimi cristallini birifrangenti, senza nessuna forma determinabile.

Non abbiamo spinto le esperienze più oltre dalla parte del solfato sodico, perchè avveniva la separazione di quest'ultimo composto evidentissima.

È notevole, che il praseodimio viene precipitato completamente anche quando in soluzione non rimangono che quantità relativamente piccole di solfato di sodio.

Il composto $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ è stabile, puro, in presenza di soluzioni che contengono da tracce a 1.5 % circa Na_2SO_4 : l'altro composto $4\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 5\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, invece, si ha puro in contatto di soluzioni che hanno un contenuto più elevato in solfato di sodio, e, precisamente, fino a 9.5 % circa.

Abbiamo già osservato, in precedenti lavori, che i solfati doppi dei metalli del gruppo del cerio e del sodio si disidratano soltanto a temperatura relativamente elevata, al contrario di quanto si verifica di solito per i solfati doppi con gli altri metalli alcalini. È da ritenersi che questo comportamento sia effettivamente caratteristico per i solfati doppi col sodio, perchè si verifica anche nel caso dei solfati di praseodimio e sodio.

Così, per esempio, noi abbiamo trovato che il composto $\text{Pr}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot \text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ a 110° subisce una perdita di peso di appena 0.6 %, che a 200° sale a 2.5 %. Il sale doppio 4—5—8 a 110° non diminuisce di peso che del 0.56 %, e del 2.6 % a 200°.

Chimica. — *Ditiocarbammati manganici*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Corrisp. L. CAMBI e di A. CAGNASSO.

In prosecuzione alle ricerche già da noi comunicate sui ditiocarbammati di ferro e cobalto⁽³⁾, abbiamo studiato i sali manganici.

Non era finora noto alcun ditiocarbammato di manganese. A noi interessava non solo stabilirne le reazioni di formazione, ma il comportamento, particolarmente quello magnetico, in confronto con i sali dei metalli della prima serie di transizione del sistema periodico.

M. Délépine aveva notato che alcuni ditiocarbammati ammoniacali od alcalini davano con i sali manganosi precipitati bruni, solubili in cloriformio con colore rosso-bruno⁽⁴⁾, ma non riferiva in proposito alcun'altra osservazione.

Verificammo che il precipitato bruno si produce soprattutto con i ditiocarbammati contenenti il residuo delle ammine secondarie; con i ditiocarbammati

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1931.

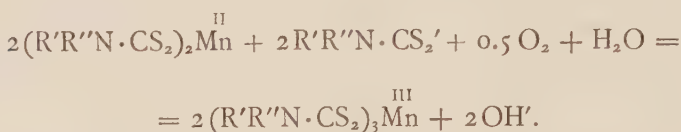
(3) Questi « Rendiconti », 13, 254, 404 (1931).

(4) « Comptes-Rend. », 146, 918 (1908).

carbammati derivati dalle monoammine alifatiche, in generale, non si precipitano sali di manganese, ma si separano corpi di natura diversa.

Abbiamo constatato che si attua, con i ditiocarbammati derivati dalle ammine secondarie, un processo affatto analogo a quello da noi già descritto, che conduce dai ditiocarbammati cobaltosi e ferrosi ai corrispondenti sali dei metalli stessi allo stato trivalente. Dapprima si nota la formazione del sale manganoso giallognolo o biancastro, che si ossida con relativa rapidità, assorbendo ossigeno atmosferico, e in eccesso di ditiocarbammato alcalino od ammonico passa a sale manganico.

In generale si attua la reazione complessiva:



Osservammo questa reazione con i ditiocarbammati già da noi esaminati per il ferro; l'abbiamo particolarmente studiata, isolandone il prodotto, con il piperidil-, isodibutil- e dibenzil-derivato.

Dobbiamo notare che l'autoossidazione può procedere anche oltre la formazione del sale manganico, per quanto più lentamente, e fino alla distruzione del sale stesso, con formazione di prodotti manganici basici e prodotti d'ossidazione del residuo ditiocarbammico; fra i quali constatammo i disolfuri $(\text{R}'\text{R}''\text{N}\cdot\text{CS}_2)_2$.

L'azione di attivatore del manganese si rende più manifesta nei ditiocarbammati derivati dalle ammine primarie: anche in questo caso il sale manganoso si autoossida a manganico, come è facile verificare agitando la soluzione con cloroformio in cui si manifesta la colorazione del sale manganico che estrae, ma il Mn^{III} ossida il ditiocarbammato, ed il sale manganico si demolisce rapidamente e la stessa soluzione cloroformica si decolora.

Aggiungiamo a questo proposito che abbiamo notato un comportamento analogo fra sali manganosi e xantogenati alcalini.

Ricordiamo infine che i ditiocarbammati ferrici contenenti l'aggruppamento — NHR, sono assai più instabili dei sali derivati dalle ammine secondarie.

I ditiocarbammati manganici da noi isolati mostrano infatti strette analogie con quelli ferrici corrispondenti: hanno solubilità analoghe, cristallizzano in forme simili. Allo stato solido sono neri o nero-rossastri; in soluzione presentano colore bruno-rosso-ametista.

Sono alquanto resistenti ai reagenti: in sospensione acquosa a freddo reagiscono lentamente col cianuro potassico, resistono a freddo all'idrossilamina in presenza di bicarbonato alcalino; vengono ossidati lentamente dall'acqua ossigenata al 3.6%. Si decompongono con i solfuri alcalini.

Il processo di formazione del nuovo tipo di sali manganici



di cui ci occupiamo, trova finora pochi riscontri di analogie nei sali complessi del manganese. Da un lato richiama la formazione del manganicianuro per autoossidazione del manganocianuro, dall'altro dell'acetilacetato manganico da acetilacetone e carbonato manganoso, reazione peraltro assai più lenta ⁽¹⁾.

I nostri sali hanno in comune con l'acetilacetato la solubilità nei solventi a bassa costante dielettrica, la stabilità relativamente alta; caratteri che attestano la loro spiccata complessità.

A questo proposito osserviamo, anticipando quanto verrà esposto in seguito, che la determinazione della suscettibilità magnetica ha dato per l'atomo di manganese dei sali che descriviamo 24 magnetoni Weiss, come nell'acetilacetato manganico ⁽²⁾, cioè lo stesso numero corrispondente all'ione Mn^{+++} . Mentre il manganicianuro appartiene ad un'altra classe di complessi manganici: in esso il manganese reca 17 magnetoni Weiss ⁽³⁾, e presenta quindi un'intima struttura elettronica assai diversa.

Cioè, i sali che descriviamo appartengono alla stessa classe di complessi dell'acetilacetato, ed offrono un nuovo ed interessante aspetto della chimica del manganese trivalente.

PARTE SPERIMENTALE.

N-piperidil-ditiocarbamato manganico $(C_5H_{10}N \cdot CS_2)_3Mn$. — Il sale venne preparato aggiungendo alla soluzione acquosa, circa al 2 %, del ditiocarbamato di piperilammonio, quella al 5 % di solfato manganoso in debole difetto. Il precipitato biancastro si ossida rapidamente in corrente d'aria, con vivace agitazione, alla temperatura ambiente. Dopo mezz'ora il precipitato viene separato e lavato ripetutamente con acqua, essiccato nel vuoto. Il sale secco grezzo viene disciolto in cloroformio e cristallizzato mediante aggiunta di etere di petrolio (p. e. 40°-70°). Il sale puro si separa in forma di polvere cristallina nero-rossastra che, dopo essere stata tenuta nel vuoto per quarant'otto ore su paraffina, è stata sottoposta all'analisi ed ha fornito i risultati seguenti:

	Mn	N (Dumas)	S
calcolato %	10.28	7.85	35.95
trovato %	10.60	7.89	35.79.

(1) GACH, « Monatsh. », 21, 116.

(2) I risultati delle indagini, sul comportamento magnetico di questi complessi eseguite da L. Cambi e L. Szegö verranno esposte in seguito.

(3) L. SZEGÖ e P. OSTINELLI, « Gazz. Chim. », 60, 3, 1930.

Per la scarsa solubilità in benzolo e bromoformio non venne determinato il peso molecolare.

Il sale è insolubile in alcool, etere solforico; è limitatamente solubile in cloroformio, benzolo, acetone, piridina.

Le soluzioni hanno colore rosso-granato.

Sospeso in soluzione acquosa reagisce con estrema lentezza con cianuro di potassio, viene ossidato dall'acqua ossigenata al 3.6 %, non reagisce con l'idrossilammia in soluzione di bicarbonato sodico. È decomposto dal solfuro di sodio con formazione di solfuro manganoso.

N·N-isodibutil-ditiocarbammato manganico $[(C_4H_9)_2N \cdot CS_2]_3Mn$. — Il sale venne preparato come il precedente usando il isodibutilditiocarbammato di isodibutilammonio, procedendo con le modalità descritte per il sale precedente.

Il composto isodibutilico è solubile nell'alcool assoluto bollente, ha una solubilità molto più elevata del piperidil-derivato nei solventi sopracitati. Dall'alcool assoluto cristallizza per raffreddamento in lamelle nero-lucenti. Le soluzioni hanno colore bruno-rosso-ametista.

L'analisi ha dato i risultati:

	Mn	N (Dumas)	S
calcolato %	8.27	6.25	28.79
trovato %	8.46	6.38	28.83 .

Il peso molecolare in benzolo è risultato:

solvente gr. 22.54; sostanza gr. 0.1964; $\Delta_t = 0.063$;

peso molecolare: calcolato 668; trovato 677.

Il sale è meno stabile del precedente, si ossida lentamente all'aria generando il disolfuro ditiocarbammico. Si comporta con i vari reagenti analogamente al precedente.

N·N-dibenzilditiocarbammato manganico $[(C_6H_5)_2N \cdot CS_2]_3Mn$. — Venne preparato seguendo le modalità sopra descritte usando il dibenzilditiocarbammato d'ammonio. Il sale grezzo essicato venne cristallizzato da miscele di cloroformio ed etere di petrolio. Si presenta in aghetti nero-lucenti. È insolubile in alcool, molto solubile in cloroformio, benzolo e acetone.

L'analisi ha fornito i dati seguenti:

	Mn	N (Dumas)	S
calcolato %	6.30	4.82	22.03
trovato %	6.41	4.81	22.33 .

Il peso molecolare fu determinato in benzolo:

solvente gr. 20.11; sostanza gr. 0.1482; $\Delta_t = 0.043$;

peso molecolare: calcolato 871; trovato 839.

Geologia. — *Falde a trucioli e falde a doppio viaggio.* Nota ⁽¹⁾
del Corrisp. G. ROVERETO.

Chiamo a trucioli quelle falde il cui elemento roccioso principale, sedimentizio o scistoso-metamorfico, contiene delle masse isolate e laminate di rocce eruttive, nonchè scaglie di rocce stratificate di una età anteriore all'imballaggio.

Il vocabolo per designarlo mi è stato ispirato da una frase dell'Hermann ⁽²⁾, il quale ha appunto stabilito, per la *falda alpina dei calcescisti liassici*, che in questi sono sparse e sperse delle scaglie e lenti di calcari triassici.

Con tale distinzione si pone netto il problema dell'origine complessiva di due assai note formazioni delle Alpi e dell'Appennino: quella ora ricordata, chiamata eziandio *del Monte Rosa*, e l'altra degli scisti argillosi cretacei, pure con pietre verdi o, come altri dicono, con ofioliti, le quali, per qualche specie di roccia o di minerale componente, sono differenti dalle anteriori, e formano la detta da me *falda appenninica ligure-toscana* ⁽³⁾.

Con le nozioni che già si possiedono su queste due falde, se ne può studiare un'altra, di una terza formazione, quella degli scisti sericitici permocarboniferi, che mi risulta, secondo recenti ricerche, con trucioli di graniti e di porfidi laminati, e di paragneiss come elemento sedimentizio estraneo e di origine anteriore, che appartiene alla falda del Gran San Bernardo, dove questa si distende dalle Alpi Liguri al Tirreno.

Anche chi non accetta la teoria delle falde, bisogna che riconosca il caso ripetuto tre volte, in tempi diversi, di tre formazioni alpino-appenniniche, con trucioli sperduti; esempio bellissimo di quella *Wandertektonik*, invocata da Suess figlio, per spiegare più di un fatto della tettonica erciniana, la quale, come ora vedremo, ha anche la sua parte nel presente problema.

Dopo premesso, che seguo la sintesi tettonica, in parte mia e in parte di altri, da me esposta ultimamente ⁽⁴⁾, posso dire che i principali elementi per venire ad una conclusione deduttiva sono i seguenti:

Due delle formazioni a trucioli, quella degli scisti cretacei, e l'altra degli scisti permocarboniferi, sono rispettivamente contemporanee, e vanno unite, a due parossismi orogenici: l'*erciniano* del paleozoico superiore, l'*alpino* del paleogene; la terza, quella dei calcescisti, non pare collegata a un periodo orogenico proprio; si sposta un po' prima della falda degli scisti

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1931.

(2) Cfr. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. L, p. 35, 1931.

(3) ROVERETO G., *Trattato di Geologia Morfologica*, vol. I, fig. 118, 1923.

(4) « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. L, p. 33 e sg., 1931.

cretacei, e bisogna ancora stabilire se aveva, o non, tale struttura prima di questo spostamento.

La formazione permo-carbonifera è pure rappresentata, nell'area delle Alpi — nelle Orientali — da altra *facies* non a trucioli, ma che offre l'insieme che gli ha forniti, ossia la roccia porfirica in laccolite, o in *pseudolaccolite* ⁽¹⁾.

Nulla di preciso conosciamo sul luogo di rifornimento delle falde mesozoiche; ma si possono fare in proposito parecchie ipotesi.

Il disperdimento delle masse eruttive è avvenuto immediatamente dopo, o durante il deposito dell'imballaggio sedimentizio, mentre che si determinava il viaggio che le ha trasportate.

Non pare che vi siano trucioli di rocce eruttive di una età di molto anteriore all'imballaggio, perchè ciò porterebbe ad una loro grande varietà; ve ne sono invece di rocce sedimentizie.

In conformità di tutto questo è possibile pervenire alle seguenti conclusioni:

La falda a trucioli permo-carbonifera delle Alpi Liguri fa il suo primo viaggio durante il parossismo orogenico erciniano, e rappresenta, quindi, un elemento tettonico di tal tempo; mentre che essendo pure, come ho ultimamente dimostrato, un elemento essenziale della falda del Gran San Bernardo, ha subito un nuovo spostamento durante l'orogenesi alpina, per potere racchiudere nelle sue pieghe, come è facile constatare, i membri della serie mesozoica e terziaria, a cominciare dal trias, e a terminare con l'eocene medio: è quindi il caso tipico della falda che qui si chiama *a doppio viaggio*.

Il problema dei massicci cristallini liguri, di Savona e di Calizzano, può prendere un nuovo aspetto, se a loro volta, questi si considerano degli elementi erciniani, anzi, i frammenti di una ellissoide, che l'orogenesi erciniana avrebbe divelto e disperso, mentre risparmiava, e cominciava a determinare come nucleale, quello delle vicine Alpi Marittime; che doveva poi essere rispettato dalle falde e dal corrugamento del terziario.

È presumibile, che l'ipotesi più atta a spiegare la maniera con cui le tre falde si sono provvedute dei trucioli di rocce eruttive, sia quella, che tali rocce si siano distese sul fondo marino, talvolta con accrescimento al disotto di una crosta vulcanica, come in Bosnia, e abbiano formato una *placcolite*, come nel mio « Manuale » ho precisato. Le falde avrebbero frammentato la placcolite, e sparsone i frammenti, per modo che, le falde a trucioli, essendo a elementi superficiali, non rappresenterebbero porzioni della *piega di fondo*, ma piuttosto, secondo la terminologia di Argand, *pieghe di copertura*, la cui determinazione, io credo, sarebbe stata favorita dalla grande plasticità del materiale di imballaggio, di recente depositatosi. D'altra parte è necessario credere, per spiegare il disperdimento delle lenti isolate, e quasi sempre

(1) Indico con questo vocabolo le masse che oggi si credono intruse in grandi vuoti formati durante il parossismo orogenico.

milonitizzate in vari gradi⁽¹⁾, che le pieghe, in cui sono racchiuse, abbiano subito notevoli spostamenti orizzontali, siano quindi *vere falde*; senza essere necessaria, data la determinazione superficiale, la presenza di una zona di radici: e in nessun caso di falde a trucioli si può parlare di radici.

Da altri si è asserito perfettamente il contrario: che le falde alpine a pietre verdi hanno pescato nel *sima*, ossia ad almeno millecinquecento chilometri di profondità, dove invero, a vece delle pietre verdi, consolidate come specie rocciose distinte, avrebbero dovuto trovare dei magma fluidi, non ancora differenziati. Si può anche dire, che è assai poco probabile che il movimento orogenico sia sceso di tanto, per ricevere qualche pillacchera di tali magma; e non è il caso di giurare sulla realtà degli involucri suessiani.

Sono invece le pietre verdi, i graniti, i porfidi, che sono venuti a cercare, risalendo nella *litosfera*, intesa nel senso di Sieberg, o nella *crosta* ancora più limitata di Washington, la zona in piegamento, la piega di fondo dapprima, nella quale tali rocce si dovrebbero trovare come pseudolaccoliti ed etmoliti, e le falde superficiali dipoi, sino alla superficie esterna, dove furono delle placcoliti, passate a trucioli come sopra ho concretato.

La falda a trucioli dei calcescisti non corrisponde a un parossismo orogenico riconosciuto, eppure bisogna ammettere, che il disperdimento delle pietre verdi, che in essa si osserva, sia avvenuto nel mesozoico inferiore, quando la parte sedimentizia della falda era ancora una massa plastica; e difatti, racchiude trucioli di calcari triassici, ma, per quanto mi è noto, non di calcari giuresi, nè cretacei; questi vi sono stati intercalati per il piegamento terziario. Da ciò si deduce, che ha avuto una traslazione a mezzo il mesozoico, altra durante l'orogenesi alpina, si ha quindi ancora una falda a doppio viaggio.

Le sue condizioni di metamorfismo, di milonitizzazione, di epigenesi hanno un'accentuazione ben maggiore di quella della posteriore falda a trucioli del cretaceo ofiolitifero.

Anche per questa terza falda bisogna ripetere in parte lo stesso ragionamento: disperde viaggiando, mentre sta ancora accumulandosi, forse su di una *geomonoclinale*, piuttosto che in un *geosinclinale*: le ofioliti favoriscono, facendo salienza sul fondo marino, la sedimentazione calcarea e la manganesifera⁽²⁾, comprese fra il titonico e il cretaceo superiore⁽³⁾, poi tutto si frammenta e si sposta: è una *fase di predeterminazione*, che ha riscontro in quella *fase nevadiana*, che è però di età preportlandiana, che è stata distinta dai geologi americani per stabilire il ciclo orogenico alpino della Cordigliera: nell'eocene medio, quando l'insieme riprende il movimento per il secondo viaggio, si forma la gran *falda ligure-toscana*, e abbiamo, rispetto all'orogenesi, l'acme della *fase alpina* propriamente detta.

(1) Cfr. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLI, 1922, p. 40 e sg.

(2) « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLII, p. 216, 1924.

(3) « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLVIII, p. 257, 1929.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo generalizzato in una V_3* . Nota I di G. BARBA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una precedente Nota dal titolo: *Parallelismo generalizzato* ⁽²⁾, abbiamo determinato una generalizzazione del concetto di parallelismo dovuto al Levi-Civita, limitandoci ad una V_2 .

Vogliamo, ora, togliere tale restrizione.

Riteniamo, però, opportuno, in questa I Nota chiarire alcuni dubbi e rimuovere qualche erronea interpretazione nei riguardi del parallelismo generalizzato, da noi introdotto, ed i suoi rapporti col parallelismo assoluto ⁽³⁾.

2. Se un parallelismo è assoluto, fissata una direzione in un punto P della V_2 , resta fissata, biunivocamente, la direzione parallela in un qualsiasi punto della V_2 . Considerando, quindi, ciascun punto di V_2 come sostegno di infiniti punti orientati, deve restar fissata, in modo unico, la corrispondenza fra due qualunque fasci, in maniera che il prodotto delle corrispondenze fra P_0 e P_1 , e fra P_1 e P_2 conduca ad una corrispondenza fra P_0 e P_2 coincidente con quella ottenuta, direttamente, nel passaggio da P_0 a P_2 .

Possiamo, però, pensare ad un parallelismo assoluto nella V_2 , ottenuto nel seguente modo.

Fissato un sistema ∞^1 di curve, consideriamo parallele le tangenti lungo ciascuna di queste curve e quelle a due curve generiche distinte.

In tali ipotesi, un sistema di curve autoparallele, diverso dal fondamentale testè definito, dovrà incontrare isogonalmente le curve di quest'ultimo, come si riconosce pensando al trasporto rigido.

Ovviamente, di tali sistemi di curve autoparallele ne esistono una semplice infinità, isogonali fra loro. Il sistema ∞^2 di curve risultante è tale che, per due punti generici passa una sola curva.

Con semplici considerazioni si può vedere che un parallelismo così definito è assoluto.

Siano fissati, infatti, tre punti P, Q, R : per P e Q passa una (ed una sola) autoparallela, per Q ed R un'altra. Consideriamo l'autoparallela c del sistema cui appartiene PQ , passante per R . Per via della isogonalità l'an-

(1) Nella seduta del 21 giugno 1931.

(2) «Rend. R. Acc. dei Lincei», 1930, vol. XII, fasc. 1-2.

(3) Vedi E. BORTOLOTTI, *Parallelismi assoluti nelle V_n riemanniane*, «Atti R. Istituto Veneto», t. LXXXVI, parte seconda.

golo (orientato) γ delle due curve RP, PQ è uguale all'angolo delle due curve RP, c ; analogamente, l'angolo α delle due curve PQ, QR è uguale all'angolo delle due curve QR, c , dunque la somma degli angoli esterni (orientati) del triangolo curvilineo PQR , dianzi costituito, è 2π . Ne consegue che il trasporto di una direzione da P a Q , lungo PQ , e successivamente da Q ad R , lungo QR , conduce allo stesso risultato cui dà luogo il trasporto diretto da P ad R , lungo PR . Ed in effetti, la direzione t della PQ in P , trasportata autoparallelamente lungo PQ , prima, e QR , poi, dà luogo, in R , alla direzione t_1 formante l'angolo α con la direzione della PQ e quindi l'angolo $\alpha + \beta$ con quella della RP . Questa ultima si trasporta, autoparallelamente, nella direzione t' della RP in P : perchè il parallelismo sia senza residuo occorre e basta che trasportata, autoparallelamente, la t_1 lungo RP , in P , l'angolo (orientato) $(t_1, t') \equiv \alpha + \beta$ sia tale che $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, il che si realizza, appunto, con la scelta del sistema ∞^2 di autoparallele nel modo anzidetto.

In particolare, fra gli ∞^1 sistemi di autoparallele possiamo scegliere quello ortogonale al fondamentale. Si otterrà, sulla V_2 , un sistema di coordinate ortogonali che, com'è ovvio, fissano, completamente, il parallelismo assoluto.

È facile vedere, reciprocamente, che, assegnato su una V_2 un parallelismo assoluto, fissata, cioè, una corrispondenza tra i diversi fasci di punti orientati, resta subordinato un sistema ∞^2 di curve (autoparallele) tali che, lungo ciascuna di esse s'incontrino punti e tangenti corrispondentisi nel fissato parallelismo assoluto. In effetti, pensati due punti P e P_1 infinitamente vicini e dette t e t_1 due direzioni da essi spiccate corrispondentisi nel fissato parallelismo, esiste, genericamente, una curva passante per P e P_1 le cui tangenti in detti punti formino con t e t_1 , rispettivamente, angoli eguali.

Resta, così, provato che, ad un parallelismo assoluto è sempre associato un sistema di curve autoparallele che lo caratterizza.

Riandiamo, ora, al parallelismo generalizzato da noi introdotto.

Nell'istituirne il confronto col parallelismo assoluto, ha subito rilievo il carattere che ne differenzia la portata. Pel primo, infatti, è ancora definito, come pel secondo, un sistema fondamentale di ∞^1 curve, ma non vi è affatto obbligo, per gli altri sistemi, di isogonalità al primo, cosa ch'è, all'incontro, necessaria nella definizione di parallelismo assoluto. Non si può, dunque, affermare, in generale che, il trasporto da P a Q , prima, e da Q ad R , poi; ed il trasporto da P ad R siano operazioni equivalenti agli effetti del trasporto autoparallelo.

Le considerazioni svolte permettono di concludere, pertanto, che:

Il parallelismo generalizzato da noi introdotto comprende, quali casi particolari, quello di Levi-Civita e quello di Vitali-Weitzenböck: si riduce al primo quando il sistema delle curve è quello delle geodetiche; si riduce al secondo

quando il sistema delle autoparallele si scinde in ∞' sistemi tali che, ciascuna curva d'un sistema incontri isogonalmente quella di un altro.

È, qui, da rilevare che, la definizione di parallelismo assoluto da noi data, potrebbe portare a delle singolarità nella determinazione di direzioni in esso corrispondentisi, ove le curve del sistema fondamentale si incontrassero genericamente tra loro. Per liberarci da tali possibili singolarità dovremo supporre o che le linee non si incontrino o che, incontrandosi esse si tocchino con l'obbligo d'una comune tangente (orientata).

3. Poche altre parole sul parallelismo senza residuo, in una V_2 .

Trovo non del tutto fuori posto, se pur, alquanto tardivo, il desiderio di giustificare una denominazione da noi introdotta nella citata Nota, ed, in pari tempo, opportuno, quello di mettere tale denominazione in relazione con altra in uso: intendo riferirmi alla locuzione: parallelismo « senza residuo ».

Consideriamo il triangolo ABC costituito da autoparallele.

Trasportiamo, lungo tale triangolo, a partire da A, per esempio, la direzione t del lato AB, nel verso da A a B. In generale, la determinazione finale di t non coinciderà con quella iniziale, ossia, l'angolo ω , che la determinazione finale forma con l'iniziale — « angolo di parallelismo » ⁽¹⁾ — non sarà uguale a 2π . Si ha, in altri termini, un angolo « residuo » determinato da $2\pi - \omega$, in generale non nullo. Al coincidere delle due direzioni in partenza ed in arrivo, per determinati parallelismi, corrisponderà un « residuo » nullo, ed il parallelismo si dirà — come si è fatto — « senza residuo ». Tale denominazione ci è sembrata la più comprensiva tra quelle che, con eguale intendimento, si sarebbero potute adottare.

4. Sia assegnato, sulla V_2 , un parallelismo senza residuo. Il trasporto autoparallelo da un punto P ad un punto P_1 di una direzione, non dipenderà, allora, dalla poligonale di autoparallele congiungente i detti punti. La direzione t , in P, di una curva del sistema fondamentale di definizione del fissato parallelismo assoluto, avrà la sua corrispondente, in P_1 , nella direzione t_1 della curva dello stesso sistema passante per P_1 . Sia assegnato, ora, sulla stessa V_2 , un nuovo parallelismo assoluto. In questo, alla direzione t , in P, corrisponderà, in P_1 , la t_1^* , in generale differente da t_1 , e l'angolo $(\widehat{t_1, t_1^*})$ non dipenderà dal cammino congiungente i punti P, P_1 , ma, unicamente, dai parametri fissanti, nel punto, le curve dei sistemi fondamentali generatori dei due parallelismi assegnati. Di conseguenza, tale angolo è funzione del punto.

Pel suo carattere di gradiente, allora, esso si presenta, nell'infinitesimo, sotto veste di differenziale esatto e ne consegue che il trasporto da P a P_1 , attraverso una catena di punti collegati da autoparallele è indipendente dalla catena stessa. Epperò, nonostante l'equivalenza tra le due definizioni inerenti alle dizioni « olonomo » e « senza residuo » è da ricercare in quanto pre-

(1) V. LEVI-CIVITA, *Calcolo diff. assoluto*.

cede il motivo geometrico che ha consigliato la differente denominazione.

5. Vogliamo, per ultimo, stabilire una proprietà inerente al parallelismo di Levi-Civita senza residuo.

Su una superficie, si è visto, un parallelismo senza residuo è caratterizzato da un sistema ∞^2 di curve, sotto le note ipotesi. Supponiamo, in particolare, che il sistema fondamentale, di cui al § 2, sia costituito da geodetiche. Di sistemi di geodetiche isogonali a questo, ve n'è sicuramente, ma, in generale, non accadrà che la somma degli angoli esterni orientati: α, β, γ d'un triangolo ABC costituito da geodetiche tra quelle determinanti il parallelismo, sia 2π . Supponiamo ciò accada. Sarà, in tal caso, nulla la curvatura gaussiana e quindi la superficie sarà sviluppabile; e reciprocamente. Segue che *un parallelismo di Levi-Civita è senza residuo, allora ed allora soltanto che esso ha luogo su una superficie sviluppabile.*

Matematica. — *Sulle proprietà asintotiche dei potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni illimitate di masse*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di C. MIRANDA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota è stata suscitata dallo studio di una recente Memoria del prof. Levi-Civita⁽³⁾, nella quale egli estende a campi illimitati potenzianti newtonianamente le note formule per il comportamento all'infinito del potenziale e delle sue derivate. La teoria del potenziale, come trovasi esposta nelle *Lezioni di Analisi infinitesimale* del prof. Picone⁽⁴⁾, non è che una sistematica applicazione della teoria del passaggio al limite sotto il segno integrale, secondo l'assetto dato a questa teoria nelle dette *Lezioni*. In questo lavoro riottengo con grande semplicità i risultati del prof. Levi-Civita facendo appello ai detti teoremi.

La formula

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \overline{OM} \int_T \frac{\mu(P)}{PM} dT(P) = \int_T \mu(P) dT(P)$$

può scriversi

$$(\alpha) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \int_T \mu(P) \left(\frac{\overline{OM}}{PM} - 1 \right) dT(P)$$

e poichè per ogni P la funzione integranda è infinitesima per M che tende verso l'infinito, possiamo dire che tutti i teoremi che consentono il passaggio

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1931.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Sui potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni che si estendono illimitatamente*, « Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Padova », nn. 3-4).

(4) M. PICONE, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, « Circolo Matematico di Catania ».

al limite sotto il segno integrale, offrono altrettante condizioni per la validità della (α) . Pertanto per ottenere i risultati del prof. Levi-Civita non ho fatto altro che constatare la possibilità nei vari integrali che si presentano dal passaggio al limite sotto di essi.

Ho poi anche considerato i potenziali newtoniani di linea.

Ricorderò il seguente teorema⁽¹⁾ di cui mi varrò spesso in seguito:

Sia $f(P, Q)$ una funzione del punto P sommabile in un dominio illimitato T , qualunque sia Q ed esista il $\lim_{Q \rightarrow \infty} f(P, Q)$. Condizione sufficiente affinchè sia

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \int_T f(P, Q) dT(P) = \int_T \lim_{Q \rightarrow \infty} f(P, Q) dT(P)$$

è che, dato ε , si possa trovare un δ_ε tale che, detta O l'origine delle coordinate e T_R la parte di T esterna alla sfera S_R di centro O e raggio R si abbia

$$\left| \int_{T_R} f(P, Q) dT(P) \right| < \varepsilon \quad \text{per } \overline{OQ} > \delta_\varepsilon \text{ e } R > \delta_\varepsilon$$

La proprietà ora specificata della funzione $f(P, Q)$ si chiama anche *uniforme sommabilità su T nell'intorno dell'infinito*.

1. *Potenziali di volume.* — Indicheremo con P il punto generico del campo potenziente illimitato T , con M il punto potenziato e porremo:

$$\overline{OP} = \rho, \quad \overline{OM} = \lambda, \quad \widehat{MOP} = \varphi, \quad \overline{MP} = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2 - 2\lambda\rho \cos \varphi} = r.$$

Diremo poi $\mu(P)$ la densità che supporremo limitata in T e tale che per $\rho > 1$ sia

$$|\mu(P)| \leq \frac{K}{\rho^\beta + \alpha}$$

essendo K ed α due costanti la seconda delle quali può evidentemente suporsi minore di uno.

La funzione potenziale sarà infine indicata con:

$$V(M) = \int_T \frac{\mu(P)}{r} dT.$$

I. *Sotto le ipotesi poste si ha:*

$$(1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda V(M) = \int_T \mu(P) dT.$$

(1) Cfr. PICONE, loc. cit., teorema VII del n. 95.

Per quel che si è detto basterà dimostrare che la funzione $\mu(P)\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right)$ è funzione di P uniformemente sommabile su T nell'intorno dell'infinito. Ora, per essere $|\lambda - r| < \rho$, si ha per $R > 1$

$$\left| \int_{T_R} \mu(P) \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) dT \right| \leq 2\pi K \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^\alpha \sqrt{\rho^2 + \lambda^2 - 2\lambda\rho \cos \varphi}} \quad (1).$$

Ponendo $\rho = \lambda t$ si ha:

$$\left| \int_{T_R} \mu(P) \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) dT \right| \leq \frac{2\pi K}{\lambda^\alpha} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2 + 1 - 2t \cos \varphi}}$$

il che prova la verità dell'asserto.

II. Nelle stesse ipotesi del teorema I si ha:

$$(2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} -\lambda^2 \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \int_T \mu(P) dT.$$

Poichè

$$-\lambda^2 \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \int_T \mu(P) \frac{\lambda^3 - \lambda^2 \rho \cos \varphi}{r^3} dT$$

tenendo conto del teorema I, basterà far vedere che

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_T \mu(P) \left(\frac{\lambda^3 - \lambda^2 \rho \cos \varphi}{r^3} - \frac{\lambda}{r} \right) dT = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_T \mu(P) \frac{\lambda \rho (\lambda \cos \varphi - \rho)}{r^3} dT = 0.$$

Ciò discende immediatamente dalle relazioni:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(P) \frac{\lambda \rho (\lambda \cos \varphi - \rho)}{r^3} = 0$$

$$\left| \frac{\lambda \cos \varphi - \rho}{r} \right| < 1$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{T_R} \mu(P) \frac{\lambda \rho (\lambda \cos \varphi - \rho)}{r^3} dT \right| &\leq K \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_R^\infty \frac{\lambda d\rho}{\rho^\alpha (\rho^2 + \lambda^2 - 2\lambda\rho \cos \varphi)} \quad (2) \leq \\ &\leq \frac{K}{\lambda^\alpha} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha (1 + t^2 - 2t \cos \varphi)} \end{aligned}$$

dove si suppone $R < 1$.

(1) Osserviamo che la funzione sotto il segno di integrale *doppio* diventa infinita *solo* del primo ordine nel punto $\rho = \lambda$, $\varphi = 0$.

(2) Osserviamo che la funzione sotto il segno di integrale *triplo* diventa infinita *solo* del secondo ordine nel punto $\rho = \lambda$ e $\varphi = 0$.

Se ci riferiamo alle formule (18) di p. 489 delle citate *Lezioni* del prof. Picone, relative al potenziale di uno strato sferico sfericamente stratificato, possiamo anche subito enunciare il seguente teorema:

III. *Se il dominio T, ottenuto dallo spazio privandolo dei punti interni ad una sfera, è sfericamente stratificato con densità μ sommabile su T sussisteranno le formule (1) e (2). Ne segue che la (1) è valida per un qualsiasi dominio T illimitato purchè $|\mu(P)|$ non superi una funzione della sola ρ sommabile in tutto lo spazio.*

2. *Potenziali di superficie.* — Indicheremo con σ una superficie regolare illimitata suscettibile di una rappresentazione cartesiana

$$z = f(x, y);$$

con T il dominio base di σ sul piano xy ; con T_R la parte di T esterna al cerchio di centro O e raggio R; con ϑ l'angolo che OQ forma col piano xy ; con P' e M' le proiezioni di P e M su xy e porremo

$$\overline{OP'} = \xi, \quad \widehat{M'OP'} = \gamma, \quad \overline{P'M'} = \sqrt{\xi^2 + \lambda^2 \cos^2 \vartheta - 2\lambda\xi \cos \vartheta \cos \gamma} = \Delta.$$

Diremo inoltre $v(P)$ la densità che supporremo limitata e tale che per $\rho > 1$ sia

$$|v(P) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}| \leq \frac{K}{\rho^{2+\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

La funzione potenziale sarà

$$W(M) = \int_{\sigma} \frac{v(P)}{r} d\sigma = \int_T v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \frac{1}{r} dx dy.$$

IV. *Sotto le ipotesi poste per $v(P)$ si ha:*

$$(3) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W(M) = \int_{\sigma} v(P) d\sigma$$

uniformemente al tendere di M all'infinito nel dominio H ottenuto dallo spazio privandolo dei punti di un cono circolare retto di asse r , vertice O, e apertura arbitraria.

Basterà dimostrare che la funzione

$$v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \left(\frac{\lambda}{1} - 1 \right)$$

è uniformemente sommabile su T quando Q tende all'infinito su H . Ed infatti per $R > 1$ si ha:

$$\left| \int_{T_R} v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) dx dy \right| \leq \\ \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\xi d\xi}{\rho^{1+\alpha} r} \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{d\xi}{\xi^\alpha \Delta}.$$

Ponendo $\xi = \lambda \cos \vartheta \cdot t$ si ha:

$$K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{d\xi}{\xi^\alpha \Delta} \leq \frac{K}{(\lambda \cos \vartheta)^\alpha} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2 + 1 - 2t \cos \gamma}}$$

ciò che dimostra l'asserto perchè $\frac{1}{\cos \vartheta}$ è limitato in H .

V. Se M tende all'infinito su H (vedi teorema IV) e in modo inoltre che la distanza PM si mantenga maggiore di un numero positivo l si ha, uniformemente,

$$(4) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} -\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial \lambda} = \int_{\sigma} v(P) d\sigma.$$

Infatti

$$\left| \int_{T_R} v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \frac{\lambda \rho (\lambda \cos \varphi - \rho)}{r^3} dx dy \right| \leq \\ \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\lambda \rho \xi d\xi}{\rho^{2+\alpha} r^2} \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\lambda d\xi}{\xi^\alpha r^2}.$$

Se ora p è un tal numero da risultare $2 - \alpha < p < 2$, $\frac{1}{\Delta}$ sarà integrabile nel piano e dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{r^2} < \frac{1}{\Delta^p} \cdot \frac{1}{l^{2-p}}$$

discenderà

$$K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\lambda d\xi}{\xi^\alpha r^2} \leq \frac{K}{l^{2-p}} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\lambda d\xi}{\xi^\alpha \Delta^p} < \\ < \frac{K}{l^{2-p}} \frac{1}{(\lambda \cos \vartheta)^{p+\alpha-2}} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha (t^2 + 1 - 2t \cos \gamma)},$$

ciò che prova il teorema, perchè $\frac{1}{\cos \vartheta}$ è limitato in H .

VI. Se M tende all'infinito lungo l'asse z sussistono ancora le formule (3) e (4).

Scelto ad arbitrio un asse polare u nel piano xy e posto $u \cdot OP' = \gamma$, tenendo presente che $\frac{1}{r} < \frac{1}{\xi}$, si ha per $R > 1$

$$\left| \int_{T_R} v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1 \right) dx dy \right| \leq \\ \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1+\alpha}} = \frac{2\pi K}{\alpha} \frac{1}{R^\alpha}$$

c

$$\left| \int_{T_R} v(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \frac{\lambda \rho (\lambda \cos \varphi - \rho)}{r^3} dx dy \right| \leq \\ \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\lambda \xi d\xi}{\rho^{1+\alpha} r^2} \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{(\rho + r) \xi d\xi}{\rho^{1+\alpha} r^2} \leq \\ \leq K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{\xi^{1-\alpha} d\xi}{r^2} + K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{d\xi}{\xi^\alpha r} \leq 2K \int_0^{2\pi} d\gamma \int_R^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1+\alpha}} = \frac{4\pi K}{\alpha} \frac{1}{R^\alpha}.$$

Osserviamo infine che, se si fa col prof. Levi-Civita l'ipotesi che σ si possa mettere in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione ortogonale su due piani per O , le relazioni (3) e (4) sussistono uniformemente al tendere di M ad infinito in tutto lo spazio.

3. *Potenziiali di linea.* - Indicheremo con C una curva regolare illimitata di equazioni

$$y = y(x) \quad , \quad z = z(x);$$

con T l'intervallo base di C sull'asse x , che supporremo contenuto nel semiasse positivo; con T_R la parte di T esterna all'intervallo $(0, R)$; con ϑ l'angolo di OM con l'asse x . Diremo inoltre $\omega(P)$ la densità che supporremo limitata e tale che per $\rho > 1$ sia

$$|\omega(P) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}| < \frac{K}{\rho^{1+\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

VII. Sotto le ipotesi poste per $\omega(P)$ si ha

$$(5) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda U(Q) = \int_C \omega(P) ds$$

uniformemente al tendere di M all'infinito in un cono completo circolare retto H , di asse x , vertice O , e apertura arbitraria, privato dei punti che hanno da C distanza minore di un assegnato numero l .

Si ha per $R < 1$

$$\left| \int_{T_R} \omega(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \left(\frac{\lambda}{2} - 1 \right) dx \right| \leq K \int_R^\infty \frac{dx}{\rho^\alpha r} \leq K \int_R^\infty \frac{dx}{x^\alpha r}.$$

Se p è un tal numero da risultare $1 - \alpha < p < 1$ la funzione $\frac{1}{|\lambda \cos \vartheta - x|^p}$ è sommabile in (R, ∞) e dalla disegualianza

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{l^{1-p}} \frac{1}{|\lambda \cos \vartheta - x|^p}$$

discende, col solito cambiamento di variabili

$$K \int_R^\infty \frac{dx}{x^\alpha r} < \frac{1}{l^{1-p}} \int_R^\infty \frac{dx}{x^\alpha |\lambda \cos \vartheta - x|^p} < \frac{1}{l^{1-p}} \frac{1}{(\lambda \cos \vartheta)^{p+\alpha-1}} \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha |1-t|^p}$$

il che dimostra il teorema perchè $\frac{1}{\cos \vartheta}$ è limitato in H .

VIII. Se M tende all'infinito pel piano y^r sussiste ancora la (5).

Infatti per $R > 1$, per essere $\frac{1}{r} < \frac{1}{x}$

$$\left| \int_{T_R} \omega(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \left(\frac{\lambda}{r} - 1 \right) dx \right| \leq K \int_R^\infty \frac{dr}{x^{1+\alpha}} = \frac{K}{\alpha} \frac{1}{R^\alpha}.$$

Matematica (Analisi Matematica). — *Maggiorazione delle soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di P. CLEMENTE, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Nelle scienze applicate, specialmente nella Elettrotecnica, si presenta spesso il problema del calcolo approssimato della soluzione periodica di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, e la soluzione di tale problema deve essere ottenuta con la simultanea maggiorazione dell'errore di approssimazione commesso.

Sono stati recentemente segnalati (cfr. « Bollettino d'informazioni del Consiglio Nazionale delle ricerche », anno II, n. 6, pp. 137-147) importanti problemi di applicazione proposti all'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli nei quali la questione sopraddetta deve essere risolta.

Seguendo le idee ed i metodi del prof. Picone per il calcolo indicato⁽³⁾ occorre anzitutto dare formole di maggiorazione della soluzione e delle sue derivate, occorre cioè determinare i numeri L_0, L_1, \dots , per modo che, nell'intervallo di periodicità della soluzione, il modulo di questa non superi L_0 ed il modulo della sua derivata *kesima* non superi L_k .

Ho considerato l'equazione del secondo ordine autoaggiunta

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(\theta \frac{dy}{dx} \right) + A(x)y = f(x)$$

in un intervallo (a, b) di continuità per i suoi coefficienti e per il termine noto nella ipotesi che $\theta(x), A(x), f(x)$ siano periodiche con periodo $b - a$.

Dicendo nel seguito che $y(x)$ è una soluzione periodica della (1) sottintenderemo sempre che essa sia di periodo $b - a$ per il che occorre e basta che essa verifichi le condizioni:

$$\begin{aligned} y(a) - y(b) &= 0, \\ y'(a) - y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Già il dott. Prete⁽⁴⁾ ha stabilito la maggiorazione della soluzione periodica della (1) nella ipotesi che in tutto l'intervallo (a, b) riesca $A(x) < 0$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1931.

(3) M. PICONE, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della fisica-matematica*, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », 1928.

(4) F. PRETE, *Formole di maggiorazione per le soluzioni di un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine in due funzioni incognite*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », 1930. Qui non è supposta la forma autoaggiunta dell'equazione.

Nella mia Tesi di Laurea, presentemente in corso di stampa, nella quale ho anche ricercato criteri di esistenza per le soluzioni periodiche delle equazioni del tipo (1), ho dato talune formole di maggiorazione per queste soluzioni mettendomi nella ipotesi, assai importante nelle applicazioni, che il coefficiente $A(x)$ si mantenga positivo in tutto il suo intervallo di periodicità.

In questa breve Nota mi permetto di comunicare le formole a cui sono pervenuto. Noterò che, salvo un iniziale caso particolare, le dette formole di maggiorazione presuppongono la conoscenza approssimata degli autovalori del parametro λ relativi alle equazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\theta \frac{dy}{dx} \right) + \lambda A(x) y = 0, \\ y(a) - y(b) = 0, \\ y'(a) - y'(b) = 0, \end{array} \right.$$

che siano più prossimi, l'uno per eccesso, l'altro per difetto, all'unità.

Da tale conoscenza non si può peraltro prescindere, come è ovvio, poichè la soluzione periodica della equazione

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \left(\theta \frac{dy}{dx} \right) + \lambda A(x) y = f(x)$$

riesce una funzione meromorfa in λ che ha precisamente per poli gli autovalori di λ e pertanto se l'unità è un autovalore per le (2) non ha senso il problema di maggiorazione, e se non lo è la conoscenza del numero maggiorante dipenderà evidentemente da quella di un intervallo che, contenendo il punto uno nel suo interno, escluda ogni autovalore.

In ogni modo sono presentemente oggetto di studi nello Istituto di Calcolo della R. Università di Napoli metodi rapidi per il calcolo approssimato degli autovalori. Ed i risultati che si conseguiranno in tale studio varranno a rendere applicabili le formole che qui stabilisco.

1. MAGGIORAZIONE PER $A(x)$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO.

Porremo:

$$\max |f| = F, \quad \max |A| = M, \quad \min |A| = m, \quad \min \theta = p.$$

Per l'ipotesi fatta sarà sempre $m > 0$ e sussiste il teorema:

I. Se risulta

$$1 - \frac{(b-a)^2 M}{p} > 0,$$

$\max |y|$ sarà minore del più grande dei due numeri

$$\frac{F}{m} \quad \text{e} \quad \frac{\frac{F}{m} + \frac{F}{2p}(b-a)^2}{1 - \frac{(b-a)^2 M}{p}} + \frac{\sqrt{\Delta}}{1 - \frac{(b-a)^2 M}{p}},$$

dove

$$\Delta = \frac{F^2(b-a)^2}{4p^2} + \frac{F^2(b-a)^2}{pm} + \frac{(b-a)^2 M}{p} \cdot \left(\frac{F}{m}\right)^2 > 0.$$

Ne segue:

II. La quantità

$$\frac{p}{(b-a)^2 M}$$

fornisce un valore approssimato per difetto del più piccolo autovalore.

2. MAGGIORAZIONE PER $A(x)$ COMUNQUE GRANDE.

Imitando ed estendendo opportunamente un procedimento dato dal prof. Picone⁽¹⁾, con il quale si sfruttano le classiche proprietà di minimo degli autovalori, pervengo ai teoremi seguenti:

III. Sia μ_1, μ_2, \dots , la successione degli autovalori positivi per l'equazione (2). Se per un certo valore non nullo dello indice r si ha:

$$\mu_{r-1} < 1 < \mu_r,$$

noti gli autovalori μ_1, \dots, μ_r , per la soluzione periodica $y(x)$ sussiste la seguente formola di maggiorazione:

$$\begin{aligned} (5) \quad \max |y| \leq & F \left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1}{p} \frac{\mu_r}{\mu_r-1}} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b-a)^2}{p} \left(\frac{\mu_r}{\mu_r-1} + \frac{4M}{m} \sum_{k=1}^{r-1} \mu_k \right) + \frac{4}{m} + \frac{4M(b-a)}{m \int_a^b A dx}}^2 + \\ & \left. + F \frac{(b-a)^2}{p} \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_k}{1-\mu_k} + F \frac{(b-a)}{\int_a^b A dx} \right). \end{aligned}$$

(1) M. PICONE, *Sulle autosoluzioni e sulle formole di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggettate*, « Mathematische Zeitschrift », Berlin, 1928.

IV. Se μ'_k e μ''_k indicano due valori approssimati dello autovalore μ_k , il primo per difetto e il secondo per eccesso, e se riesce

$$\mu''_k < 1 < \mu'_k, \quad (k = 1, \dots, r-1)$$

sussiste la formula di maggiorazione:

$$(6) \quad \max |y| \leq F \left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1}{p} \frac{\mu'_r}{\mu'_r - 1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b-a)^2}{p} \left(\frac{\mu'_r}{\mu'_r - 1} + \frac{4(r-1)M\mu''_{r-1}}{m} \right) + \frac{4}{m} + \frac{4M(b-a)}{m \int_a^b A dx}} \right)^2 + \\ + F \frac{(b-a)^2}{p} \frac{(r-1)\mu''_{r-1}}{1 - \mu''_{r-1}} + F \frac{(b-a)}{\int_a^b A dx}.$$

È opportuno rilevare i seguenti casi particolari dei teoremi ora stabiliti:

V. Se il più piccolo autovalore positivo μ_1 è maggiore di uno e se μ'_1 rappresenta un suo valore approssimato per difetto, del pari maggiore di uno, sussiste la formula di maggiorazione:

$$(7) \quad \max |y| \leq F \left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{1}{p} \frac{\mu'_1}{\mu'_1 - 1}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b-a)^2}{p} \frac{\mu'_1}{\mu'_1 - 1} + \frac{4}{m} + \frac{4M(b-a)}{m \int_a^b A dx}} \right)^2 + F \frac{(b-a)}{\int_a^b A dx}.$$

Poichè si dimostra che il più piccolo autovalore positivo λ_0 per le equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\theta \frac{dy}{dx} \right) + \lambda A(x) y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

è minore di μ_1 possiamo dunque dire che:

Se il più piccolo autovalore λ_0 del problema di Sturm-Lionville è maggiore di uno, per la soluzione periodica $y(x)$ della (1), sussiste la formula di maggiorazione che si deduce dalla (7) ponendovi λ_0 in luogo di μ'_1 .

In particolare ancora: Se riesce

$$\pi^2 p - (b-a)^2 M > 0$$

risulterà

$$\lambda_0 > \frac{\pi^2 p}{(b-a)^2 M} > 1$$

e sussiste la formola di maggiorazione che si ottiene dalla (7) ponendovi $\frac{\pi^2 p}{(b-a)^2 M}$ in luogo di μ_1 .

Notiamo che il teorema II riesce anche corollario della relazione

$$\lambda_0 < \mu_1.$$

3. MAGGIORAZIONE PER $A(x)$ COMUNQUE GRANDE E PER $f(x)$ DI MEDIA NULLA.

In molti problemi di oscillazione il termine noto $f(x)$ della equazione (1) riesce di media nulla ed ha perciò interesse lo stabilire le formole di maggiorazione in tale ipotesi. Esse riescono notevolmente più semplici di quelle date precedentemente. Posto

$$\vartheta = \int_a^b \frac{dx}{\theta(x)},$$

mi varrò della seguente formola (1):

$$(\text{oscill } g)^2 \leq \vartheta \int_a^b \theta \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 dx,$$

avendo indicato con $\text{oscill } g$ l'oscillazione della funzione $g(x)$ nello intervallo (a, b) .

Pervengo ai teoremi:

VI. Se $\mu_{r-1} < 1 < \mu_r$ e se $\int_a^b f(x) dx = 0$, per la soluzione periodica $y(x)$ della (1) sussiste la seguente formola di maggiorazione

$$(9) \quad \max |y| \leq \vartheta (b-a) F \left(\frac{\mu_r}{\mu_r - 1} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\mu_k}{1 - \mu_k} \right).$$

VII. Se $\mu_1 > 1$ e se $\int_a^b f(x) dx = 0$ si ha:

$$(10) \quad \max |y| \leq \vartheta (b-a) F \frac{\mu_1}{\mu_1 - 1}.$$

Meccanica. — *Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles.* Nota ⁽¹⁾ di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

L'étude de la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles a été l'objet d'un grand nombre de travaux théoriques et expérimentaux, dont on peut trouver un résumé dans deux rapports récents ⁽²⁾. Toutefois à ce que nous sachions tous les auteurs se bornent à l'étude de l'équation *linéaire* obtenue en négligeant dans l'équation en ψ les termes d'ordre supérieur dans le paramètre suivant lequel on développe ψ . Il est évident que les fonctions obtenues n'étant pas des solutions de l'équation *exacte*, on ne peut dire rien d'exact sur le problème de la stabilité. L'équation exacte n'étant pas linéaire une solution complexe n'a pas de sens physique ce qui rend l'étude des perturbations pénible.

Dans cette Note et dans deux autres qui vont suivre je me suis proposé d'étudier un cas particulier du problème, à savoir la perturbation du *repos initial* qui s'annule exponentiellement à l'infini. Ce cas peut être traité *exactement* sans grande difficulté et il rend évident les circonstances singulières qui se présentent dans l'étude de l'équation exacte. À savoir, on a une *suite infinie d'équations caractéristiques* et une équation limite qui joue un rôle important.

Je me propose d'étudier dans des travaux suivants les perturbations *périodiques* ainsi que le cas général du mouvement *fondamental non nul*.

1. *Équations des mouvements voisins des mouvements laminaires.*

Envisageons le mouvement laminaire parallèle aux deux plans F_1, F_2 de coordonnées $y = -H, y = +H$ se mouvant avec les vitesses respectives $-U$ et $+U$ parallèlement à l'axe des x . Résolvons l'équation en ψ

$$(1) \quad \nu \Delta \Delta \psi - \frac{D(\psi, \Delta \psi)}{D(x, y)} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = 0$$

au moyen d'une série infinie

$$(2) \quad \psi = \psi_0 + \sum_1^{\infty} \epsilon^k \psi_k(x, y, t).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1931.

(2) F. NOETHER, *Das Turbulenzproblem*. «Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik», 1, 1921.

C. W. OSEEN, *Das Turbulenzproblem*, III Congrès international de Mécanique appliquée, Stockholm, 1930.

ψ_0 donne le *mouvement fondamental*. Nous supposons

$$(3) \quad \psi_0 = A_0 y^3 + 3 A_1 y^2 + 3 A_2 y + A_3 .$$

La vitesse u_0 fondamentale est donc égale à

$$u_0 = -\psi_{0y} = -3 A_0 y^2 - 6 A_1 y - 3 A_2 .$$

Les conditions aux parois sont

$$u_0(H) = U \quad , \quad u_0(-H) = -U \quad , \quad v(H) = 0 \quad , \quad v(-H) = 0 ,$$

v désignant la composante transversale de la vitesse ψ_{0x} ;

$$u_k(H) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad , \quad u_k(-H) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots .$$

On a donc

$$A_1 = -\frac{U}{6H} \quad , \quad A_2 = -A_0 H^2 ,$$

donc

$$(4) \quad u_0 = \frac{U}{H} y + 3 A_0 (H^2 - y^2) .$$

En développant de même la pression moyenne p suivant les puissances de ε

$$(5) \quad p = \sum_0^{\infty} \varepsilon^k p_k ,$$

on trouve

$$A_0 = -\frac{1}{6\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} .$$

En remplaçant dans l'équation (1) ψ par le développement (2) on a

$$(6) \quad \nu \Delta \Delta (\psi_0 + \sum \varepsilon^k \psi_k) - (\psi_{0x} + \sum \varepsilon^l \psi_{lx}) (\Delta \psi_{0y} + \sum \varepsilon^m \Delta \psi_{my}) + \\ + (\psi_{0y} + \sum \varepsilon^l \psi_{ly}) (\Delta \psi_{0x} + \sum \varepsilon^m \Delta \psi_{mx}) - \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \psi_0 + \sum \varepsilon^k \Delta \psi_k) = 0 .$$

Nous obtenons donc la *suite infinie* d'équations aux dérivées partielles

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu \Delta \Delta \psi_0 = 0 , \\ \nu \Delta \Delta \psi_1 - \psi_{1x} \Delta \psi_{0y} + \psi_{0y} \Delta \psi_{1x} - \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} = 0 , \\ \dots\dots\dots \\ \nu \Delta \Delta \psi_k - \psi_{kx} \Delta \psi_{0y} + \psi_{0y} \Delta \psi_{kx} - \frac{\partial \Delta \psi_k}{\partial t} = \\ = \sum_{\substack{l+m=k \\ l, m = 1 \dots k-1}} \psi_{lx} \Delta \psi_{my} - \psi_{ly} \Delta \psi_{mx} . \end{array} \right.$$

on en posant $K = -3 A_0$.

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \nu \Delta \Delta \psi_1 + 2 K \psi_{1x} - \Delta \psi_{1x} \left[\frac{U}{H} y + K (y^2 - H^2) \right] - \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \nu \Delta \Delta \psi_k + 2 K \psi_{kx} - \Delta \psi_{kx} \left[\frac{U}{H} y + K (y^2 - H^2) \right] - \frac{\partial \Delta \psi_k}{\partial t} = \\ = \sum_{\substack{l+m=k \\ l, m = 1 \dots k-1}} \psi_{lx} \Delta \psi_{my} - \psi_{ly} \Delta \psi_{mx}. \end{array} \right.$$

2. Réduction aux équations différentielles ordinaires.

Nous poserons maintenant

$$(9) \quad \psi_k = \sum_{h=0}^k e^{-\{ [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]x + [b\bar{\mu} + (k-h)\mu]t \}} \cdot f_{k-h,h}(y),$$

$k = 1, 2, \dots$

où $\lambda, \bar{\lambda}$ et de même $\mu, \bar{\mu}$ sont conjugués complexes.

En cas de λ, μ réels nous remplacerons l'expression (9) par l'expression

$$(10) \quad \psi_k = e^{-k\lambda x - k\mu t} f_k(y).$$

En remplaçant dans les équations aux dérivées partielles (8) ψ_k par l'expression (9) on obtient la suite infinie d'équations différentielles du quatrième ordre

$$(11) \quad \nu \{ f_{k-h,h}^{IV} + 2 [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^2 f_{k-h,h}'' + [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^4 \cdot f_{k-h,h} \} - \\ - 2K [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda] f_{k-h,h} + \{ f_{k-h,h}'' + [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^2 f_{k-h,h} \} \left\{ [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda] \cdot \right. \\ \cdot \left. \left[\frac{U}{H} y + K (y^2 - H^2) \right] + [b\bar{\mu} + (k-h)\mu] \right\} = \sum_{\substack{l+m=k, \\ l, m = 1 \dots k-1, \\ h' + h'' = h, \\ h', h'' \geq 0}} - \\ - [b'\bar{\lambda} + (l-h')\lambda] f_{l-h',h'} \{ f_{m-h'',h''}''' + [b''\bar{\lambda} + (m-h'')\lambda]^2 f_{m-h'',h''}' \} + \\ + [b''\bar{\lambda} + (m-h'')\lambda] f_{l-h',h'}' \cdot \{ f_{m-h'',h''}'' + [b''\bar{\lambda} + (m-h'')\lambda]^2 f_{m-h'',h''} \}, \\ k = 1, 2, \dots, \quad h = 0, 1, \dots, k.$$

Les deux premières équations sont

$$(12) \quad \nu \{ f_{1,0}^{IV} + 2\lambda^2 f_{1,0}'' + \lambda^4 f_{1,0} \} - 2K\lambda f_{1,0} + [f_{1,0}'' + \lambda^2 f_{1,0}] \left\{ \lambda \left[\frac{U}{H} y + K (y^2 - H^2) + \mu \right] \right\} = 0$$

et l'équation obtenue en remplaçant λ, μ par $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$, $f_{1,0}$ par f_{01} .

Nous poserons

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{k-h,b} &= f''_{k-h,b} + [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^2 f_{k-h,b} \\ \nu F_{k-h,b} &= \sum_{\substack{l+m=k, \\ l,m=1 \dots k-1, \\ b'+b''=b,}} -[b'\bar{\lambda} + (l-l')\lambda] f_{l-h',b'} \cdot \varphi_{m-h'',b''} + \\ &+ [b''\bar{\lambda} + (m-b'')\lambda] f'_{l-h',b'} \varphi_{m-h'',b''}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas de $K = 0$ on a le mouvement linéaire $u_0 = \frac{U}{H} y$, « simple shearing » envisagé par Sommerfeld, Hopf et autres. Nous nous bornerons pour le moment à ce cas. Les équations différentielles (12) *se décomposent* en deux équations du 2^{me} ordre, dont l'une (13) est celle des mouvements harmoniques. On a les équations déterminant les φ

$$(14) \quad \nu \varphi''_{k-h,b} + \left\{ \nu [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^2 + [b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda] \frac{U}{H} y + \right. \\ \left. + [b\bar{\mu} + (k-h)\mu] \right\} \varphi_{k-h,b} = \nu F_{k-h,b}.$$

Si les λ, μ sont *réels*, on a simplement

$$(15) \quad \nu \varphi''_k + \nu \left(k^2 \lambda^2 + k\lambda \frac{U}{H} y + k\mu \right) \varphi_k = \nu F_k.$$

3. *Cas particulier de $U = 0$.*

Nous supposons dans ce qui suit $U = 0$, c'est à dire nous étudierons les perturbations *du repos initial*. Dans ce cas particulier les équations (14) s'intègrent élémentairement et on obtient

$$(16) \quad \varphi_{k-h,b} = A_{k-h,b} \sin r_{k-h,b} y + B_{k-h,b} \cos r_{k-h,b} y + \\ + \frac{1}{r_{k-h,b}} \int_0^y \sin r_{k-h,b} (y-u) F_{k-h,b} u du,$$

où l'on a posé

$$r_{k-h,b} = \sqrt{[b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda]^2 + \frac{b\bar{\mu} + (k-h)\mu}{\nu}}.$$

Nous poserons aussi

$$b\bar{\lambda} + (k-h)\lambda = p_{k-h,b}.$$

On obtiendra les $f_{k-h,b}$ par la formule

$$(17) \quad f_{k-h,b} = A'_{k-h,b} \sin p_{k-h,b} y + B'_{k-h,b} \cos p_{k-h,b} y + \\ + \frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^y \sin p_{k-h,b} (y-u) \varphi_{k-h,b} u \, du.$$

Les conditions aux limites sont

$$f_{k-h,b}(H) = f_{k-h,b}(-H) = f'_{k-h,b}(H) = f'_{k-h,b}(-H) = 0.$$

On a donc les conditions

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & A'_{k-h,b} \sin p_{k-h,b} H + B'_{k-h,b} \cos p_{k-h,b} H + \frac{1}{p_{k-h,b}} \cdot \\ & \cdot \int_0^H \sin p_{k-h,b} (H-u) \varphi_{k-h,b}(u) \, du = 0, \\ & -A'_{k-h,b} \sin p_{k-h,b} H + B'_{k-h,b} \cos p_{k-h,b} H + \\ & + \frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^{-H} \sin p_{k-h,b} (-H-u) \cdot \varphi_{k-h,b}(u) \, du = 0, \\ & A'_{k-h,b} \cos p_{k-h,b} H - B'_{k-h,b} \sin p_{k-h,b} H + \\ & + \frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^H \cos p_{k-h,b} \cdot (H-u) \varphi_{k-h,b}(u) \, du = 0, \\ & A'_{k-h,b} \cos p_{k-h,b} H + B'_{k-h,b} \sin p_{k-h,b} H + \\ & + \frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^{-H} \cos p_{k-h,b} (-H-u) \cdot \varphi_{k-h,b}(u) \, du = 0. \end{aligned} \right.$$

Multipliant les relations (18) 1^{re} et 3^{me} par \sin , \cos et sommant et multipliant ces relations de même par \cos , $-\sin$ et sommant en obtient

$$A'_{k-h,b} = -\frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^H \cos p_{k-h,b} u \cdot \varphi_{k-h,b}(u) \, du, \\ B'_{k-h,b} = \frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^H \sin p_{k-h,b} u \cdot \varphi_{k-h,b}(u) \, du.$$

Nous supposons $p_{k-h,b}$ différent de zéro, donc si l'on a $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, on suppose que l'on n'a pas à la fois $\lambda' = 0$, $k = 2h$.

On obtient donc

$$(19) \quad f_{k-h,b} = -\frac{1}{p_{k-h,b}} \int_0^H \sin p_{k-h,b} (y-u) \varphi_{k-h,b}(u) du.$$

Multiplions maintenant la 2^{me} et la 4^{me} relation (18) par cos, sin en sommant, puis par sin, —cos en sommant. En comparant les valeurs obtenues de $A_{k-h,b}$, $B_{k-h,b}$ avec les valeurs précédentes on obtient les deux conditions suivantes

$$(20) \quad \begin{cases} \int_0^H \cos(p_{k-h,b} u) [\varphi_{k-h,b}(u) + \varphi_{k-h,b}(-u)] du = 0, \\ \int_0^H \sin(p_{k-h,b} u) [\varphi_{k-h,b}(u) - \varphi_{k-h,b}(-u)] du = 0. \end{cases}$$

On a

$$F_{10} = 0, \quad F_{01} = 0,$$

donc

$$\varphi_{10} = A_{10} \sin r_{10} y + B_{10} \cos r_{10} y,$$

$$\varphi_{01} = A_{01} \sin r_{01} y + B_{01} \cos r_{01} y.$$

Les conditions (20) donnent donc les conditions

$$(21) \quad \begin{cases} A_{10} \int_0^H \sin p_{10} u \cdot \sin r_{10} u \cdot du = 0, \\ B_{10} \int_0^H \cos p_{10} u \cdot \cos r_{10} u \cdot du = 0, \end{cases}$$

et les mêmes conditions pour A_{01} , B_{01} .

Or on a

$$\begin{aligned} \int_0^H \sin p_{k-h,b} u \cdot \sin r_{k-h,b} u \cdot du &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(r_{k-h,b} - p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} - p_{k-h,b}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(r_{k-h,b} + p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} + p_{k-h,b}} \right\}, \\ \int_0^H \cos p_{k-h,b} u \cdot \cos r_{k-h,b} u \cdot du &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(r_{k-h,b} - p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} - p_{k-h,b}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(r_{k-h,b} + p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} + p_{k-h,b}} \right\}. \end{aligned}$$

On obtient donc les deux conditions

$$(22) \quad A_{10} \left\{ \frac{\sin \left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda \right) H}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda} - \frac{\sin \left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda \right) H}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda} \right\} = 0,$$

$$(23) \quad B_{10} \left\{ \frac{\sin \left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda \right) H}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda} + \frac{\sin \left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda \right) H}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda} \right\} = 0,$$

et les mêmes conditions avec $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ pour A_{01}, B_{01} .

Meccanica (Idrostatica). — *Sul centro delle pressioni idrostatiche*. Nota⁽¹⁾ di A. MASOTTI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. « Centro » di un sistema di vettori applicati, il cui risultante è diverso da zero, chiamasi quel punto dell'asse centrale del sistema rispetto al quale il viriale si annulla. — Oggetto di questa Nota è la determinazione del centro delle pressioni idrostatiche esercitate da un liquido omogeneo pesante sopra un solido totalmente o parzialmente immerso⁽²⁾.

Per un solido completamente immerso il centro delle pressioni idrostatiche è sulla verticale passante pel baricentro geometrico del solido, ad una profondità sotto al piano di carico che è *quadrupla* di quella del baricentro. Se il solido è cilindrico ed ha le generatrici orizzontali, il centro delle pressioni idrostatiche subite dalla sua unità di lunghezza è sulla verticale passante pel baricentro geometrico della sezione media, che è il baricentro geometrico dell'unità di lunghezza; la profondità del centro sotto al piano di carico è *trippla* di quella del baricentro. Pare notevole la circostanza che, in ambo i casi, la posizione del centro delle pressioni idrostatiche dipende *solo* dalla posizione del baricentro geometrico del solido o, nel caso piano, della sua sezione retta; non intervengono in modo esplicito nella determinazione del centro nè la forma nè la estensione del solido.

Se il solido è parzialmente immerso, il centro delle pressioni idrostatiche subite dalla parte immersa è ancora sulla verticale passante pel baricentro geometrico di questa; esso sta sempre sotto alla superficie libera, e la sua profondità sotto al piano di carico è *minore* del quadruplo, oppure del triplo, della profondità del baricentro stesso.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 luglio 1931.

(2) Si noti che il *centro delle pressioni idrostatiche*, relativo ad una parete piana, è il *centro di pressione*, di cui si discorre nella idrostatica.

2. La distribuzione delle pressioni idrostatiche in un liquido omogeneo pesante, di densità μ , è determinata dalla equazione

$$(1) \quad p = p_0 + \mu g \bar{z},$$

nella quale p indica la pressione alla profondità \bar{z} sotto alla superficie libera, e p_0 è la pressione atmosferica che si esercita sulla superficie libera; g designa la accelerazione della gravità.

Consideriamo il piano orizzontale posto sopra alla superficie libera, alla distanza

$$(2) \quad \delta = \frac{p_0}{\mu g}$$

da essa; questo piano è detto « piano di carico ». Se le profondità sotto al piano di carico sono designate con z , vale la relazione

$$(3) \quad p = \mu g z^{(1)}.$$

Nel liquido sia completamente immerso un solido S , limitato dalla superficie σ . Detto \mathbf{n} il versore della normale a σ volta verso S , sarà $\mu g z \mathbf{n} d\sigma$ la pressione idrostatica elementare subita dall'elemento superficiale $d\sigma$, attiguo al punto M posto alla profondità z sotto al piano di carico. Il viriale di tutte le pressioni idrostatiche elementari rispetto ad un qualsiasi punto Ω sarà quindi

$$(4) \quad V = \mu g \int_{\sigma} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\sigma,$$

ossia, in virtù del teorema della divergenza,

$$(5) \quad V = - \mu g \int_S \operatorname{div} z (M - \Omega) dS.$$

Si constata che

$$(6) \quad \operatorname{div} z (M - \Omega) = 4z - \zeta,$$

essendo ζ la profondità di Ω ⁽²⁾; quindi

$$(7) \quad \int_S \operatorname{div} z (M - \Omega) dS = (4z_0 - \zeta) S,$$

(1) Cfr. ad es. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, T. III, n. 644 (III ed.; Paris, Gauthier-Villars, 1921).

(2) Rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale avente il piano di carico come

se z_0 è la profondità del baricentro geometrico di S. La (5) diviene allora:

$$(8) \quad V = \mu g S (\zeta - 4 z_0),$$

ed infine

$$(8^{bis}) \quad V = P (\zeta - 4 z_0),$$

se P denota il peso del liquido spostato dal solido⁽¹⁾.

Rispetto ai punti del piano orizzontale posto alla profondità

$$(9) \quad \zeta = 4 z_0$$

il viriale si annulla: è questo il piano centrale. Dove il piano centrale interseca l'asse centrale, v'è il centro. Pel principio di Archimede, l'asse centrale è la verticale passante pel baricentro geometrico del solido; su questa retta, ad una profondità sotto al piano di carico che è quadrupla di quella del baricentro, sta il centro delle pressioni idrostatiche.

Non ci soffermiamo sopra la analoga indagine relativa al caso piano; essa conduce al risultato che fu annunciato nel n. 1.

piano xy e l'asse z verticale discendente, sono x, y, z le coordinate di M, e ξ, η, ζ quelle di Ω . Le componenti del vettore $\mathbf{z}(M - \Omega)$ sono

$$z(x - \xi) \quad , \quad z(y - \eta) \quad , \quad z(z - \zeta)$$

e quindi la sua divergenza risulta

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x - \xi) + \frac{\partial}{\partial y} z(y - \eta) + \frac{\partial}{\partial z} z(z - \zeta) = 4z - \zeta.$$

(1) È nota la relazione che sta fra i viriali V e V_0 , rispetto ai punti Ω e Ω_0 , dello stesso sistema di vettori applicati, di risultante \mathbf{R} (cfr. ad es. MARCOLONGO, *Meccanica Razionale*, I, p. 249; Milano, Hoepli, 1917):

$$V = V_0 + (\Omega_0 - \Omega) \times \mathbf{R}.$$

Se il sistema di riferimento ha l'asse ζ parallelo e controverso alla risultante, allora (con ovvio significato dei simboli)

$$V = V_0 + (\zeta - \zeta_0) R.$$

Rispetto a tutti i punti di un piano $\zeta = \text{cost.}$, normale al risultante, il viriale assume lo stesso valore, che è funzione lineare di ζ ; il coefficiente di ζ nella espressione del viriale è il modulo del risultante. Era dunque attendibile che il viriale delle pressioni idrostatiche sopra σ , il risultante delle quali è verticale ascendente ed ha l'intensità P, mantenesse valore costante su ciascun piano orizzontale, fosse funzione lineare della profondità ζ , e il coefficiente di ζ nella espressione del viriale fosse P.

3. Se il solido è parzialmente immerso, indicheremo con σ quella parte della sua superficie che è a contatto col liquido; varrà ancora la espressione (4) del viriale rispetto ad Ω delle pressioni idrostatiche elementari che si esercitano sopra σ .

Sia τ la sezione del solido con la superficie libera (« sezione di fluttuazione », se trattasi di un galleggiante); indichi S il volume della parte immersa, ch'è limitata da σ e τ ; sia z_0 la profondità sotto al piano di carico del baricentro geometrico di S .

Converrà osservare che, indicando con ω la superficie chiusa formata da σ e da τ , si ha:

$$\int_{\sigma} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\sigma = \int_{\omega} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\omega - \int_{\tau} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\tau.$$

Ora, in virtù dei risultati ottenuti nel n. 2, si ha:

$$\int_{\omega} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\omega = (\zeta - 4z_0) S.$$

Si nota poi che

$$\text{sopra } \tau: \quad z = \delta \quad , \quad \mathbf{n} \times (M - \Omega) = \delta - \zeta$$

sicchè

$$\int_{\tau} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\tau = \delta (\delta - \zeta) \tau.$$

Ne segue:

$$(10) \quad \int_{\sigma} z \mathbf{n} \times (M - \Omega) d\sigma = (\zeta - 4z_0) S - \delta (\delta - \zeta) \tau,$$

e quindi:

$$(11) \quad V = \mu g \{ (\zeta - 4z_0) S - \delta (\delta - \zeta) \tau \}.$$

La profondità del centro si ottiene eguagliando il viriale allo zero, e risolvendo rispetto a ζ ; risulta:

$$(12) \quad \zeta = \frac{4z_0 S + \delta^2 \tau}{S + \delta \tau}.$$

Si deduce dalla (12) che

$$\zeta - \delta = \frac{S}{S + \delta \tau} (4z_0 - \delta)$$

e

$$\zeta - 4\zeta_0 = \frac{\delta\tau}{S + \delta\tau} (\delta - 4\zeta_0);$$

poichè $\delta < \zeta_0$ si ha che $\delta < \zeta < 4\zeta_0$. Queste disequaglianze contengono le proprietà annunciate.

Una trattazione del tutto simile conduce, nel caso piano, alla formula:

$$(13) \quad \zeta = \frac{3\zeta_0 S + \delta^2 \tau}{S + \delta\tau},$$

dove compaiono simboli di evidente significato. Da essa discendono, come dianzi, le disequaglianze $\delta < \zeta < 3\zeta_0$.

Fisica. — *Uno spettrografo magnetico per raggi β emessi da sostanze debolmente radioattive.* Nota di G. OCCHIALINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio A. GARBASSO.

I metodi comunemente adoperati per l'analisi magnetica dei raggi β richiedono l'uso di sorgenti di piccole dimensioni e perciò non si prestano allo studio di sostanze debolmente radioattive, come il Rubidio e il Potassio, che debbono necessariamente presentare una grande superficie per offrire una intensità misurabile.

In questa Nota si descrive uno spettrografo magnetico assai semplice, il cui principio mi è stato suggerito dal prof. Rossi e che, appunto perchè consente l'uso di una larga superficie d'irraggiamento, si presta in modo particolare allo studio di queste deboli radioattività. L'apparecchio è mostrato in sezione nella figura 1 e in prospettiva nella figura 2.

Esso è costituito da una scatola cilindrica A, alla parete interna della quale è applicato il preparato radioattivo, e nel cui centro, coassiale con essa, si trova un piccolo contatore a filo di Geiger e Müller B, di parete assai sottile. Il tutto, chiuso ermeticamente e con nell'interno una pressione conveniente al funzionamento del contatore (circa 4 cm di mercurio), viene situato tra le espansioni polari di un elettromagnete in modo che le linee di forza risultino parallele all'asse del cilindro.

Aumentando progressivamente il campo magnetico, i raggi β emessi dal preparato verranno sempre più deflessi, finchè nessuno di essi potrà più raggiungere il contatore. Dal calcolo si riconosce che l'intensità accusata dal contatore deve rimanere approssimativamente costante finchè il campo diventi tale che una parte del contatore non venga più investita dalla radia-

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

zione; da questo momento deve diminuire fino ad annullarsi appena il raggio di curvatura diventa minore della metà della distanza della parete del contatore dal preparato.

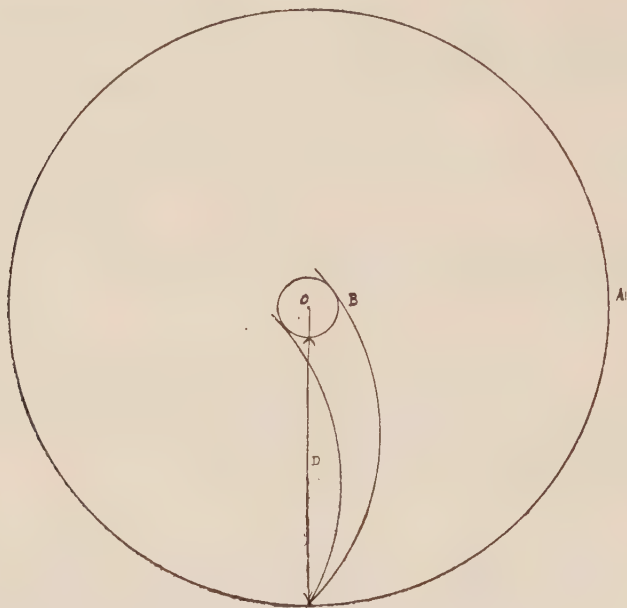


Fig. 1.

Il calcolo lascia però una certa incertezza dovuta al fatto che ben poco si conosce sulla distribuzione delle particelle β emesse da un preparato nelle varie direzioni. Su questo argomento, per quello che è a mia conoscenza, il lavoro sia sperimentale che teorico è assai scarso ⁽¹⁾. Si può dire soltanto che se lo spessore dello strato fosse infinitamente sottile, l'intensità

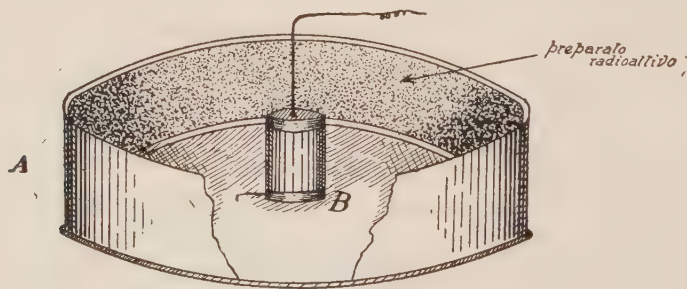


Fig. 2.

(1) Cfr. RUTHERFORD, «Ph. Mag.», 1906, 12, 152. Cfr. pure GREINER, «Phys. Zeit.», 9, 385, 1908; 10, 145, 1909.

irradiata sarebbe costante in tutte le direzioni, mentre che per uno strato convenientemente spesso dovrebbe valere la legge del coseno. Nel caso pratico la legge che bisogna assumere è intermedia tra le due.

Questa incertezza non impedisce però menomamente una valutazione esatta della velocità delle particelle basata sulla conoscenza del valore del campo corrispondente all'annullarsi dell'intensità segnalata dal contatore. La rigidità $H\rho$ delle particelle emesse dal preparato verrà così espressa in funzione delle dimensioni dell'apparecchio e del campo H_E relativo al punto di annullamento, mediante la formula:

$$(1) \quad S = H\rho = H_E \frac{D}{2},$$

dove D è la distanza del preparato dalla parete del contatore. Questo naturalmente vale nel caso che la radiazione sia monocromatica.

Se la radiazione invece risultasse, per esempio, di due componenti di diversa energia, l'apparecchio permetterebbe di separarle e di identificarle. Basta per questo che le dimensioni del contatore siano abbastanza piccole da permettere che per una delle radiazioni il raggio di curvatura diventi minore di $\frac{D}{2}$ quando per l'altra il fascio investe ancora tutto il contatore.

In tal caso la curva presenterà due pianerottoli distinti. Anche però quando la suddetta condizione non è verificata, dall'andamento della curva si potrà trarre qualche conclusione qualitativa sulla composizione della radiazione.

L'apparecchio descritto sopra è stato provato con la radiazione β del rubidio. A questo scopo una soluzione di cloruro di rubidio venne lasciata evaporare su una striscia di alluminio di 1 cm di altezza, che fu poi disposta aderente alla parete interna del cilindro A, il cui diametro era di 7.7 cm. Il contatore di Geiger e Müller aveva la parete costituita da una foglia di alluminio di 7 μ , la sua altezza utile era di 1 cm ed il diametro di 0.8 cm. Esso lavorava con una tensione di 54 volt al di sopra della tensione iniziale ed i suoi impulsi, amplificati, venivano registrati a mezzo di un contatore telefonico. L'introduzione nel campo magnetico non ne alterava il funzionamento.

Le misure fatte coi diversi campi magnetici vennero opportunamente alternate. I risultati sono riassunti nella seguente tabella (1):

(1) Dove H è il campo magnetico in Gauss, t è il tempo in minuti, N il numero degli impulsi, n il numero degli impulsi per minuto, \pm l'errore statistico medio per minuto.

H	t	N	n	ε
0	161 ^m	967	6.01	0.19
225	161	1.001	6.22	0.18
353	161	925	5.74	0.19
460	161	702	4.36	0.16
527	281	1.147	4.08	0.12
580	281	939	3.34	0.10
658	281	830	2.95	0.10
696	281	709	2.52	0.09
752	281	588	2.09	0.08
790	161	308	1.91	0.10
865	161	279	1.73	0.10
915	161	253	1.57	0.09
1.222	161	259	1.57	0.09

e sono rappresentati dal grafico della figura 3. Come si vede, il punto di annullamento si ottiene per un campo di circa 790 Gauss, cosicchè dalla (1), per la rigidità della radiazione in esame si ottiene il valore di circa 1350 Gauss·cm, corrispondente alla velocità di circa 0.62 c.

Ora, come risulta da una media di Holmes e Lawson⁽¹⁾, basata sulle varie misure di assorbimento fin qui eseguite, il valore più probabile per

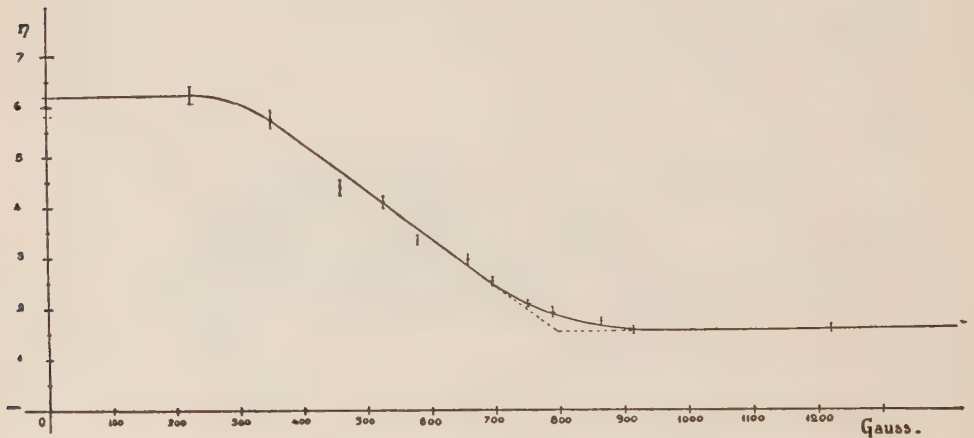


Fig. 3.

(1) « Ph. Mag. », 1926, 2, 1218.

la velocità dei raggi β del rubidio, supposti omogenei, è di 0.60 c. L'accordo tra i due risultati prova l'applicabilità del metodo.

Con un campo superiore ai 1700 Gauss, il numero degli impulsi per minuto rimane costante; e siccome la loro frequenza coincide con quella che si ha in assenza del sale di rubidio, si può concludere, almeno nei limiti di precisione di questo esperimento, che non esiste radiazione β di rigidità superiore a 1700 Gauss.cm.

Il numero di impulsi residuo (1.57 al minuto) è così da attribuire alla radioattività dell'ambiente e alla radiazione penetrante. Nel tratto intermedio tra 790 e 1000 Gauss, la curva continua a degradare e questo sembrerebbe così indicare l'esistenza di un'altra radiazione più dura.

Dato però il numero limitato di misure in questa regione non credo si possano trarre delle conclusioni definitive da queste osservazioni; tanto più che è in corso in questo laboratorio una ricerca assai più accurata e completa di questa, che non ha avuto che lo scopo di dimostrare l'applicabilità e l'efficienza di questo metodo.

Oltre al prof. Rossi, tengo a ringraziare la sig.na Bocciarelli per l'aiuto prestatomi nell'esecuzione del presente lavoro.

Fisica. — *Un dispositivo dinamico di confronto delle costanti di due triodi.* Nota ⁽¹⁾ di C. DEI, presentata dal Socio A. LO SURDO.

1. Nella presente disposizione dinamica si adoperano due triodi in parallelo dei quali l'uno ha le costanti ρ_1 e k_1 conosciute e l'altro è il triodo di cui si vuole determinare per confronto le costanti ρ_2 e k_2 .

Le figg. 1 e 2 rappresentano il dispositivo adoperato. Si ha un alternatore A a frequenza musicale le estremità del quale fanno capo ad una resistenza potenziometrica il cui cursore C è in comunicazione col filamento delle due lampade. Nella fig. 1 gli estremi dell'alternatore sono collegati (attraverso a delle pile) alle due placche, nella fig. 2 invece alle due griglie. Si ha poi un telefono T posto in maniera da essere attraversato dalla corrente somma delle correnti di placca dei due triodi.

Sia r il valore della resistenza potenziometrica e sia $i = i_0 \sin \omega t$ l'intensità istantanea della corrente dell'alternatore che l'attraversa. Allora se r_1 ed r_2 sono le resistenze che si trovano da una parte e dall'altra del cursore, i potenziali delle estremità dell'alternatore (assumendo uguale a zero il potenziale del cursore C) saranno $r_1 i$ e $-r_2 i$.

Si comincia col far agire le componenti $v_1 = r_1 i$ e $v_2 = -r_2 i$ della tensione alternata sulle due placche come è indicato nella fig. 1.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

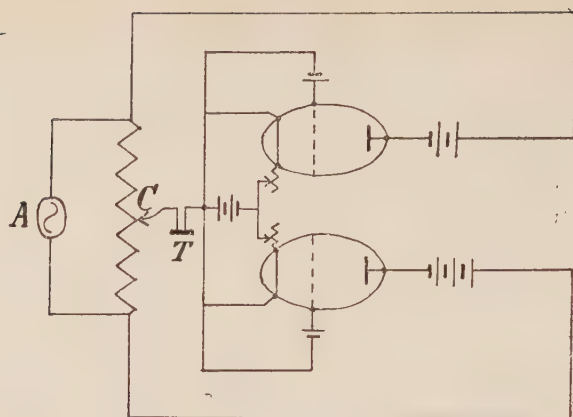


Fig. 1.

Se j_1 e j_2 sono le variazioni di intensità di placca rispettivamente della 1^a e 2^a lampada, ed r_c , L_c sono la resistenza ohmica ed il coefficiente di autoinduzione della cuffia si avrà:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_1 j_1 = r_1 i - r_c j - L_c \frac{dj}{dt} \\ \rho_2 j_2 = -r_2 i - r_c j - L_c \frac{dj}{dt} \end{cases}$$

essendo $j = j_1 + j_2$ ed $r = r_1 + r_2$.

Come si vede i e j non sono in fase. Precisamente si trova

$$(2) \quad j = \frac{i_0 \left(\frac{r_1}{\rho_1} - \frac{r_2}{\rho_2} \right)}{\sqrt{\left[1 + r_c \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^2 + \left[L_c \omega \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right]^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

ove

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L_c \omega}{r_c + \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}}$$

Per una posizione generica del cursore l'ampiezza j_0 di j è diversa da zero, ma per la posizione in corrispondenza della quale si ha $\frac{r_1}{\rho_1} - \frac{r_2}{\rho_2} = 0$ la (2) mostra che l'ampiezza j_0 è nulla, e perciò allora si ha silenzio nel

telefono. Indicando con r'_1 ed r'_2 i valori assunti da r_1 ed r_2 in tale posizione avremo

$$(3) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{r'_1}{r'_2}.$$

Si fanno poi agire le componenti $u_1 = r_1 i$ e $u_2 = -r_2 i$ della tensione alternata sulle due griglie come è rappresentato nella fig. 2. Se

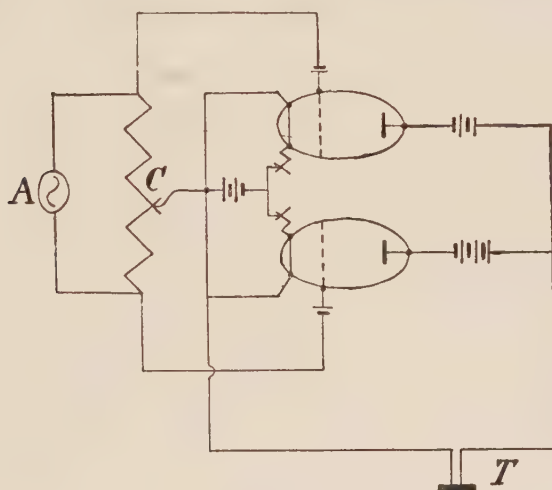


Fig. 2.

j'_1 e j'_2 sono le variazioni di intensità di placca rispettivamente della 1^a e 2^a lampada, si avrà:

$$(4) \quad \begin{cases} \rho_1 j'_1 = k_1 r_1 i - r_c j' - L_c \frac{dj'}{dt} \\ \rho_2 j'_2 = -k_2 r_2 i - r_c j' - L_c \frac{dj'}{dt} \end{cases}$$

essendo $j' = j'_1 + j'_2$.

In modo analogo al caso precedente si dimostra che per la posizione del cursore corrispondentemente alla quale si ha $\frac{k_1 r_1}{\rho_1} - \frac{k_2 r_2}{\rho_2} = 0$ l'ampiezza j'_0 di j' è nulla, e perciò allora si ha silenzio nel telefono. Indicando con r''_1 ed r''_2 i valori assunti da r_1 ed r_2 in tale posizione avremo

$$(5) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k_1 r''_1}{k_2 r''_2}.$$

Dunque dalla conoscenza delle costanti ρ_1 e k_1 della 1^a lampada possiamo dalla (3) ottenere ρ_2 e poi dalla (5) ottenere k_2 .

2. La fig. 3 rappresenta dettagliatamente la disposizione che consente di passare rapidamente dalle condizioni della fig. 1 alle condizioni della fig. 2.

Si hanno tre commutatori G, P, T ed un interruttore I. Ognuno dei commutatori è stato rappresentato con 6 punti: i due punti intermedi possono porsi in comunicazione, mediante il tasto centrale a maniglia di cui è munito ogni commutatore, o coll'una o coll'altra coppia di punti.

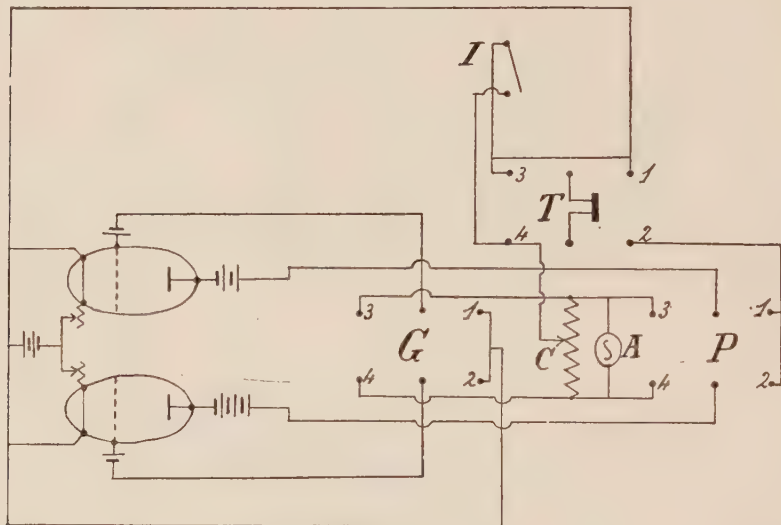


Fig. 3.

Fra i punti intermedi di T è inserita la cuffia telefonica. Gli estremi poi delle griglie e delle placche sono collegati coi punti di mezzo dei commutatori G e P rispettivamente. Tutte le altre connessioni sono evidenti.

La disposizione della fig. 1 viene così realizzata: la maniglia del commutatore G viene posta in comunicazione cogli estremi 1-2 che si trovano verso la parte destra della figura, le maniglie di P e T cogli estremi 3-4 che sono verso la parte sinistra della figura. L'interruttore I è lasciato aperto.

La disposizione della fig. 2 viene realizzata così: interruttore I chiuso, maniglia di G verso gli estremi 3-4, maniglie di P e T verso gli estremi 1-2.

In luogo di un piccolo alternatore a frequenza acustica può anche usarsi semplicemente un diapason elettromagnetico alimentato da uno o più accumulatori a seconda del valore della resistenza r . Quantunque la corrente che così attraversa la resistenza r sia pulsante, i ragionamenti precedenti valgono ugualmente.

Questo dispositivo è stato sottoposto a verifiche sperimentali. A tale scopo ho determinato le costanti di due triodi ricorrendo ad uno dei metodi diretti; precisamente ho ricorso a quello recentissimo a valvola saturata del prof. Lo Surdo⁽¹⁾. Poi ho adoperato i due triodi nella disposizione presente ed ho trovato (prendendo per ρ_1 e k_1 i valori già determinati) che i valori ρ_2 e k_2 del 2° triodo determinati al modo attuale coincidono con quelli già ottenuti per via diretta.

3. Passiamo ora ad esaminare le condizioni di migliore sensibilità.

Prescindendo dalla maggiore o minore esattezza dei valori assunti per ρ_1 e k_1 (il che dipenderà evidentemente dal metodo usato a tale scopo) ci proponiamo il quesito di esaminare le condizioni migliori in cui ci dobbiamo porre per la determinazione di ρ_2 e k_2 .

A tale scopo ricordiamo che nella misura di ρ_2 (cfr. fig. 1) si spostava il cursore C sino ad avere silenzio ed allora utilizzavamo senz'altro la relazione (3). In realtà però rimane sempre un'incertezza relativamente ai valori da attribuirsi ad r_1 e r_2 , poichè quando il cursore trovasi in un certo intervallo Δr del reostato la cuffia telefonica emette un suono di intensità praticamente nulla.

Chiamiamo \bar{j} l'ampiezza della corrente alternata j che attraversa il telefono quando il cursore si trova ad una delle estremità di tale intervallo permodochè alla sensazione pratica di silenzio corrisponderà l'ampiezza j_0 che è minore di \bar{j} ⁽²⁾.

Determinando le posizioni estreme dell'intervallo assumeremo il punto di mezzo come punto corrispondente alla vera posizione di silenzio. Però per far ciò occorre evidentemente una serie di osservazioni soprattutto se l'intervallo è relativamente grande; si comprende quindi che conviene porsi in condizioni tali che questo intervallo sia il più piccolo possibile poichè allora si potrà determinare con sufficiente approssimazione, anche con una sola osservazione, la vera posizione di silenzio.

Quando il cursore si trova in un punto generico di tale intervallo si ha $0 \leq j_0 \leq \bar{j}$. Perciò il valore ρ_2 calcolato mediante la (3) differirà dal valore vero di una certa quantità $\Delta\rho_2$. Ci proponiamo di calcolare il massimo valore di $\frac{\Delta\rho_2}{\rho_2}$.

(1) A. LO SURDO, *Nuovo metodo per la determinazione del coefficiente di amplificazione e della resistenza interna delle lampade termoioniche*, Consiglio Nazionale delle Ricerche. Dati e Memorie sulle radiocomunicazioni, 1931, p. 536.

(2) Tale valore \bar{j} si potrà anche preliminarmente determinare per via sperimentale. Per es. con la cuffia adoperata in queste esperienze (una di quelle comunemente usata dai dilettanti nelle ricezioni radio) ho trovato che al suono di intensità debolissima, assunta da me convenzionalmente come limite di percettibilità, vi corrispondeva una corrente alternata la cui ampiezza era dell'ordine di grandezza di un micro-ampère.

Esaminiamo per il momento il caso particolare in cui

$$L_c \cdot \omega \ll \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} \quad \text{e così pure} \quad r_c \ll \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}},$$

ossia esaminiamo il caso in cui sia lecito trascurare l'autoinduzione e la resistenza della cuffia. Allora al 2° membro delle relazioni (1) verrà a mancare il 2° e 3° termine, quindi allorchè il cursore si trova in un punto generico dell'intervallo di silenzio sarà

$$j = \left(\frac{r_1}{\rho_1} - \frac{r_2}{\rho_2} \right) i$$

e perciò

$$j_0 = \left(\frac{r_1}{\rho_1} - \frac{r_2}{\rho_2} \right) i_0.$$

Mano mano che il cursore si allontana dalla vera posizione di silenzio l'ampiezza j_0 cresce poichè aumenta il valore assoluto del termine fra parentesi, e quando sarà raggiunta una delle estremità dell'intervallo Δr si avrà

$$\bar{j} = \left| \frac{r_1'''}{\rho_1} - \frac{r_2'''}{\rho_2} \right| \cdot i_0$$

ove $r_1''' = r_1 \pm \frac{\Delta r}{2}$, $r_2''' = r_2 \mp \frac{\Delta r}{2}$ sono le resistenze corrispondenti ad una delle estremità ed il primo fattore del 2° membro è preso in valore assoluto poichè se per una delle estremità dell'intervallo la differenza ha segno positivo, per l'altra estremità ha invece segno negativo.

Dunque il vero valore di ρ_2 sarà dato da

$$\rho_2 = \frac{r_2'''}{\left| \frac{r_1'''}{\rho_1} - \frac{\bar{j}}{i_0} \right|}$$

e siccome come valore vero viene assunto $\rho_2 = \frac{r_2'''}{r_1'''} \rho_1$, l'errore massimo che può essere commesso sarà

$$\Delta \rho_2 = \frac{r_2''' \bar{j}}{i_0} \cdot \frac{1}{\frac{r_1'''}{\rho_1} \cdot \left| \frac{r_1'''}{\rho_1} - \frac{\bar{j}}{i_0} \right|}.$$

Quindi si ha

$$\frac{\Delta \rho_2}{\rho_2} = \frac{\rho_1 \bar{j}}{r_1''' \cdot i_0}$$

ma ora

$$r_1''' \simeq r_1 = \frac{r \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$$

perciò in definitiva risulta

$$(6) \quad \frac{\Delta \rho_2}{\rho_2} \simeq (\rho_1 + \rho_2) \frac{\bar{j}}{e_0}$$

ove $e_0 = ri_0$ rappresenta il valore massimo della f. e. m. impressa alle estremità della resistenza potenziometrica r . La (6) mostra che conviene prendere come triodo di paragone un triodo che abbia la minima resistenza possibile.

Calcoliamoci ora l'intervallo di silenzio Δr . Perciò notiamo che ad una variazione $\delta r = \delta r_1 = -\delta r_2$ del cursore del reostato dalla posizione di silenzio, corrisponde una variazione

$$\delta \rho_2 = \rho_1 \frac{\delta r_2 \cdot r_1 - r_2 \delta r_1}{r_1^2} = \rho_1 \frac{r}{r_1^2} \delta r$$

la quale esprime la differenza fra il valor vero di ρ_2 ed il valore assunto come tale dopo lo spostamento δr .

Sarà quindi

$$\frac{\delta \rho_2}{\rho_2} = \frac{r}{r_1 r_2} \delta r$$

e perciò in base alla (6)

$$\frac{1}{2} \Delta r \simeq \frac{r_1 r_2}{r} (\rho_1 + \rho_2) \frac{\bar{j}}{e_0}$$

dalla quale (dato che $r_1 r_2 = r_2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$) risulta in definitiva

$$(7) \quad \frac{\Delta r}{r} \simeq 2 \frac{1}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} \frac{\bar{j}}{e_0}.$$

Per modo che la (6) può anche scriversi nella forma seguente

$$(8) \quad \frac{\Delta \rho_2}{\rho_2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} \frac{(\rho_1 + \rho_2)^2}{\rho_1 \rho_2}$$

la quale permette dal valore sperimentale ottenuto per Δr di ricavare il massimo errore relativo $\frac{\Delta \rho_2}{\rho_2}$.

Esaminiamo ora la misura di k_2 (fig. 2). Per ottenere il risultato nella sua maggiore semplicità conviene esaminare in luogo di k_2 la grandezza

$\frac{1}{S_2}$ ossia l'inverso della pendenza $S_2 = \frac{k_2}{\rho_2}$. Anche qui avremo analogamente una incertezza $\Delta'r$ (parte del reostato in cui ponendo il cursore si ottiene alla cuffia praticamente silenzio).

Procedendo in modo perfettamente parallelo al caso già trattato della resistenza ρ_2 , si ricava l'espressione

$$(9) \quad \frac{\Delta'(1/S_2)}{1/S_2} \simeq \frac{\bar{j}}{e_0} (1/S_1 + 1/S_2)$$

la quale mostra che conviene prendere un triodo di paragone che abbia la massima pendenza S_1 possibile.

Per l'intervallo $\Delta'r$ si trova la relazione

$$(10) \quad \frac{\Delta'r}{r} \simeq 2 (S_1 + S_2)^{-1} \cdot \frac{\bar{j}}{e_0}$$

permodochè si può scrivere l'analoga della relazione (8):

$$(11) \quad \frac{\Delta'(1/S_2)}{1/S_2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta'r}{r} \frac{(S_1 + S_2)^2}{S_1 S_2}.$$

Le relazioni precedenti di $\frac{\Delta\rho_2}{\rho_2}$ e di $\frac{\Delta'(1/S_2)}{1/S_2}$ valgono nel caso che nelle relazioni (1) e (4) si possa trascurare l'autoinduzione e la resistenza della cuffia. In caso diverso si complicano e si trova che devono essere moltiplicati per dei fattori correttivi che in certi casi possono raggiungere dei valori assai differenti dall'unità.

Da ciò che precede risulta dunque che allo scopo di ridurre l'errore massimo, insieme all'intervallo pratico di silenzio, il triodo di paragone (ρ_1, S_1) conviene abbia una grande pendenza insieme alla minore resistenza possibile. E così l'ampiezza e_0 della f. e. m. deve essere per quanto è possibile grande (compatibilmente però col fatto di non uscire dalla parte rettilinea delle caratteristiche) e la \bar{j} deve invece essere piccola (e ciò dipende dalla cuffia adoperata). Inoltre per evitare una notevole influenza dei fattori correttivi a cui abbiamo accennato conviene adoprare delle cuffie telefoniche possibilmente di piccola resistenza e di piccola self e delle frequenze musicali basse.

Avendo a disposizione varie ampiezze e_0 della f. e. m. alternata (il che è evidentemente facile) e potendo inoltre disporre di vari triodi si possono verificare le conseguenze principali delle relazioni (6) e (9) di cui abbiamo ora parlato. I valori Δr e $\Delta'r$ che si ricavano sperimentalmente concordano assai bene con le relazioni (7) e (10) non solo dal punto di vista dei valori relativi ma anche dal punto di vista dei valori assoluti.

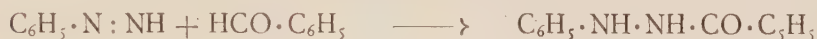
Chimica. — *Contributo allo studio delle proprietà ossidanti dei diazoidrati normali*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di ZVI JOLLES, presentata dal Corrisp. L. CAMBI.

La riduzione del fenildiazoidrato normale con sale stannoso in presenza di benzaldeide costituisce un fatto sperimentale di fondamentale importanza in merito alla questione della struttura dei diazoidrati.

Il termine labile, la fenildiimide

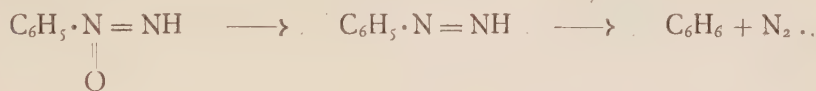


che si forma in un primo tempo per azione del riducente, si somma con la benzaldeide per dare la benzoilfenilidrazina⁽³⁾:



confermando pienamente una previsione che ANGELI fece alcuni anni or sono⁽⁴⁾.

In assenza di benzaldeide tale termine instabile che rispetto al diazoidrato contiene un atomo di ossigeno in meno, si decompone immediatamente in azoto e nell'idrocarburo:



In seguito fu dimostrato che la riduzione predetta non è limitata soltanto al sale stannoso, ma è suscettibile di estensione a tutta una serie di sali inorganici, come idrato ferroso, ferrocianuro di potassio, solfuro ammonico ed a sostanze come acqua ossigenata e idrossilammina⁽⁵⁾, inducendo a considerare il diazoidrato normale quale corpo dotato di spiccate proprietà ossidanti, a differenza dell'isodiazocomposto, che rimane indifferente di fronte ai riducenti suddetti.

Sotto tale nuovo aspetto fu possibile negli ultimi due anni interpretare tutta una serie di reazioni come p. es. quella della formazione dei neri

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica della R. Università di Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1931.

(3) A. ANGELI e Z. JOLLES, «Rend. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. X, p. 142 (1929).

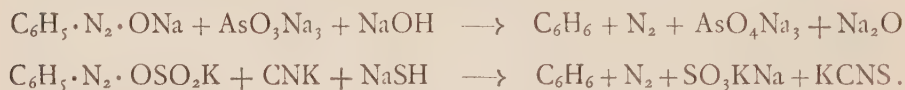
(4) «B.», 59, 1400 (1926).

(5) A. ANGELI e Z. JOLLES, «Rend. Acc. Linc.», serie 6^a, vol. X, p. 321 (1929); A. ANGELI, «Rend. Acc. Linc.», vol. XI, p. 925 (1930).

nella reazione tra pirrolo e diazoidrato⁽¹⁾, la formazione dei derivati formazilici per azione dei sali di diazonio sui composti propenilici⁽²⁾ e molte altre.

Abbondanti sono nella letteratura i dati riguardanti il potere ossidante dei diazoidrati normali, senza pertanto che i precedenti ricercatori abbiano tentato trarne conseguenze. Fa eccezione il solo Gutmann il quale a proposito delle esperienze da lui eseguite sopra tiosolfati e sopra loro esteri, sui solfocloruri ed alogenocianuri che con tutta facilità cedono rispettivamente un atomo di ossigeno, di solfo o di cloro all'arsenito e cianuro di potassio, dice⁽³⁾: « tale comportamento io attribuisco al fatto che l'atomo di ossigeno, di solfo, o di alogeno che entra in reazione si trova nella molecola sotto forma reagibile (« reaktive » Form), vale a dire in uno stato di maggiore labilità, a differenza degli altri atomi di ossigeno, di solfo o di cloro, indifferenti all'azione dei suddetti riducenti e quindi contenuti nella molecola sotto forma meno mobile, più stabile, mono e bivalente ».

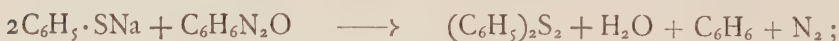
L'autore predetto estendendo lo studio di tale reazione ai diazoidrati, trova analogamente che l'arsenito e solfuro di cianogeno passano in modo netto ad arseniato e rodanato con formazione dell'idrocarburo aromatico⁽⁴⁾:



In base all'enunciato sopra riportato possiamo quindi ritenere il Gutmann quale precursore del riconoscimento delle proprietà ossidanti dei diazoidrati normali, di cui però non cerca di interpretare la costituzione.

Altri esempi del potere ossidante dei diazoidrati, finora da nessuno rilevati, sono:

1° L'ossidazione del tiofenato a disolfuro⁽⁵⁾:



2° Bamberger⁽⁵⁾ facendo agire il diazotato normale sopra il nitroformazile perviene al fenilformazile, mentre il gruppo =NOOK si ossida a nitrato:



(1) A. QUILICO e M. FRERI, « Rend. Acc. Linc. », vol. XI, 1° sem. p. 296 e 409 (1930).

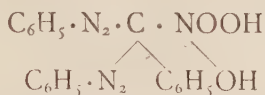
(2) A. QUILICO e M. FRERI, « Gazz. », 58, 1, 380 (1928); vedi JOLLES e KRUGLIAKOFF, « Rend. Acc. Linc. », vol. XI, 1° sem., p. 200 (1930).

(3) « B. », 45, 822 (1912).

(4) GRAEBE, « B. », 15, 1683 (1882); TASSINARI, « Gazzetta », 22, 504 (1892).

(5) « B. », 27, 158 (1894).

Egli spiega la formazione dell'idrazone, ammettendo in un primo tempo l'addizione dei termini di decomposizione del diazotato C_6H_5- , $OH-$:

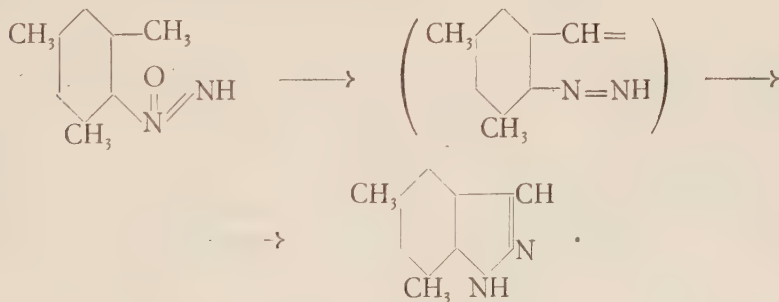


successivamente il composto formatosi perde una molecola di acido nitrico (nitrato). Senonchè tale decomposizione del diazotato normale in ossidrile e fenile non può aver luogo: infatti il classico schema della diazoscissione



vale soltanto per i sali di diazonio, ossia in ambiente acido o neutro, come fu recentemente posto in rilievo ⁽¹⁾. È più probabile invece che il gruppo $=NOOK$ venga ossidato a NO_3K a spese dell'ossigeno del diazoidrato e che la fenildiimmide ceda i termini C_6H_5- , $H-$ con velocità superiore a quella di formazione dell'idrocarburo.

3° Un esempio notevole ed illustrativo del potere ossidante dei diazotati normali è dato dall'azione degli alcali sulla diazomesidina ⁽²⁾. Questa ultima subisce per azione degli alcali una ossidazione nel proprio gruppo metilico con formazione del dimetilindazolo:



Inoltre poichè nel liquido di reazione si trova presente accanto all'idrocarburo, anche una piccola quantità di acido mesitilenico ⁽³⁾, ciò dimostra come il potere ossidante del diazogruppo è persino in grado di trasformare il gruppo metilico in carbossile esplicando un'azione simile a quella dell'acido cromico.

A proposito, Quilico e Freri ⁽⁴⁾ hanno già posto in rilievo come l'alcool si trasformi in gliossale in presenza del p-nitrobenzondiazonio, una reazione che si realizza solo con ossidanti molto energici quali l'acido nitrico e cromico.

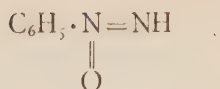
(1) A. ANGELI e Z. JOLLES, «Gazzetta», 61, 401 (1931).

(2) BAMBERGER, «A.», 305, 291 (1899).

(3) Ibid.

(4) «Gazzetta», 60, 608 (1930).

La formula di Angeli

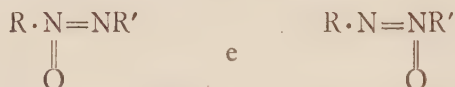


nella quale il diazoidrato normale figura come un ossido del termine $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{N}=\text{NH}$ dà ragione di tutti questi fatti sperimentali senza dover ricorrere a dei ragionamenti difficili e complicati. Tra i fatti che meglio degli altri contribuiscono in favore della pentavalenza dell'atomo di azoto centrale⁽¹⁾, merita particolare rilievo il passaggio della fenilazossicarbonammide a diazotato normale



esperienza effettuata da Angeli nel 1916 e che costituisce una brillante conferma delle vedute del mio compianto Maestro.

Basandomi sopra tale analogia di struttura tra i diazoidrati normali e gli azossicomposti mi fu possibile poi effettuare la riduzione di alcuni azossiderivati



mediante idrato ferroso, ottenendo una serie di termini con un atomo di ossigeno in meno



ed estenderla anche ai nitroni



dimostrando possedere pure questi delle proprietà ossidanti⁽²⁾.

Evidentemente i termini di predetta riduzione sono stabili, mentre nel caso dei diazotati, il termine $\text{Ar} \cdot \text{N}=\text{NH}$ si decompone immediatamente in azoto e nell'idrocarburo aromatico.

Ho trovato pure che la fenolfalina per azione del diazoidrato passa a fenolfaleina e che per lo stesso trattamento viene colorata in azzurro una soluzione di salda d'amido iodurata⁽³⁾.

(1) Cambi ha per primo rilevato che l'atomo di azoto centrale dei diazoidrati normali funziona come un azoto nitrico e quello esterno come azoto ammoniacale (« Rend. Acc. Linc. », vol. VI, serie 6^a, p. 838 (1927).

(2) JOLLES e KRUGLIAKOFF, « Rend. Acc. Linc. », vol. XI, 1^o sem., 197.

(3) JOLLES e KRUGLIAKOFF, « Rend. Acc. Linc. », vol. XI, 1^o sem., 197.

Tutto ciò prova che le proprietà ossidanti dei diazoidrati sono di indole molto generale: il riconoscimento di tale fatto è più questione di un'accurata e paziente ricerca bibliografica che non di una o due esperienze in più in proposito.

Comunque, ho creduto opportuno di estendere tali reazioni anche ad altre ammine sostituite, come la P-toluidina, p-anisidina, p-fenetidina, p-bromoanilina, nonchè ai nuclei condensati come la α — e β — naftilamina. Come riducenti furono adoperati sali di ferro, di manganese, di cerio, e di titanio, il diidroindaco e pirogallolo. In tutti questi casi ha luogo una reazione violenta, accompagnata da una rapidissima ossidazione dei predetti composti e da forte sviluppo di azoto.

I liquidi alcalini di reazione sono stati sottoposti successivamente alla distillazione in corrente di vapore e nei rispettivi distillati furono identificati i corrispondenti idrocarburi ed altri termini di riduzione del diazocomposto.

Ringrazio il sig. Enrico Busoni per il valido aiuto prestato nell'esecuzione di una parte delle esperienze, che verranno descritte estesamente altrove.

Chimica. — *Viscosità delle miscele di tetracloruro di stagno con idrocarburi aromatici* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

È nota la proprietà dei derivati della serie aromatica di addizionarsi a sostanze inorganiche di varia natura. Tra i composti formati con gli alogenuri metallici ricordo ad esempio quelli del mono e del dinitrobenzolo con tetracloruro di titanio, tetracloruro di stagno ⁽³⁾, cloruro e bromuro di alluminio ⁽⁴⁾; quelli dell'anilina con bromuro di alluminio, del fenolo con alogenuri alcalino-terrosi e sali inorganici alcalini, dell'aldeide benzoica con gli ioduri e bromuri di magnesio e di stagno, e col cloruro mercurico ⁽⁵⁾, del benzoato di etile con cloruro stannico ⁽⁶⁾.

L'esistenza di questi composti venne messa in evidenza con l'analisi termica e con lo studio di altre proprietà fisiche tra cui la viscosità. In molti casi la notevole stabilità, anche a temperatura ordinaria, ne rese possibile la separazione allo stato cristallino.

Per quel che riguarda la loro costituzione alcuni ritengono che il legame tra la molecola di alogenuro e quella del derivato aromatico si compia attraverso i gruppi sostituenti uniti all'anello benzenico. Di questo avviso sono per es.: Reihlen e Hake ⁽⁷⁾ per i derivati del mono e del dinitrobenzolo con SnCl_4 e TiCl_4 . Essi trovarono infatti che mentre il mononitrobenzolo si unisce con una sola molecola di alogenuro, il dinitro ne addiziona due. L'ipotesi di Reihlen e Hake può anche trovare un appoggio in fatti ben noti: l'assoluta regolarità di proprietà fisiche delle soluzioni di benzolo e tetracloruro di stagno, messa in evidenza dal Kurnakow ⁽⁸⁾ con le isoterme di viscosità a 25° e 70°, e gli scarsi esempi di composti di addizione formati dagli idrocarburi con sostanze inorganiche, a differenza dei numerosissimi prodotti che formano quasi tutte le categorie dei loro derivati.

Effettivamente anche i risultati da me ottenuti in casi analoghi potrebbero confermare l'ipotesi di R. e H. Ho infatti mostrato che mentre nitrobenzolo e monocloruro di zolfo si uniscono a formare un composto di addizione, benzolo e monocloruro non danno indizi di associazione di sorta ⁽⁹⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1931.

(3) « Ann. », 457, p. 47 (1927).

(4) PFEIFFER, *Org. Molekülverbindungen*, Stuttgart, p. 164 (1929).

(5) PFEIFFER, loc. cit.

(6) « Zeitschr. anorg. allgem. Chem. », 135, p. 123 (1924); « Ann. », 376, p. 303 (1910).

(7) « Ann. 457, p. 47 (1927).

(8) « Zeitschr. anorg. allgem. Chem. », 135, p. 116 (1924).

(9) « Gazz. chim. ital. », 59, pp. 495 e 501 (1929).

I dati sperimentali a disposizione non sembrano tuttavia sufficienti per dare un carattere di generalità all'ipotesi di R. e H.

In precedenti ricerche ho potuto dimostrare infatti che benzolo e omologhi formano numerosi composti di addizione con anidride solforosa; e la esistenza di essi, a temperature notevolmente inferiori all'ordinaria, fu accertata mediante l'analisi termica⁽¹⁾. Potrebbe darsi che gli idrocarburi aromatici abbiano tendenza a formare complessi, ma solo a temperature relativamente basse. Appariva perciò opportuno esaminare il comportamento di detti idrocarburi con qualche prodotto inorganico di cui si conoscano composti di addizione con i rispettivi derivati. Ho voluto pertanto studiare le soluzioni formate da idrocarburi aromatici con cloruro stannico servendomi di misure viscosimetriche.

Riferisco nel presente lavoro i risultati ottenuti nello studio delle soluzioni di toluolo con tetracloruro di stagno alle temperature di 20° e 30°.

In una Nota che seguirà tratterò dei sistemi con m-xilolo e con pseudocumolo.

*
* * *

Il tetracloruro di stagno venne preparato a partire dagli elementi e distillato più volte.

Gli idrocarburi, della ditta Kahlbaum, vennero ridistillati sopra cloruro di calcio per togliere l'umidità che avrebbe potuto decomporre il tetracloruro.

Le misure vennero eseguite con il viscosimetro di Scarpa usando tutte le precauzioni già descritte per impedire al liquido in esame di venire a contatto con l'umidità⁽²⁾.

Di ciascuna miscela venne determinata la densità con il picnometro. Nel calcolo di η si tenne sempre conto del termine correttivo di Hagenbach, e per ciascuna isoterma si calcolarono anche i valori teorici servendosi della solita formula di Kendall⁽³⁾:

$$\eta^{1/3} = m_1 \eta_1^{1/3} + m_2 \eta_2^{1/3}.$$

L'isoterma di densità mostra un sensibile aumento di volume che denota fenomeni di dissociazione da riavvicinare probabilmente a quelli già osservati nel caso delle soluzioni nitrobenzolo-cloruro di stagno⁽⁴⁾ e nitrobenzolo-bromuro di stagno⁽⁵⁾ ed attribuiti all'azione del componente organico su quello inorganico.

(1) « Gazz. chim. ital. », 65, p. 34 (1926); « Rendic. Acc. dei Lincei », 6ª serie, IV, pp. 460 e 523 (1926).

(2) « Gazz. chim. ital. », 59, p. 495 (1929).

(3) « Am. Chem. Soc. », 38, p. 1787 (1917); 42, p. 1776 (1920).

(4) « Rendic. Acc. Lincei », 6ª serie, X, p. 186 (1929).

(5) « Rend. Acc. Lincei », 6ª serie, X, p. 372 (1929).

Nel caso attuale infatti la regola di Batschinski $\left(\varphi = \frac{v - \omega}{C}\right)^{(1)}$ applicata al toluolo, mostra, come risulta dalla tabella I, che il valore C non subisce variazioni sensibili colla temperatura: segno evidente che l'associazione fra le molecole di questo composto non è apprezzabile. Con tutta probabilità la molecola associata è perciò quella del tetracloruro, e tale idea si ricollega infatti ad una osservazione analoga di Kurnakow, nel caso delle soluzioni di questa sostanza con benzolo ⁽²⁾.

TABELLA I.

t°	d_t	η_t	v	$v - \omega$	φ	$C \cdot 10^5$
5°	0.8004	0.00709	1.135	0.078	141.0	55.23
15°	0.8710	0.00613	1.148	0.091	163.1	55.79
25°	0.8616	0.00546	1.160	0.103	183.1	56.25
35°	0.8525	0.00495	1.173	0.116	202.0	57.43

TABELLA II.

Toluolo %	$d_{20^{\circ}}$	Trovato $\eta_{20^{\circ}}$	Calcolato $\eta_{20^{\circ}}$	Trovato $\eta_{30^{\circ}}$	Calcolato $\eta_{30^{\circ}}$
0	2.2295	0.01045	—	0.00812	—
9.81	1.9208	0.00990	0.00919	0.00785	0.00736
17.85	1.7170	0.00968	0.00837	0.00841	0.00685
38.46	1.3790	0.00768	0.00729	0.00680	0.00629
48.55	1.2481	0.00721	0.00685	—	—
58.25	1.1621	0.00750	0.00663	0.00710	0.00574
69.30	1.0812	0.00825	0.00644	—	—
76.92	0.9929	0.00801	0.00630	0.00683	0.00563
88.40	0.9272	0.00782	0.00610	—	—
100.00	0.8660	0.00584	—	0.00573	—

(1) « Zeitschr. Phys. Chem. », 84, p. 643 (1913); « Gazz. chim. it. », 59, p. 499 (1929).

(2) « Zeitschr. anorg. allgem. Chem. », 135, p. 116 (1924).

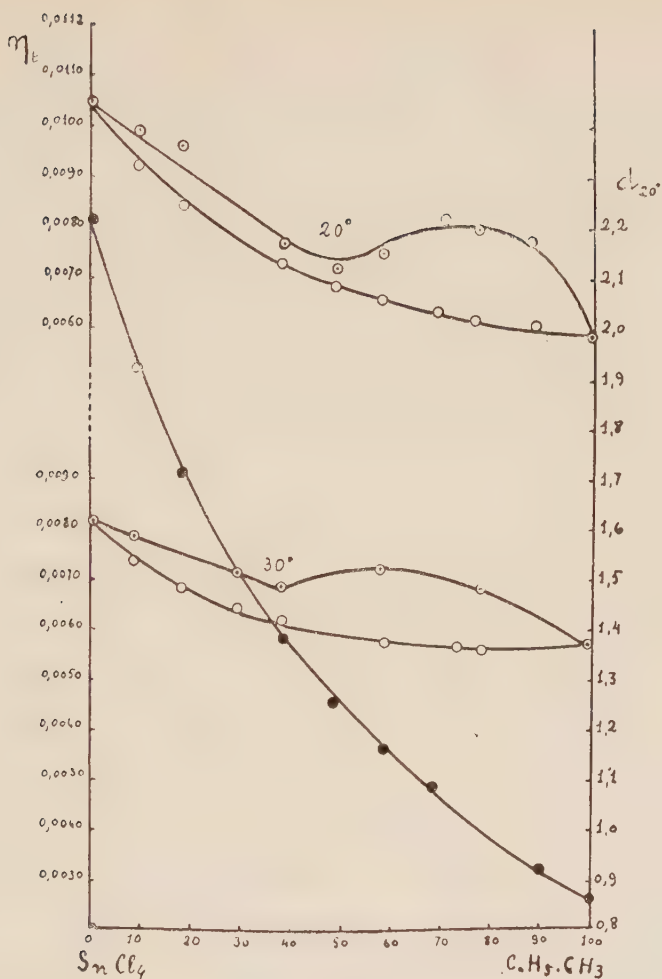


Fig. 1.

Fino alle miscele contenenti 30-35 % di SnCl_4 la viscosità segue l'andamento caratteristico nel caso in cui si abbia formazione di una associazione tra le molecole dei componenti e procede poi abbastanza regolarmente fino al tetracloruro di stagno puro, sempre mantenendosi però entro valori molto superiori ai teorici.

Al solito l'aumento di temperatura attenua l'effetto prodotto dalla associazione. Il calcolo delle differenze percentuali fra teorico e trovato permette di stabilire che l'associazione allo stato liquido raggiunge il massimo nelle miscele contenenti da 60 a 80 % di toluolo corrispondenti circa a 4 molecole di questo composto per una di SnCl_4 .

TABELLA III.

Toluolo %	20°		30°	
	Differenza %	Differenza %	Differenza %	Differenza %
9.81	+ 0.00071	+ 7.70	+ 0.00049	+ 6.65
38.46	0.00039	5.35	0.00051	8.10
48.55	0.00036	5.25	—	—
58.25	0.00087	13.14	0.00136	23.60
69.30	0.00181	28.10	—	—
76.92	0.00171	27.13	0.00120	21.30
88.10	0.00172	28.20	—	—

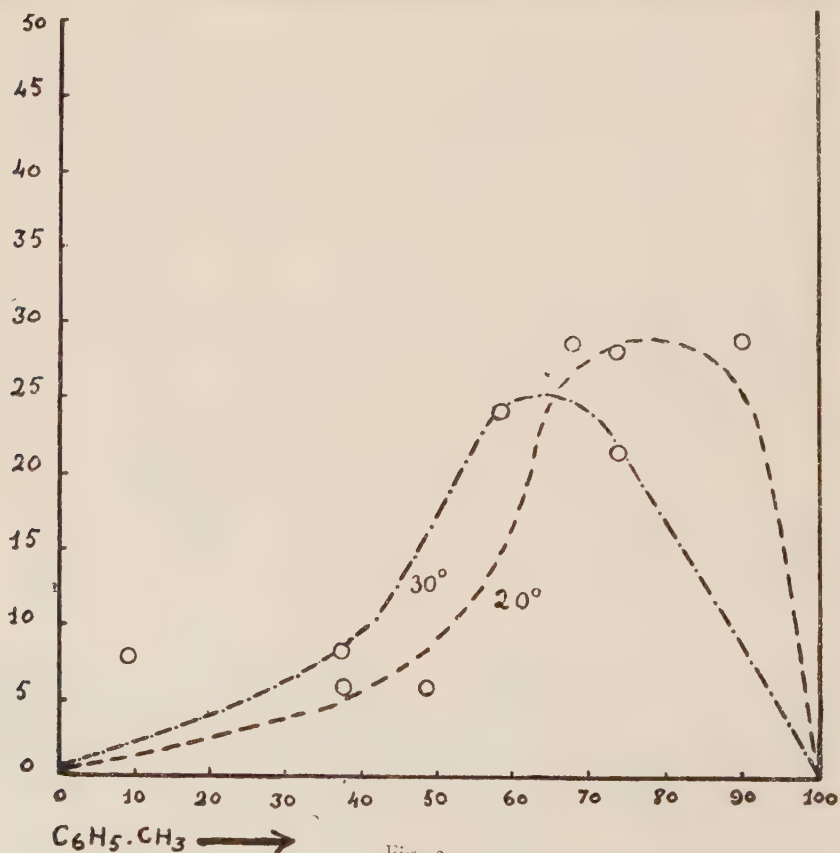


Fig. 2.

Quanto precede, pur non essendo sufficiente a provare l'esistenza di un composto definito, mostra che, contrariamente al benzolo, il toluolo è suscettibile di formare associazioni con SnCl₄ bene apprezzabili tra 20° e 30°.

Chimica (Chimica agraria). — *Sulla presenza di un nuovo zucchero nei mieli destrogiri* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di E. PARISI, presentata dal Corrisp. M. BETTI.

Il miele genuino, che contiene il 70 % circa di una miscela in parti quasi uguali di glucosio e fruttosio, osservato al polarimetro fa deviare nettamente a sinistra il piano della luce polarizzata, mentre quello falsificato con zucchero d'amido, destrina, saccarosio, ecc. è generalmente destrogiro. Pertanto la rotazione ottica fornisce un importante elemento di giudizio quando si voglia accertare la genuinità dei mieli.

Si conoscono però alcuni mieli sicuramente genuini — come quelli di conifere — che, a differenza di tutti gli altri, fanno ruotare a destra il piano della luce polarizzata.

Questa singolare proprietà dei mieli di conifere, secondo alcuni Autori ⁽³⁾, sarebbe dovuta alla presenza di una destrina ad elevato potere rotatorio specifico e di basso peso molecolare.

Per distinguere la destrina d'amido, aggiunta al miele a scopo di frode, dalla destrina contenuta nei mieli genuini di conifere O. Hanle ⁽⁴⁾ propose un metodo rapido basato sulla dialisi: la cosiddetta destrina del miele difonde, insieme con lo zucchero, attraverso la carta pergamena, mentre la destrina d'amido rimane nel dializzatore e può riconoscersi dal potere rotatorio.

D'altra parte Raumer ha dimostrato che alcuni mieli naturali, fermentati col lievito di birra, rimangono destrogiri per la presenza in essi di una sostanza che non viene precipitata dall'alcool diluito e che perciò, più che alle vere destrine, rassomiglia ai biosi o ai triosi ⁽⁵⁾.

E poichè nei liquidi essudati da alcune piante che possono venire visitate dalle api è contenuto un trisaccaride infermentescibile, il *melicitosio*, isolato da Bonastre ed in seguito da Berthelot dalla manna del *Pinus larix*, da Maquenne dalle melate del tiglio e da Hudson e Sherwood ⁽⁶⁾ da quella dell'abete odoroso o del Douglas (*Pseudotsuga taxifolia*, Britton), si cre-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1931.

(3) WOLFF, *Inaug. Diss.*, München 1904; cfr. FIEHE e KODATZKI, «Z. f. Unters. d. Lebensmittel», 55, 602 (1928).

(4) Cfr. E. BECKMANN, «Z. Anal. Chem.», 1896, p. 263.

(5) Cfr. E. BECKMANN, loc. cit. e E. SPAETH in «Abderhalden's Handbuch der Biologischen Arbeitsmethoden», Abt. IV, Teil VI: *Nahrungs- und Genussmittel*, 2° Hälfte, p. 1013.

(6) C. S. HUDSON e S. F. SHERWOOD, «J. Am. Chem. Soc.», 40, 1456 (1918). Per la letteratura meno recente vedasi E. O. VON LIPPMANN, «Die Chemie der Zuckerarten» (Berlin 1904), p. 1664.

dette di potere identificare col melicitosio la sostanza attiva non fermentescibile riscontrata nei mieli destrogiri. L'ipotesi divenne quasi certezza allorchè Hudson e Sherwood⁽¹⁾, e recentemente Nottbohm e Lucius⁽²⁾ dimostrarono la presenza del melicitosio nei mieli delle api i cui alveari si trovano in prossimità di piante di abete odoroso o di tiglio.

Il melicitosio, come dimostrò Alekhine⁽³⁾, per idrolisi completa fornisce due molecole di glucosio ed una di fruttosio, e, per idrolisi blanda, una molecola di glucosio ed una di *turanosio*, bisaccaride riducente formato a sua volta da una molecola di glucosio ed una di fruttosio.

Il melicitosio non fermenta, non riduce e non si combina con la fenilidrazina. Cristallizza in prismi rombici che fondono a 158°.

Per isolarlo dai mieli cristallizzati Hudson propone un metodo molto semplice: una certa quantità di miele si mescola intimamente con un peso uguale di acido acetico glaciale il quale lascia indisciolti i cristalli di melicitosio, che si possono comodamente filtrare e ricristallizzare.

Impiegando questo metodo da un campione di miele Hudson isolò fino al 27 % di melicitosio.

Per isolare il melicitosio dai mieli fluidi Hudson trae profitto della infermentescibilità di questo zucchero: 40 gr. di miele si diluiscono con acqua fino a portare il contenuto zuccherino al 20 % e la soluzione si fa fermentare per alcuni giorni col lievito di birra. Cessato lo sviluppo di CO₂ si filtra e si evapora la soluzione a sciroppo che si abbandona a sè per qualche giorno. Se il melicitosio è presente si separa col riposo allo stato cristallino.

Entrambi i metodi proposti da Hudson furono da me impiegati per ricercare ed eventualmente isolare il melicitosio da alcuni mieli di conifere, provenienti dall'isola di Rodi ed analizzati, assieme a molti altri, per incarico dell'Ufficio Agrario del Governatorato delle Isole Egee.

I risultati furono però sempre negativi.

50 gr. di miele destrogiro (Comune di Dimilia), nel quale si notavano in sospensione delle granulazioni cristalline, vennero mescolati intimamente in un mortaio di vetro con 50 cc. di acido acetico glaciale. Il deposito cristallino, filtrato alla pompa, lavato con acido acetico e con alcool e quindi seccato si riconobbe formato esclusivamente di glucosio. Infatti esso fonde a 146°, riduce il Fehling a caldo, fermenta e reagisce con la fenilidrazina dando un osazone giallo insolubile in acqua bollente che, lavato con acetone, fonde, come il glucosazone, a 210°.

La grandezza molecolare, il potere rotatorio specifico, il potere riducente ed il consumo di jodio (metodo Willstätter e Schudel) prima e dopo

(1) C. S. HUDSON e S. F. SHERWOOD, « J. Am. Chem. Soc. », 42, 116 (1920).

(2) F. E. NOTTBOHM e F. LUCIUS, « Z. f. Unters. d. Lebensmittel », 57, 549 (1929); Ibidem, 61, 195 (1931).

(3) ALEKHINE, « Ann. Chim. », [6], 18, 532 (1889).

azione dell'acido cloridrico diluito a bagno maria confermarono che la sostanza isolata non è melicitosio, ma bensì glucosio.

Ma poichè tutti i campioni indicati come mieli di conifere, e da me riconosciuti genuini in base alla reazione di Fiehe, mostrarono all'analisi, specialmente se questa veniva eseguita per via polarimetrica, una prevalenza assoluta del glucosio sul fruttosio, mentre secondo quanto oggi è generalmente ammesso⁽¹⁾ nei mieli genuini a 100 parti di glucosio debbono corrispondere almeno 106 parti di fruttosio, era logico ammettere nei mieli in esame la presenza di una sostanza più destrogira e meno riducente del glucosio, sostanza che mi sono proposto di identificare.

A tale scopo la soluzione acetica del miele, dalla quale si era separato il glucosio, venne liberata dall'acido acetico per distillazione a pressione ridotta e successiva estrazione con etere. La soluzione acquosa che adesso, per la prevalenza del fruttosio sui corpi destrogiri, devia a sinistra il piano della luce polarizzata, venne inoculata col lievito di birra e posta a fermentare. Cessato lo sviluppo di CO₂ il liquido ritornò destrogiro. Il residuo ottenuto dalla sua evaporazione estratto con alcool metilico fornì una sostanza fortemente destrogira, dializzabile e riducente, la quale, trattata con fenil-idrazina, fornì un osazone solubile in acqua bollente che, durante il disseccamento all'aria, imbrunisce alterandosi: così preparato l'osazone fonde a 97-100° e si scompone a 120°.

La sostanza destrogira precedente è accompagnata da piccole quantità di un altro corpo meno solubile in alcool metilico che, per idrolisi, fornisce un *acido aldeidico del gruppo del glucuronico*, il quale si può identificare facilmente seguendo il metodo proposto da van der Haar⁽²⁾. Non mi risulta che la presenza di questo acido, che ho anche riscontrato e in quantità notevoli nella frazione insolubile in alcool metilico, sia stata ancora constatata nei mieli.

ISOLAMENTO ED IDENTIFICAZIONE DELLA SOSTANZA DESTROGIRA CONTENUTA NEI MIELI DI CONIFERE.

Per isolare e studiare la sostanza destrogira 3 Kgr. di miele di conifere, gentilmente fornitimi dal dott. U. Soleri dell'Ufficio Agrario delle Isole Egee, vennero diluiti in 10 litri di acqua e posti a fermentare in termostato a 30°. Cessata la fermentazione alcoolica la deviazione ottica, che era all'inizio di + 4° V., passò a + 13° 3 V. ($l = 1$). La soluzione filtrata venne evaporata a pressione ridotta ed il residuo agitato con 1200 cc. di alcool

(1) J. AUERBACH e EMMA BODLÄNDER, « Z. f. Unters. der Nahrungs- und Genussm. », 47, 233 (1924); A. GRONOVER e E. WAHNICH, Ibidem, 48, 405 (1924); H. A. SCHUETTE, « Journal Association of Official Agricultural Chemists », XI, 164 (1928).

(2) A. W. VAN DER HAAR, « Biochem. Z. », 88, 211 (1918).

metilico bollente. Si ottenne una soluzione metil-alcoolica fortemente destrogira (+ 41°.4 V. in tubo da 10 cm.) dalla quale la sostanza attiva può precipitarsi, sia per diluizione con etere o con alcool assoluto, sia per aggiunta, a freddo, di soluzioni concentrate di barite in alcool metilico.

Il potere riducente ed il consumo di iodio della sostanza pura assumono valori molto prossimi al 50 % di quelli calcolati per lo stesso peso di glucosio. Dopo idrolisi con gli acidi forti a fuoco diretto (a b. m. l'idrolisi è lenta ed incompleta) detti valori quasi si raddoppiano. Si calcola così che 100 parti di sostanza forniscono da 70 a 80 parti di glucosio che venne identificato dalla fermentescibilità e dal punto di fusione dell'osazone. Il rimanente 20-30 % di glucosio viene distrutto durante l'idrolisi. Io ho potuto infatti accertare con una esperienza parallela, usando soluzioni di maltosio puro, che tale distruzione ha luogo in seguito all'azione prolungata degli acidi forti all'ebollizione.

La grandezza molecolare della sostanza, determinata per via crioscopica in acqua, oscilla, a seconda del suo grado di purezza, tra 280 e 340, ed il potere rotatorio specifico tra + 90 e + 110°.

Purificata per successive precipitazioni con alcool assoluto dalle soluzioni in alcool metilico, e seccata nel vuoto su acido solforico, la sostanza si presenta sotto forma di una polvere bianca, amorfa, igroscopica: lasciata all'aria assume ben presto un aspetto gommoso e quindi si trasforma in uno sciroppo giallastro. Il prodotto secco, scaldato in tubetto per punti di fusione, rammollisce intorno a 85-90°, si gonfia, assumendo l'aspetto di una massa pastosa, a 130°, imbrunisce a 160° e fonde tra 180 e 203°. Trattato con cloridrato di fenilidrazina ed acetato sodico fornisce un osazone che presenta i seguenti caratteri: è solubile in acqua bollente, seccato all'aria imbrunisce alterandosi e fonde a 97°; seccato nel vuoto su acido solforico si copre alla superficie di una patina giallo-rossastra e fonde a 148°; ricristallizzato dall'etere acetico umido, levato con alcool assoluto e seccato nel vuoto su acido solforico, conserva invece il suo bel colore giallo citrino e fonde decomponendosi tra 198 e 200°.

L'osazone puro, sciolto in alcool metilico, devia nettamente a destra il piano della luce polarizzata:

$$[\alpha]_D^{25} = + 27^{\circ}.6 (c = 1.26).$$

All'analisi fornì la percentuale di azoto richiesta per l'osazone di un bioso:

	trovato:	N	11.15
per $C_{24}H_{32}N_4O_3$	calcolato:	»	10.76.

Il *p.* nitrofenilosazone, ottenuto seguendo il metodo impiegato da Hyde ⁽¹⁾ per preparare il *p.* nitrofenilosazone del maltosio, si presenta sotto forma di

(1) E. HYDE, « Ber. », 32, 1810 (1899).

una polvere pesante di un bel colore rosso scarlatto la quale, sospesa in poche gocce di idrossido di potassio, colora la soluzione in azzurro; fonde a 235°:

	trovato:	N	14.05
per $C_{24}H_{30}O_{13}N_6$	calcolato:	»	13.77

Da quanto ho detto fin qui credo si possa concludere che la sostanza destrogira infermentescibile isolata dai mieli di conifere è un bisaccaride riducente formato da due molecole di glucosio. Essa rientra perciò in quella selva di biosi nella quale A. Georg e A. Pictet ⁽¹⁾ sottoponendo ad un rigoroso esame i molti dati riportati dalla letteratura tentarono invano di portare un po' di luce.

Nei testi di chimica organica, che trattano di questo bisaccaride, troviamo descritti almeno una dozzina di composti che, secondo Armstrong ⁽²⁾, sono forse costituiti dalla stessa sostanza più o meno inquinata da impurità diverse: la *gallisina* di Schmitt e Coblenz ⁽³⁾, l'*isomaltosio* di E. Fischer ⁽⁴⁾, di Scheibler e Mittelmeier ⁽⁵⁾, di Lintner e Düll ⁽⁶⁾ e di Georg e Pictet ⁽⁷⁾, la *glucosina* di Gatterbauer ⁽⁸⁾, il *revertosio* di Croft Hill ⁽⁹⁾ e di Pringsheim e Leibwitz ⁽¹⁰⁾, il *destrinosio* di Syniewski ⁽¹¹⁾ e di Pictet e Vogel ⁽¹²⁾, ecc.

Il glucobiosio da me isolato dal miele naturale di conifere, come risulta dalla seguente tabella, ha punti di contatto con parecchi dei biosi sintetici su ricordati:

(1) A. GEORG e AMÉ PICTET, « Helvetica chim. Acta », 9, 612 (1926).

(2) E. F. ARMSTRONG, « The simple carboydrates and the Glucosides », (Edit. Longmans & Green, London 1919) p. 104.

(3) C. SCHMITT e A. COBENZL, « Ber. », 17, 1000 (1884).

(4) E. FISCHER, « Ber. », 23, 3687 (1890); 28, 3024 (1895).

(5) C. SCHEIBLER e H. MITTELMEIER, « Ber. », 24, 301 (1891).

(6) C. J. LINTNER e G. DÜLL, « Ber. », 26, 2533 (1893).

(7) A. GEORG e AMÉ PICTET, loc. cit.

(8) GATTERBAUER. « Zeitschr. f. Unters. der Nahrungs- und Genussm. », 22, II, 274 (1911).

(9) A. CROFT HILL, « J. Chem. Soc. », 83, 578 (1903).

(10) H. PRINGSHEIM e J. LEIBWITZ, « Ber. », 57, 1576 (1924).

(11) V. SYNIEWSKI, « Ann. », 324, 237 (1902).

(12) AMÉ PICTET e H. VOGEL, « Helvetica chim. Acta », 12, 700 (1929).

	Isomaltosio dal glucosio (E. Fischer)	Isomaltosio dal dilevoglicosano (Georg e Pictet)	Revertosio dal glucosio (Croft Hill)	Destrinosio dall'isotri- esosano (Pictet e Vogel)	Glucobiosio del miele (Parisi)
Struttura . . .	amorfo (igroscopico)	amorfo (igrosc.)	cristallino (igrosc.)	cristallino (igrosc.)	amorfo (igrosc.)
P. f. sostanza .	—	130-170°	—	94-96°	180-203°
Sapore. . . .	poco dolce	poco dolce	dolce	dolce	poco dolce
Potere rotatorio specif. . . .	—	+ 98°·4	+ 91°·5	+ 141°·6	+ 110°
Potere riducente (glucosio = 100)	—	42·5	69	—	41·7
P. f. osazone .	142-158°	160°	174°	167°	198-200°
Potere rotatorio spec. osazone .	+ 7°	+ 23°	inattivo	—	+ 27°·6
P. f. <i>p</i> -nitro-osa- zone	—	—	—	—	135°
Rotazione ottica dopo azione e- mulsina . . .	—	aumenta (2°·25 → 2°·51)	—	—	diminuisce (10°·6 → 9°·8)

Per spiegare l'origine del glucobiosio del miele, due ipotesi mi sembrano ugualmente attendibili: si può ammettere che questo zucchero si trovi già formato nelle melate degli alberi e che, data la sua inerzia di fronte agli agenti enzimatici del miele, rimanga inalterato nel prodotto finito; oppure si può pensare che esso si formi (analogamente a quanto ha dimostrato Croft Hill nel caso del revertosio) nella soluzione zuccherina concentrata a spese del glucosio sotto l'azione di un enzima specifico contenuto nelle secrezioni dei nettari extranuziali delle conifere.

Geologia. — *Conflitti orogenici.* Nota ⁽¹⁾ di G. B. CACCIA-MALI, presentata dal Corrisp. G. ROVERETO.

Più spesso l'orogenesi ha per causa una lotta tra un sistema montuoso già costituito ed altro sistema montuoso in formazione, il quale va a cozzare contro il primo; l'urto fra i due contendenti determina negli elementi tectonici che li costituiscono un complesso di azioni e reazioni consistenti in ripiegamenti e fratturazioni, in sollevamenti e affondamenti, in rigetti e slittamenti, deformazioni tutte le quali sono naturalmente più considerevoli lungo la linea frontale dell'uno e dell'altro sistema, linea che più direttamente ha sostenuto l'urto. Questo complesso di fenomeni credo si possa ben esattamente indicare coll'espressione « conflitto orogenico ».

Tale dizione ho già usata in una Nota sul « Conflitto alpino-prealpino » (Rend. R. Ist. Lomb. 1930), e torno ad impiegarla nella Nota presente; là si trattava del cozzo tra le preformate Alpi e le sopravvenienti Dinaridi (Prealpi) lombarde od orobiche; qui si tratta del cozzo tra le già costituite Dinaridi orobiche e le sopravvenienti Dinaridi baldensi. Richiamando in proposito e la individuazione da me fatta delle nove pieghe costituenti il sistema orobico, ossia le prealpi lombarde, e la relativa nomenclatura, diremo che la parte frontale delle Dinaridi lombarde che andò a cozzare contro le Alpi è la complessa mia piega I, e che all'altra estremità del sistema abbiamo la bidigitata mia piega IX, contro un settore della quale andò ad urtare la catena baldense.

La piega coricata o falda di copertura IX è dunque l'estrema orlatura del sistema orobico; essa si distende da Brescia a Limone sul Garda con un percorso di circa 54 Km., e come tutte le pieghe del sistema stesso è diretta in senso ENE e coricata verso SSE; nel tratto però degli ultimi 20 Km., situato sulla Riviera benacense tra la V. del Toscolano e Limone, la direzione diventa NE ed il coricamento a SE. È questo il segmento che subì l'influenza del Baldo; la sua direzione è appunto intermedia tra quella tipica delle pieghe orobiche e quella NNE del Baldo, che è la stessa dell'asse del lago (Desenzano-Riva) e delle sponde superiori di questo; e per conseguenza tutti i suoi assi tectonici vanno ad incidere la sponda lacuale del territorio di Limone sotto un angolo molto acuto.

Però più che dal corso N-S del fiume Toscolano tale segmento è nettamente separato dai precedenti mediante una gran frattura NNW, frat-

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1931.

tura che al di sopra della località Camerate sta sul versante destro della valle e fu della stessa la determinante, ed al di sotto della detta località sta sulla sinistra, e la valle non è che epigenetica.

La falda IX presenta, come le altre orobiche, una serie di salite e discese assiali generanti culminazioni ed insellamenti trasversali, e conseguenti fratture pure trasversali; così mentre a sera della frattura di V. Toscolano la nostra falda è in culminazione sulla linea M. Alberelli-M. Pizzoccolo, a mattina è lievemente abbassata (ed anche spostata un po' verso sud); ma tosto si inizia in essa una dolce salita assiale fino a nuova culminazione sulla linea Bocca di Paolone-M. Denervo, dopo della quale abbiamo dolce discesa fino a Limone.

Più sopra abbiamo detto che la piega in discorso è bidigitata; ciò significa non trattarsi di una sola anticlinale, bensì di due anticlinali aventi radice comune, significa cioè che da un'unica radice sorsero due digitazioni (coltri o falde di copertura) tra esse separate da una sinclinale interdigitale, ciascuna avanzante con fronte proprio. Vari sono per conseguenza gli elementi tectonici costitutivi della piega, ed è appunto dall'esame di questi che risulta avere l'indicato settore subita l'influenza del Baldo.

Passando infatti da sera a mattina della frattura di V. Toscolano, a parte la già detta brusca deviazione degli assi, si nota un profondo cambiamento nel paesaggio tectonico, sì che sul principio sembra impossibile trovare una corrispondenza tra gli elementi della falda rispettivamente dall'una e dall'altra parte della frattura; ciò è reso possibile solo allargando l'esame e sotto la guida della tectonica comparata; è pertanto utile cominciare la nostra analisi dall'estremo NE del settore anzichè da quello SW.

La digitazione superiore, costituita da dolomia principale, nel nostro settore ha avuto uno scorrimento assai più avanzato che negli altri, e solo per abrasione l'orlo suo è arretrato fin verso le radici in corrispondenza della culminazione (Bocca di Paolone); da notarsi che all'estremo SW essa copre la sinclinale ed il suo orlo poggia sul substrato.

La sinclinale interdigitale, cospicuamente sviluppata nei territorî di Tremòsine e Tignale, si riduce a semplice striscia di scaglie cretacee in quello di Gargnano, dopo cioè la culminazione, striscia che infine scompare sotto la coltre superiore.

La digitazione inferiore, costituita da Corna (nome locale d'una roccia che forma la base del Lias), ha uno sviluppo molto limitato nei territorî di Tremòsine e Tignale, ma poi è — come in tutti i successivi settori della falda IX — ben sviluppata, tanto da formare, sulla linea di culminazione, il M. Denervo ed il suo fronte M. Comerò, e da mostrare coi propri residui (principale quello di M. Castello di Gaino) d'esser stata distesa su tutto il vasto territorio di Gargnano sul quale è oggi allo scoperto il substrato.

I fatti più importanti che dinotano l'influenza baldense sono dunque:
1° Il grande avanzamento della coltre superiore, fatto che possiamo connettere con quello della grande strizione che si osserva nel corrugamento delle formazioni di substrato; 2° La presenza, in territorio di Gargnano, di una frattura longitudinale sub-verticale nell'ala normale od inferiore della sinclinale, fatto che ha determinato un grande rigetto con affondamento della parte assiale della sinclinale stessa e spinta in alto della Corna della coltre inferiore; avendo con ciò rotto ogni rapporto colla radice, questa coltre si origina affatto superficialmente con un cuneo o fittone di Corna incastrato tra la Creta della sinclinale e le formazioni di substrato, oppure tra la dolomia della coltre superiore e le formazioni stesse, cuneo o fittone che l'abrasione ha facilmente asportato.

Vediamo da ultimo in che consista l'azione stessa del Baldo: è inutile ricordare esser l'orogenesi un fenomeno lento e continuato, così da non potersi esattamente precisare l'epoca del sorgere d'una catena; così all'ingrosso si può ritenere esser la falda IX del miocene inferiore ed il Baldo del miocene medio; ma in un certo qual senso si possono anche ritenere contemporanei, inquantochè la prima non aveva ancora finito di costituirsi quando il secondo si iniziava. L'influenza quindi del Baldo sulla falda orobica IX consisterebbe nell'aver disturbato questa mentre si assettava, e ciò con pressioni tangenziali esercitate da moti ipogei preludenti al formarsi della catena baldense.

Riassumendo sui due conflitti in principio ricordati, in quello — certo di molto minore importanza — tra il Baldo ed un settore della nostra falda IX ebbe la peggio la falda assalita, mentre la massa maestosa e compatta del Baldo assalitore riuscì indisturbata dalla contesa; in quello invece tra la nostra falda I e le Alpi — conflitto ben più formidabile e che ebbe per risultato la formazione della catena orobica p. d., della catena cioè che dà il nome a tutto il sistema — ambi i contendenti subirono notevoli deformazioni: le Alpi assalite ebbero la strizione e quindi il raddrizzamento e l'inarcamento delle radici delle loro grandi falde, ed il parziale rovesciamento in alto di queste radici sul paese orobico; e la complessa piega I assalitrice, anzichè dar luogo — come fecero le successive ondate orobiche — a quelle pieghe rovesciate in senso contrario alla spinta e parzialmente ricoprentisi, che sono la caratteristica del sistema, dovette in profondità frangere le sue ondate in tante scaglie, ed in alto dar luogo al ritorno, vero risucchio d'onde, di intere zolle, quali per esempio quella di Valleve in V. Brembana e quella di Borno in V. Camonica.

Mineralogia. — *Su un metodo di misura della birifrazione massima di minerali biassici, coll'ausilio del piatto di Fedorow* ⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di A. DEBENEDETTI, presentata dal Corrisp. E. REPOSSI.

1. Sulla determinazione della birifrazione nella tecnica petrografica è stato scritto ultimamente dal prof. Perrier ⁽³⁾. Egli ha discusso e verificato la formola proposta dal Nikitin ⁽⁴⁾ e, mediante una trattazione teorica e la discussione di una serie di misure, ha dimostrato che la formola, nel campo di validità che egli stesso ha delimitato, dà risultati concordanti con sufficiente approssimazione con quelli sperimentali.

Studiando la possibilità di applicare alcune formole note di ottica cristallina alla determinazione, per mezzo del piatto di Fedorow, dell'angolo degli assi ottici, sono stato naturalmente condotto a notare l'importanza pratica della relazione che collega la birifrazione massima di un minerale biassico con la birifrazione di una sezione qualunque ⁽⁵⁾. Espongo ora un metodo per determinare la birifrazione massima di un minerale, partendo dalla conoscenza di due birifrazioni, corrispondenti a due posizioni della sezione mantenuta normale ad un piano principale di simmetria ottica.

Pur lavorando col piatto di Fedorow, non sempre le posizioni della sezione sono tali da permettere di applicare un dato metodo; questa condizione provoca, e giustifica, la proposta di metodi nuovi, anche se (come in questo caso) i metodi proposti siano più in particolare adatti a posizioni singolari della sezione.

2. Il Nikitin ⁽⁶⁾ giunse alla formola

$$n_1 - n_2 = \frac{(n_a - n_3) - (n_b - n_3)}{\sin^2 \epsilon_a - \sin^2 \epsilon_b}$$

dove n_1, n_2 indicano i semiassi maggiore e minore di un'ellisse sezione principale dell'ellissoide del minerale; n_3 il semiasse dell'ellissoide, normale all'ellisse sezione considerata; n_a, n_b due raggi dell'ellisse sezione distanti dall'asse n_1 rispettivamente degli angoli $90^\circ - \epsilon_a$ e $90^\circ - \epsilon_b$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

(3) C. PERRIER, *Contributo alla conoscenza del metodo universale*. Nota II. *La determinazione delle birifrazioni*. «Boll. R. Uff. Geologico», vol. LII, 1, Roma 1927.

(4) W. NIKITIN, *Beitrag zur Universalmethode. Zur Bestimmung der Doppelbrechung*. «Zeitschr. f. Krist.», XXXIII (1900) p. 133; e *La Méthode Universelle de Fedoroff*. Traduzione francese di Duparc e de Dervies. Atar, Genève e Béranger, Paris-Liège, 1914.

(5) A. DEBENEDETTI, *La determinazione dell'angolo degli assi ottici di miner. biassici col piatto di Fedorow*. «Rend. R. Acc. Lincei», [6^a], XIII (1931), p. 287.

(6) «Zeitschr. f. Krist.», loc. cit., p. 136.

È evidente, quindi, che, per la conoscenza della birifrazione massima del minerale colla formola del Nikitin, occorre poter disporre la sezione normalmente al piano $\alpha\gamma$, ottenendo così dalla formola generale la

$$\gamma - \alpha = \frac{(\gamma_1 - \beta) - (\gamma_2 - \beta)}{\sin^2 \epsilon_1 - \sin^2 \epsilon_2};$$

oppure occorre conoscere anche il valore dell'angolo degli assi ottici per ricavare la birifrazione principale dalle formole del Mallard.

Il Berek ⁽¹⁾ ha trasformato le formole del Nikitin; anche usando queste nuove formole, se la sezione non è normale al piano $\alpha\gamma$ sono necessarie tre misure di ritardo, o si richiede la possibilità di misurare una delle altre due birifrazioni principali.

Non è sempre possibile sottostare a queste molteplici condizioni: si possono invece con vantaggio usare le formole seguenti, le quali richiedono solamente di poter portare la sezione ad essere normale ad un piano noto di simmetria ottica.

3. Consideriamo in primo luogo il caso della sezione disposta normalmente al piano $\alpha\beta$ od a quello $\beta\gamma$, e poniamo

$$K = \frac{R_1}{R_2}, \quad M = \frac{\cos^2 \epsilon_1}{\cos^2 \epsilon_2}, \quad R = \gamma - \alpha;$$

dove R_1 e R_2 sono i valori corretti (cioè riferiti allo spessore reale della sezione) del ritardo per due posizioni normali ad uno dei tre piani principali; in queste posizioni la sezione è inclinata rispettivamente degli angoli $90^\circ - \epsilon_1$ e $90^\circ - \epsilon_2$ (prendendo sempre $\epsilon_1 < \epsilon_2$) rispetto ad uno degli assi α o β (a seconda che si faccia la misura normalmente al piano $\alpha\beta$, od a quello $\beta\gamma$); R è l'incognita, il valor massimo della birifrazione del minerale.

Ricordiamo che, in queste condizioni, vale con sufficiente approssimazione la

$$\sin^2 \theta_a = \frac{R_a}{R}$$

dove θ_a è l'angolo formato dalla normale alla sezione di birifrazione R_a colle direzioni degli assi ottici.

Abbiamo trovato ⁽²⁾ che

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{1 - K}{M - K}$$

(1) M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung* ecc. Borntraeger, Berlin, 1924, p. 103 sgg.

(2) DEBENEDETTI, loc. cit., p. 288.

cioè

$$1 - \cos^2 \theta_2 = \sin^2 \theta_2 = 1 - \frac{1 - K}{M - K} = \frac{M - 1}{M - K}.$$

Si deduce senz'altro

$$(1) \quad R = R_2 \frac{M - K}{M - 1} = \frac{R_2 M - R_1}{M - 1}.$$

4. Per il caso della sezione normale al piano $\alpha\gamma$, dovremo distinguere:

$$I) \quad \varepsilon_1 \geq V, \quad \varepsilon_2 \geq V$$

$$\sin \theta_1 = \sin (\varepsilon_1 \mp V)$$

$$\sin \theta'_1 = \sin (\varepsilon_1 \pm V)$$

$$\sin \theta_2 = \sin (\varepsilon_2 \mp V)$$

$$\sin \theta'_2 = \sin (\varepsilon_2 \pm V)$$

$$\frac{R_1}{R} = \sin \theta_1 \sin \theta'_1 = \sin^2 \varepsilon_1 - \sin^2 V$$

$$\frac{R_2}{R} = \sin \theta_2 \sin \theta'_2 = \sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 V$$

$$\frac{R_2 - R_1}{R} = \sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 \varepsilon_1.$$

$$(2) \quad R = \frac{R_2 - R_1}{\sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 \varepsilon_1}.$$

$$II) \quad \varepsilon_1 < V, \quad \varepsilon_2 > V$$

$$\frac{R_1}{R} = \sin \theta_1 \sin \theta'_1 = \sin^2 V - \sin^2 \varepsilon_1$$

$$\frac{R_2}{R} = \sin \theta_2 \sin \theta'_2 = \sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 V$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R} = \sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 \varepsilon_1.$$

$$(3) \quad R = \frac{R_1 + R_2}{\sin^2 \varepsilon_2 - \sin^2 \varepsilon_1}.$$

Riconosciamo nella (2) e nella (3) le formole del Nikitin, ricavate per altra via. Osserviamo, di passaggio, che, mentre il Nikitin non fa cenno dei diversi casi che si possono presentare a seconda dei rapporti fra gli an-

goli ε_1 , ε_2 e V , e mentre il Berek considera solo il caso particolare per cui $\varepsilon_1 = 0$, nelle formole che ci hanno condotto alla (2) ed alla (3) è trattato il caso generale.

5. Dobbiamo notare, e questo vale anche per il metodo citato di determinazione dell'angolo degli assi ottici, che i valori di ε_1 e di ε_2 non sono sempre determinati con sicurezza. Possiamo, in condizioni favorevoli, verificare se essi sono esatti, cioè se è stata determinata con precisione la direzione dell'asse di simmetria ottica al quale ci riferiamo, osservando che per $\varepsilon_a = V$ e per $\varepsilon_b = 90^\circ - V$ si ha

$$\cos^2 V = \cos \theta_a, \quad \sin V \cos V = \cos \theta_b$$

quindi

$$1 - \cos^4 V = \sin^2 \theta_a, \quad 1 - \sin^2 V \cos^2 V = \sin^2 \theta_b.$$

$$(4) \quad \frac{1 - \cos^4 V}{1 - \sin^2 V \cos^2 V} = \frac{\operatorname{tg}^2 V + \cos^2 V}{\operatorname{tg}^2 V + \sin^2 V} = \frac{\sin^2 \theta_a}{\sin^2 \theta_b}.$$

Portando la sezione a formare, coll'asse di riferimento, gli angoli $90^\circ - \varepsilon_a$ e $90^\circ - \varepsilon_b$ e facendo il rapporto dei corrispondenti ritardi corretti, avremo

$$\frac{\sin^2 \theta_a}{\sin^2 \theta_b} = \frac{R_a}{R_b}$$

che ci darà un valore uguale a quello trovato colla (4) se ε_a e ε_b (e V) saranno esatti.

Se i due valori trovati di $\frac{\sin^2 \theta_a}{\sin^2 \theta_b}$ (dedotti per vie differenti e quindi controllantisi a vicenda) saranno differenti, non ci sarà altro mezzo che cercare di determinare con maggiore accuratezza la posizione dell'asse al quale sono riferiti gli angoli ε . Si può anche far variare di un poco ciascuno dei valori che prendono parte alle formole e fare una media dei risultati, come, in ultima analisi, fa il Berek nel suo metodo dei rapporti dei ritardi.

Evidentemente, però, non si può giungere a calcolare contemporaneamente le variabili ε e V , colle sole misure che ci siamo fissate come base.

6. La pratica applicazione del metodo ha luogo, evidentemente, in modo non dissimile da quello che ho esposto per la determinazione dell'angolo degli assi ottici.

Determinata la posizione dei piani principali di simmetria, portata la sezione ad essere normale ad uno di questi, in una posizione di distanza angolare $90^\circ - \varepsilon_1$ tra la normale alla sezione e la direzione dell'asse di riferimento (che sarà α per la sezione normale ad $\alpha\beta$ e β per la sezione normale $\alpha\beta\gamma$) si misura il ritardo R'_1 con un compensatore. Una misura analoga R'_2 si ripete in un'altra posizione $90^\circ - \varepsilon_2$, sempre mantenendo la sezione normale allo stesso piano di simmetria.

Riportati i ritardi allo spessore reale della sezione, si formano i rapporti K e M e si applica la formola (1). Nel caso della sezione normale al piano $\alpha\gamma$ si utilizzano invece la (2) o la (3), tenendo conto della posizione degli assi ottici rispetto alle due posizioni della sezione.

Conoscendo il valore di V , si può, colle formole del Mallard, calcolare il valore delle altre due birifrazioni principali.

Occorre appena rilevare che si è supposto di poter determinare, con uno qualunque dei metodi noti, lo spessore della sezione.

7. Sono dati qui di seguito alcuni esempi di applicazione del metodo, in parte su dati del Perrier e del Nikitin, in parte su misure mie.

A) Diopside dello Zillertal (Perrier). Lo spessore è di $m\mu$ 45 241. Dalle tabelle del Perrier (p. 31) si ricavano, per es., per la sezione normale al piano $\beta\gamma$ e per le inclinazioni di 30° e di 10° rispetto a β , i ritardi $R_1 = 1230$ e $R_2 = 1297$. Calcolando M , tenendo conto del fatto che le inclinazioni del Perrier corrispondono a $90^\circ - \epsilon_1$ e a $90^\circ - \epsilon_2$, abbiamo $M = 8.27$ ed applicando la formola (1), $R = \frac{9463}{7.27} = 1310$. Dividendo per il valore dello spessore si ottiene $\gamma - \alpha = 0.0289$, valore che concorda con quello che si deduce facendo la differenza degli indici di rifrazione (determinati direttamente dal Perrier col totalreflettometro)

$$\gamma = 1.6991 \quad , \quad \alpha = 1.6701 \quad , \quad \gamma - \alpha = 0.029 .$$

B) Calcite (Nikitin, Z. Krist.). Dalle misure del Nikitin, a p. 135, scegliamo, per es., i ritardi corrispondenti a 10° ed a 20° , che sono per noi gli angoli $90^\circ - \epsilon_1$ e $90^\circ - \epsilon_2$. Si trova $R_2 = 0.167$ e $R_1 = 0.152$. Per $\epsilon_1 = 70^\circ$ e per $\epsilon_2 = 80^\circ$ ricaviamo $M = 3.879$ e dalla formola (1) $R = 0.1722$ che corrisponde al valore della stessa tabella del Nikitin per 0° , essendo in questo caso la sezione coincidente col piano $\alpha\gamma$.

C) Wollastonite. Ho eseguito la misura su una sezione di Wollastonite il cui piano coincide quasi perfettamente col piano $\beta\gamma$. L'asse γ giace nel piano della sezione, mentre l'asse α fa un angolo di 1° colla normale alla sezione. Il minerale era stato tagliato insieme ad alcuni pezzetti di quarzo paralleli ad ϵ ; misurando il ritardo dei granelli di quarzo, ne ho dedotto lo spessore (che ammetto uguale a quello della wollastonite) in 38 390 $m\mu$.

Ponendo la sezione normalmente al piano $\alpha\beta$, ho trovato per $\epsilon_1 = 24^\circ$, $R_1 = 119.9$ e per $\epsilon_2 = 34^\circ$, $R_2 = 191.5$. Calcolato $M = 1.215$, applicando la solita formola, trovo $R = \frac{112.6}{0.215} = 524$ e, dividendo per il valore dello spessore, ottengo $\gamma - \alpha = 0.0137$, in buon accordo coi dati esistenti per il minerale.

Fisiologia. — *Il volume delle cariossidi di grano in relazione col loro valore nutritivo.* Nota di G. TALLARICO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

Il valore agronomico dei semi grossi e dei semi piccoli è ancora oggetto di dibattito tra gli studiosi delle cose agrarie, sebbene la maggior parte degli autori tenda ad assegnare a quelli di grossa taglia un più alto grado di energia germinativa, di attitudine vegetativa (specie nel primo periodo dello sviluppo della pianta) e di conseguente capacità produttiva; ma nessuna ricerca è stata finora eseguita per vagliare il valore nutritivo dei semi a seconda della loro taglia. Un chilogrammo di grano che contenga per es. 24.000 cariossidi ha lo stesso valore nutritivo, anzi lo stesso valore formativo e plastico per lo sviluppo e la crescita dell'individuo, di un chilogrammo di grano per formare il quale sono bastati 18.000 semi? Questa ricerca è non solo di valore scientifico, ma anche di importanza pratica, quando si pensi che il grano è il prodotto della terra più importante per l'alimentazione dell'uomo, e la taglia dei suoi semi è un fattore controllabile dalla tecnica e dall'intelligenza umana. Infatti, la taglia della cariosside differisce non solo a seconda delle vicende stagionali che hanno accompagnato lo sviluppo della pianta, specialmente durante l'epoca della formazione e maturazione del seme; ma anche a seconda della qualità del terreno e dei metodi culturali impiegati per la produzione, e soprattutto è funzione di razza e di varietà ottenute per selezioni o per ibridismo, campo nel quale la genetica cerealicola moderna ha fatto passi da gigante; ed è infine, la taglia, funzione dei comuni metodi di svecciamento meccanico.

Ora la cariosside del grano può essere considerata come un sistema biologico, costituito da una giovane pianta in miniatura (embrione) allo stato di vita latente o minimale; però pronta ad entrare in piena attività funzionale, non appena si stabiliscono i noti e propizi fattori dell'ambiente. E così dicasi di quello strato di cellule sottocuticolare intimamente legato al pericarpio. Queste sono le due parti vive del seme, composte entrambe da cellule; invece l'endosperma, che forma la maggior parte della cariosside e che costituisce il magazzino di riserva alimentare, a cui attinge i suoi principi nutritivi la pianta all'inizio del suo sviluppo, è considerato come sostanza inerte, similmente agli inerti strati cuticolari esterni di natura cellulosa, che hanno funzione protettiva della cariosside. Sicchè biologicamente il seme di grano è costituito da due parti vive e attive, che sono: l'embrione e lo

(1) Nella seduta del 5 giugno 1931.

strato cellulare sottocuticolare; e da due parti inerti e passive, che sono l'endosperma e il pericarpio.

Questo da una parte; dall'altra parte, la scienza della nutrizione ha recentemente messo bene in rilievo l'alta importanza che hanno, per lo sviluppo e la crescita, le proteine, le vitamine, i sali, gli enzimi.

Ora queste differenti sostanze e fattori d'alto valore nutritivo in che proporzione si trovano nelle differenti parti della cariosside del grano?

Per ciò che riguarda le proteine, dalle ricerche di Mitchell⁽¹⁾ si ricava, che mentre il valore biologico della farina di grano è uguale a 50, quello della intera cariosside sale a 67, eguale cioè al valore biologico delle proteine del vitello (62) e del bue (69). Quando si pensi che la parte viva della cariosside tutto sommato è meno di $\frac{1}{7}$, ed è quella che poi viene allontanata dalla molitura e dalla panificazione, si comprende facilmente l'alto valore nutritivo dello strato sottocuticolare. Inoltre T. B. Osborne⁽²⁾ asserisce che le proteine del germe e quelle cellulari differiscono, non solo fisicamente, ma anche chimicamente da quelle dell'endosperma; esse infatti rassomigliano alle proteine dei tessuti animali, associate come sono, in parte, con acido nucleico a formare prodotti simili ai nucleo-protidi ed alle nucleine. Mentre nell'intera cariosside si trovano le seguenti proteine⁽³⁾: glutenina 4.17%; gliadina 3.90%; globulina 0.63%; albumina 0.36%; proteoso 0.43%; Osborne e Campbell⁽⁴⁾ non ottennero dalla farina di embrione né gliadina né glutenina, ma bensì il 10% di albumina, il 5% di globulina, e il 3% di proteoso. L'embrione contiene, data la sua struttura cellulare, una grande quantità di acido nucleico.

Infine Osborne e Mendel⁽⁵⁾ trovarono, che mentre con proteine ricavate dall'endosperma lo sviluppo dei ratti era molto lento ed inapprezzabile, con proteine embrionali invece i ratti adulti si mantennero in vita per lunghi periodi consumando da 16 a 20 mgr. di proteina per grammo di peso; ed i giovani ratti crebbero normalmente e si riprodussero attivamente, con una dieta contenente solo il 7% di proteina embrionale, presentando un guadagno medio di peso eguale a gr. 1.6 per grammo di proteina consumata. E per quanto riguarda la proteina della crusca, Osborne e Mendel osservarono un guadagno di grammi 2.05, nonostante una perdita nelle fecce del 20% dell'azoto ingerito. Dunque le proteine delle parti vive dei semi,

(1) H. H. MITCHELL, « Journ. of Biol. Chem. », 1924, 58; Id. e G. CARMAN, ib., 1924, 60; 1926, 68; Id. e J. BEADLES, ib., 1927, 71.

(2) *The vegetable protoids*. Monogr. on Biochemistry.

(3) T. B. OSBORNE e G. VOORHEES, *The proteids of the wheat-kernel*, « Am Chem. Journ. », 1893, 15.

(4) T. B. OSBORNE e G. F. CAMPBELL, *The nucleic acid of the embryo*, « Journ. Am. Chem. Soc. », 1900, n. 22.

(5) T. B. OSBORNE e L. B. MENDEL, *The nutritive value of the wheat-kernel and its milling products*, « Journ. of Biol. Chem. », 1919, 37.

le proteine embrionali e delle cellule sottocuticolari, non solo sono differenti da quelle dell'endosperma per la loro costituzione chimica, ma anche per il loro valore nutritivo. Vediamo adesso come si trovano ripartite nelle varie parti del seme le differenti vitamine, sia quelle liposolubili, sia le idrosolubili.

In generale, i grani sono povera fonte di vitamina A dell'accrescimento che invece abbonda nelle foglie verdi. Però ricerche di McCollum e Davis⁽¹⁾ l'hanno rinvenuta nell'embrione dei semi, e più recentemente le ricerche di Stammers⁽²⁾ l'hanno riscontrata in notevole proporzione nella crusca.

Riguardo poi alla vitamina E, indispensabile per la riproduzione, si trova soprattutto concentrata nella parte insaponificabile dell'olio dei semi di grano, olio che deriva tutto dall'embrione della cariosside⁽³⁾. La semplice addizione dell'olio di grano ad una dieta povera di questa vitamina basta, non solo per assicurare la riproduzione, ma anche per evitare il riassorbimento placentare del feto, e per assicurare l'allattamento.

Delle vitamine idrosolubili, la più importante è certo la B₁, o anti-neuritica, la quale si trova anche nei semi del grano, ma solamente nello strato sottocuticolare, come fu dimostrato da Wells⁽⁴⁾, e nel germe, come fu osservato da Chick e da Hume⁽⁵⁾; i semi decorticati e degermizzati, quindi, ne sarebbero interamente sprovvisti. Anche l'altro componente della vitamina B, quello che promuove l'accrescimento, è stato trovato nelle cariossidi di grano, ma solo nello strato sottocuticolare e nell'embrione⁽⁶⁾, specie nei grani primaverili⁽⁷⁾.

Riguardo poi alla vitamina antipellagrosa, si conosce ormai che le migliori sorgenti di essa, oltre ai lieviti, alla carne fresca, al fegato di porco, ed alla conserva di salmone, si debbono considerare anche gli embrioni di grano⁽⁸⁾.

Infine anche la vitamina antiscorbutica, che non era mai stata rinvenuta nei semi allo stato di riposo, fu da Fürst⁽⁹⁾ in un primo tempo, e poi da Weil e Mouriquaud⁽¹⁰⁾, riscontrata nella parte embrionale del seme durante il processo della germinazione.

Questo per ciò che riguarda le vitamine. Riguardo poi al contenuto dei sali minerali, se ne ricava l'importanza dalla seguente tabella, dove è

(1) E. V. MCCOLLUM e DAVIS, « Journ. of Biol. Chem. », 1915, 21.

(2) S. B. STAMMERS, « Bioch. Journ. », 1921, 15.

(3) B. SURE, « Journ. of Biol. Chem. », 1924, 58.

(4) A. H. WELLS, « Phill. Journ. Soc. », 1921, 19.

(5) H. CHICK e E. M. HUME, « Proc. Roy. Soc. », 1917, 90 B.

(6) H. STENNBOCK e M. T. SELL e S. H. JONES, « Journ. of Biol. Chem. », 1923, 55.

(7) M. BELL e L. B. MENDEL, « Am. Journ. of Phys. », 1922, 62.

(8) J. GOLDBERGER e G. A. WHEELER, R. D. LILLIE, L. M. ROGERS, « Publ. Health. Rep. », 1928, 43.

(9) V. FÜRST, « Zeitschr. f. Hyg. und Inf.-Krankh. », 1912, 72.

(10) E. WEIL e G. MAURIQUAUD, « C.-R. Soc. Biol. », 1919, 82.

indicato il contenuto di elementi minerali in milligrammi per cento di sostanza umida, rispettivamente nella farina bianca degermizzata e decruscata cioè nell'endosperma, nel germe, e nell'intera cariosside ⁽¹⁾:

	Calcio	Fosfato	Potassio	Sodio	Cloro	Zolfo	Manganese	Ferro
endosperma . . .	20	92	115	60	74	177	18	1.0
cariosside intera .	41	432	473	39	68	181	133	5.0
embrione	71	1050	296	722	70	325	342	0.7

Questa tabella dimostra, come anche per i sali di più alta importanza biologica la distribuzione nelle differenti parti della cariosside è tutta a vantaggio del germe e della assisa cellulare sottocuticolare. E così dicasi pure dei metalli dotati di attività catalitica, studiati dal Bertrand ⁽²⁾, perchè il manganese, di cui i semi di grano sono ricchissimi (ne contengono più di 34 milligrammi per 1 chilogrammo), fu rinvenuto da Lindow e Peterson ⁽³⁾ nella porzione embrionale della cariosside; il rame, contenuto nella porzione del 7.2 milligrammi per chilogrammo, vi fu riscontrato da Guerithault ⁽⁴⁾; e soprattutto lo zinco, che si è rinvenuto abbondante nelle uova, nei feti e negli embrioni vegetali, nel germe del grano è stato trovato nell'alta proporzione di 40 milligrammi per chilogrammo di sostanza fresca da Tavillier e Imas ⁽⁵⁾.

Per quanto riguarda poi gli enzimi si sa che essi sono contenuti nella cariosside in varia proporzione e sono stati studiati specialmente: la cotasi ⁽⁶⁾ che attacca la cellulosa, la proteasi ⁽⁷⁾ che converte le proteine in peptoni, la diastasi ⁽⁸⁾ che saccarifica gli amidi, la zimasi, invertasi maltasi presente nel lievito, nonchè la catalasi, la glutinasi e la tirosinasi presenti nella crusca ⁽⁹⁾. Ora, ad eccezione della diastasi, tutte le altre si trovano esclusivamente o prevalentemente nell'assisa proteinica sottocuticolare e nell'em-

(1) Cifre riprodotte da H. C. SHERMANN, *Chemistry of food and nutrition*, New York, 1918; G. W. CLARK, « Journ. of Biol. Chem. », 1925, 65; L. LEMATTE, « Bull. Soc. Therap. », 1927, 32; W. H. PETERSON, « Journ. of Biol. Chem. », 1928, 78.

(2) G. BERTRAND, « C.-R. Acc. Scienc. », 1897, 124; 1913, 156; 1928, 186.

(3) G. W. LINDOW e W. H. PETERSON, « Journ. of Biol. Chem. », 1927, 75.

(4) B. GUERITHAULT, Thèse Pharm. Sup., Paris, 1927.

(5) M. TAVILLIER e IMAS, « Bull. Soc. Chim. Biol. », 1924, 8.

(6) BROWN e MORRIS, « Journ. Chem. Soc. », 1890.

(7) SHARP, « Cereal Chemistry », 1; COLLATZ, « Cerial Chemistry », 2.

(8) RUMSEY, « Am. Inst. Bakury Bull. », 8.

(9) BERTRAND e METERNULÈTS, « Compt.-Rendus », 144, p. 1285.

brione specie durante la germinazione del seme⁽¹⁾,⁽²⁾. Concludendo si comprende come nella porzione viva della cariosside del grano, e solamente in questa, vengano ad accumularsi tutti i fattori nutritivi più interessanti dello sviluppo e della crescita degli individui, cioè le vitamine, le proteine complete, i sali minerali, i metalli catalitici, e le dotazioni enzimatiche.

Ora la parte viva ed attiva della cariosside comprende, come abbiamo visto, non solo l'embrione, ma anche l'assise cellulare sottocuticolare. Ora è noto che le dimensioni dell'embrione (risultato in prevalenza di fattori interni) non sono in diretto rapporto con il peso ed il volume della cariosside (risultato invece in prevalenza di fattori esterni ambientali): questo dal lato morfologico. Dal lato fisiologico, poi, bisogna considerare che l'attività e l'energia potenziale embrionale sono indipendenti in senso assoluto dalla massa endospermica. Per quanto riguarda poi l'assise cellulare essa è, quantitativamente, funzione della intera superficie del granello; e sappiamo che questa funzione non è di ordine aritmetico ma di ordine geometrico. Per conseguenza, un chilogrammo di grano contenente per es. 24.000 semi, ha non solo uno sviluppo di superficie cuticolare molto maggiore che un chilogrammo contenente 18.000 semi, ma possiede una somma di energie individuali embrionali quasi una volta e mezza più del secondo; quindi il primo tipo di grano a semi piccoli, ad individui numerosi ed a maggior sviluppo di superficie cuticolare, possiede, a parità di peso, una maggior quantità di proteine cellulari, di vitamine, di sali, di enzimi e di sostanze catalitiche, che non il secondo; onde, a rigor di logica, il primo deve avere un più alto valore nutritivo e biologico del secondo, almeno per l'alimentazione durante i periodi di sviluppo e di crescita.

Guidato da questi concetti e da questi dati, ho iniziato una serie di ricerche, adoperando come materiale da esperimento un miscuglio di popolazioni granarie della varietà Saragolla di produzione locale selezionata meccanicamente con lo svecciatoio ordinario ed ottenendo due tipi di semi: tipo A a grossa cariosside, e tipo B a cariosside minuta di cui ecco la media dei dati biometrici.

	Numero chicchi in 10 cc.	Peso di 100 chicchi gr.	Volume di 100 chicchi cc.	Numero chicchi in un gr.	Numero chicchi in 1 cc.
Tipo A: grossi	179	4.094	5.6	23	17.9
Tipo B: minuti	270	2.750	4.1	34	27.0

(1) BARLEY, « Journ. of Biol. Chem. », 32.

(2) FAIRHOFER, « The Industrial Chemistry », 32.

Con questi due tipi di grano furono eseguite due serie di saggi alimentari su tacchinotti in via di sviluppo ma già capaci di utilizzare la graniaglia, adoperando il metodo massale di gruppi di animali non inferiori a 30. Ciascun gruppo riceveva una razione alimentare costituita dal 10% di semi di favette e dal 10% di semi di mais (questi alimenti dati agli animali a prima fame venivano giornalmente consumati per intero) e dall'80% di semi di grano rispettivamente del tipo a cariosside grossa e minuta.

Il tacchino si presta molto per questa specie di ricerche perchè animale onnivoro, di rapido sviluppo, e poi perchè, superata la crisi del rosso, che è una specie di crisi della pubertà in genere altamente mortale, diventa uno degli animali più resistenti e rustici, quindi il numero degli individui che costituiscono i gruppi sperimentali difficilmente va soggetto a falcidia.

I gruppi venivano pesati all'inizio ed alla fine di ciascun periodo sperimentale che durò dalle quattro alle sei settimane, e poi si tenne conto del peso vivo formato, in rapporto al quantitativo di mangime a seme piccolo e a seme grosso consumato, per ricavare il rendimento alimentare.

La prima serie di ricerche riguarda animali nel periodo più attivo della crescita, cioè tacchinotti che avevano appena superata felicemente la crisi del rosso, dell'età quindi di sette settimane; la seconda riguarda invece individui a crescita rallentata cioè tacchinotti di sei mesi di età; e perchè questi animali, almeno quelli della razza bronzea e cresciuti nell'ambiente meridionale completano lo sviluppo verso l'ottavo o il nono mese. I due gruppi che compongono ciascuna serie di ricerche sono costituiti da individui provenienti dalla medesima schiusa di uova, quindi sono tutti coetanei, omogenei, e comparabili.

Riporto in quadro riassuntivo i dati ottenuti, avvertendo che il valore biologico e nutritivo dei rispettivi tipi di grano è stato ricavato dal rapporto tra il quantitativo di peso d'animale vivo formato, ed il quantitativo in peso dei semi consumati, calcolando 100 il valore ottenuto dalla utilizzazione dei semi grossi.

Genere di alimentazione	Numero di animali componenti il gruppo	Peso iniziale complessivo del gruppo kg.	Durata in giorni del saggio	Quantità complessiva di grano consumato kg.	Peso finale complessivo del gruppo kg.	Peso complessivo guadagnato dal gruppo kg.	Quantità di grano consumato per 1 kg. di peso vivo guadagnato kg.	Valore biologico percentuale dell'alimento
----------------------------	---	--	--------------------------------------	---	---	--	---	---

SERIE I: ANIMALI IN PIENO SVILUPPO

con semi piccoli	43	26	29	193	96	70	2.75	138
con semi grossi	42	27	29	214	72	48	4.45	100

— 145 —

SERIE II: ANIMALI A SVILUPPO RALLENTATO

con semi piccoli	31	102	32	336	140	38	8.85	124
con semi grossi	32	104	32	340	129	29	11.60	100

Dal che si ricava chiaramente che i tacchini in via di sviluppo utilizzano meglio i semi di grano a cariosside minuta che i semi di grano a cariosside grossa; che questa utilizzazione è tanto più integrale ed economica quanto più attiva è la crescita dell'animale alimentato: che quindi i grani a chicchi piccoli hanno un valore nutritivo e biologico, almeno per il periodo dello sviluppo e della crescita e per l'animale tacchino, superiore ai grani a chicchi grossi.

Se queste ricerche si potessero estendere anche agli altri animali di maggiore importanza zootecnica, ed all'uomo stesso — e non ci sono ragioni per credere che si abbiano discordanti risultati — e se la caratteristica dell'alto valore biologico dei semi piccoli dovesse estendersi anche agli altri prodotti granellari del suolo, sia graminacee che leguminose o composite ecc. allora le ricerche condotte su questo ordine di idee non solo avrebbero valore scientifico, ma una immediata importanza pratica per l'economia rurale e sociale; quando si pensi che, in base a questi primi risultati ottenuti, un ettaro di terreno verrebbe ad elevare dal 25 a più del 30 % il suo rendimento in sostanze plastiche, cioè verrebbe, in proporzione, a concorrere alle necessità costruttive degli uomini, che per un quarto del loro numero si trovano costantemente in periodo di crescita.

Biologia (Patologia vegetale). — *Una nuova specie di « Helminthosporium » in una malattia del banano segnalata nella Somalia Italiana.* Nota ⁽¹⁾ di M. CURZI, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

In questi ultimi tempi, S. A. R. il Duca degli Abruzzi, ha richiamato l'attenzione della R. Stazione di Patologia vegetale su alcune malattie del banano, e particolarmente della *Musa Cavendishii*, manifestatesi recentemente nelle coltivazioni bananifere della Somalia Italiana. Fra queste, una speciale malattia, caratterizzata da macchie piuttosto estese sul gambo, su lo scapo, su la costola e il lembo delle foglie, ha maggiormente interessato l'Illustre colonizzatore per la sua diffusione e per la sua gravità.

Sul gambo e su lo scapo florale le macchie di infezione si presentavano sotto l'aspetto di profonde necrosi talora depresse, screpolate e circondate da un margine più o meno appariscente; su le foglie tali macchie si estendevano per lo più ad interi settori del lembo ed erano limitate da una linea scura.

Il materiale inviato a più riprese dalla Somalia, che il Direttore di questa Stazione, Prof. L. Petri, mi ha affidato in esame, mostrava le zone infette cosparse dalle fruttificazioni di vari ifomiceti dei generi *Fusarium*, *Aspergillus*, *Alternaria*, *Coniosporium*, *Stachylidium*, *Helminthosporium*, ecc.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1931.

La qualità del materiale ed il lungo viaggio che esso ha dovuto fare prima di arrivare a noi, malgrado l'accurata e diligente imballatura, avevano favorito lo sviluppo di specie fungine ordinariamente saprofite o debolmente parassite, capaci soltanto di aggravare i danni causati da veri agenti parassitari. Fra le specie fungine osservate una attrasse la mia attenzione per la sua costanza e per il suo aspetto parassitario, e cioè una specie di *Helminthosporium*, il cui micelio ialino e scuro, di diametro molto

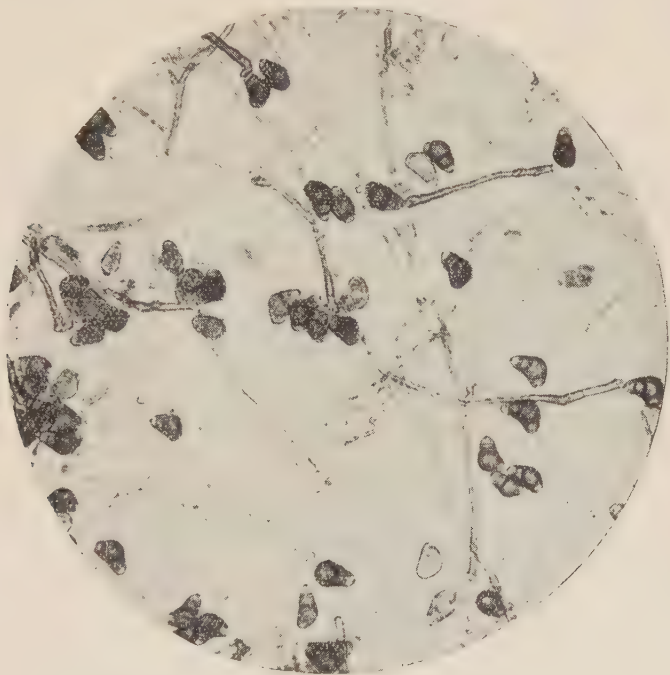


Fig. 1. - Fruttificazioni di *Helminthosporium gibberosporum* n. sp.
su agar infuso di grano glucosato, X 400.

variabile, ma piuttosto grosso, non mancava mai nelle zone periferiche delle macchie presentate dagli organi colpiti.

Ho poi riscontrato questo ifomicete da solo, senza la concorrenza di altri funghi, in diverso materiale malato inviato in alcool, lasciandomi sempre più l'impressione della sua azione parassitaria e della sua stretta relazione con la malattia. Le sue fruttificazioni erano rarissime nel lembo fogliare, soltanto qua e là si osservavano alcuni conidiofori uscenti dagli stomi; ma si presentavano talora molto abbondanti e tali da formare una muffa vellutata verde scura su le necrosi dello scapo e talora anche del gambo.

Il fungo ha i conidiofori sparsi, fuliginei, eretti, settati, i quali terminano con l'apice sporifero più o meno irregolarmente ingrossato, contorto, ondulato, con più dentelli corrispondenti all'attacco dei conidi.

I conidi generalmente sono tre settati, prima di colore olivaceo chiaro poi subito olivaceo scuro, con la terza o penultima cellula più bruna e grossa e con le estreme più chiare e leggermente attenuate verso l'apice e la base. Fin dal primo sviluppo i conidi sono inequilaterali: quando sono ialini e continui, presentano un lato più rigonfio dell'altro, che forma spesso nella linea di contorno un rilievo convesso il quale viene ad accentuarsi man mano che i conidii si accrescono; a maturità la parte ventrale è quasi piatta, oppure concava, mentre quella dorsale è sempre sensibilmente convessa (Fig. 1).

Nella grande maggioranza i conidii sono tre settati e misurano $20 - 34 = 11 - 16 \mu$; tanto su la matrice come su le colture artificiali fin ora fatte, ho sempre osservato oltre il 95 % dei conidii con tre setti trasversali. Non mancano però altri conidii (macroconidii) con un numero di setti variabile generalmente da cinque a nove e con le dimensioni comprese fra $55 - 87 = 12 - 15 \mu$, i quali hanno una forma ellissoidale o clavata leggermente curva e un colore fuligineo più uniforme e meno intenso. Questi conidii sono poco numerosi, li ho osservati soltanto su la matrice, nelle necrosi del gambo e dello scapo dell'infiorescenza.

La germinazione si ha soltanto dalle due cellule polari; in acqua e nelle soluzioni nutritive i conidii emettono facilmente dall'apice e dalla base, lateralmente alla cicatrice di attacco del conidio all'ifa fruttifera, vigorosi tubi micelici.

Questa particolarità nella germinazione, accoppiata alla forma speciale che i conidii presentano, mi porta a classificare il fungo fra le specie tipiche del genere *Helminthosporium*, che Nisikado⁽¹⁾ raggruppa nel sottogenere *Eu-Helminthosporium*, i cui stadi ascofori conosciuti rientrano nel genere *Ophiobolus*. La specie da me isolata dal banano è quindi affine allo stadio conidico dell'*Ophiobolus eterostrophus* Drech., all'*Helminthosporium sativum* P. K. et B., all'*H. Saccharii* Butler e ad altre specie parassite dei cereali. Non mi risulta che essa sia stata fin ora descritta e per questo la comunico come specie nuova, chiamandola *Helminthosporium gibberosporum* n. sp.

*
* *

La relazione fra questo fungo e le macchie di infezione segnalate su gli organi aerei della *Musa Cavendishii* coltivata in Somalia, viene ad essere confermata oltre che dalle osservazioni microscopiche, anche dalle colture di isolamento e da alcune prove preliminari di infezione artificiale.

Su oltre settanta colture di isolamento dalle porzioni marginali delle zone infette delle foglie, del fusto e dello scapo, una sessantina circa hanno

(1) NISIKADO J., *Studies on the Helminthosporium diseases of Graminaceae in Japan*. «Ber. Ōhara Inst. Landw. Forsch.»; IV, I, pp. 111-126, 9 pl., 1929.

sviluppato lo stesso *Helminthosporium* e le poche rimaste, molte hanno presentato anche lo stesso fungo insieme ad altre specie fungine di penetrazione secondaria.

Le inoculazioni artificiali sono state fatte su alcune piante di *Musa sapientum* L. dell'Orto Botanico dell'Università di Roma, ponendo in piccole lesioni sottoepidermiche, praticate nel fusto e nelle costole delle foglie, una porzione di una coltura pura del fungo. Nelle prove eseguite, specialmente nel fusto, il fungo ha dimostrato di poter invadere i tessuti sani periferici al punto di inoculazione, producendo, dopo una diecina di giorni, delle necrosi depresse, di qualche centimetro di diametro.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ VII di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

La presente Nota si collega alle quattro precedenti di queste ricerche⁽³⁾. Prima di passare alla trattazione per esteso abbiamo voluto ripetere ed estendere i vari quesiti trattati.

I. *Nuove esperienze di trapianto di abbozzi embrionali di Anuri in Urodeli.*

Quest'anno abbiamo avuto l'opportunità di sperimentare con rane più affini sistematicamente, come si considerano, alla *Rana temporaria* (*Rana agilis*, *Rana arvalis*, e una terza Rana [*Rana X*] che forse è la *Rana temporaria*, ma l'identificazione perfetta⁽⁴⁾ non s'è raggiunta). Usando queste specie abbiamo ottenuto il differenziamento della vescicola ottica primaria, dell'abbozzo olfattivo e del prosencefalo di *Rana agilis* trapiantati nel ventre di embrioni di *Triton cristatus* e degli stessi abbozzi di *Rana X* trapiantati in *Axolotl*. Abbiamo inoltre ottenuto il perfetto differenziamento dell'abbozzo oculare di *Rana esculenta* in *Axolotl*.

Con le esperienze già esposte l'anno scorso si può dire ormai che gli abbozzi oculari, olfattivi e nervosi di qualsiasi specie di Anuri sperimentati

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1931.

(3) In questi Rendiconti; vol. X, 1929; vol. XI, 1930; vol. XII, 1930; e in «Atti Società Ital. di Anatomia», 1° Congresso, Bologna, 1929.

(4) Ciò è dovuto all'aver avuto a disposizione pochissimi esemplari di embrioni di queste specie, venuti dalla Campagna Romana. Un lavoro apposito (Spirito) sarà dedicato allo studio sistematico degli embrioni e larve delle rane della Campagna Romana. La *Rana agilis* con cui abbiamo sperimentato proveniva dalla Campagna Senese.

si differenziano su qualsiasi specie di embrioni di Urodeli. Un comportamento peculiare è dato finora dal *Bufo vulgaris* i cui abbozzi trapiantati in *Triton* ne arrestano lo sviluppo e in breve ne provocano la morte, nel tempo stesso, però, che si è ottenuto, in due casi fortunati, un certo differenziamento della vescicola ottica.

II. Fusioni.

Quest'anno abbiamo ottenuto un bellissimo caso (vedi figura) di fusione e regolazione di vescicola ottica di *Bufo vulgaris* trapiantata accanto a



Fig. 1. — Fusione di vescicola ottica primaria di *Bufo vulgaris* (parte superiore) con la vescicola ottica secondaria giovane di *Axolotl* (parte inferiore della microfotografia). La fusione mostra una regolazione perfetta degli strati del calice ottico. Si notano invece due cristallini (Obb. 6a, Leitz).

quella *in situ* dell'*Axolotl* sì che potrebbe scambiarsi per un occhio unico regolare, se non fosse la presenza di due cristallini e la diversa grandezza dei nuclei cellulari, caratteristica delle due specie.

Abbiamo ottenuto ancora, e per la prima volta, fusione e bellissima regolazione dell'abbozzo oculare di *Rana esculenta* trapiantata accanto a quello di *Axolotl* e di quello di *Rana X* trapiantato accanto alla vescicola ottica di *Axolotl*. Un bellissimo caso di fusione (tra altri di minore importanza) fra sistemi nervosi è stato ottenuto con un frammento di encefalo di *Rana esculenta* trapiantato presso l'encefalo di *Triton taeniatus*, con una perfetta

regolazione delle pareti. Altri casi di fusione si sono ottenuti tra parti di encefalo di *Bufo vulgaris* con quello di *Axolotl* e di retine di *Bufo vulgaris* con encefalo di *Axolotl*.

III. Connessioni nervose.

Abbiamo confermato la possibilità di connessione mediante fibre nervose tra vescicola ottica di *Rana esculenta* e l'encefalo di *Triton taeniatus*.

IV. Trapianti ripetuti.

Abbiamo voluto studiare l'influenza che l'ospite (embrione di Urodelo) può esercitare su un secondo trapianto di abbozzo embrionale di Anuro ripetuto a breve distanza dal primo; e ciò per controllare se si stabilisca nei nostri casi una condizione immunitaria che ostacoli il secondo trapianto. (Ricordiamo a tale proposito le esperienze di Weber, Faldino, ecc.).

In parecchi casi operando con la vescicola ottica primaria di *Rana esculenta* su *Triton taeniatus* abbiamo ottenuto un perfetto differenziamento sia nel primo che nel secondo trapianto. Gli stessi risultati sono stati ottenuti con gli abbozzi oculari di *Bufo vulgaris* trapiantati in *Axolotl*.

Abbiamo ottenuto, è vero, talvolta nel secondo trapianto qualche risultato di differenziamento organologico disordinato e in altri casi una forte iperemia vascolare in tutti e due i trapianti. Questi risultati non possono però infirmare i risultati positivi raggiunti; quindi il primo trapianto non impedisce la possibilità di sviluppo del secondo trapianto. Vogliamo tuttavia ricordare che il Faldino parla (ripetendo in due esperienze un secondo innesto omoplastico di tessuti embrionali nell'occhio di Mammi-fero [Coniglio]) di immunità soltanto locale.

V. Comportamento di abbozzi embrionali di Urodeli trapiantati su Anuri.

Stabilimmo nelle Note precedenti che la vescicola ottica di *Triton* trapiantata in *Rana esculenta* va rapidamente distrutta. Il Perri con estese ricerche ha approfondito l'argomento e ormai possediamo una documentazione tale per cui non vi può essere alcun dubbio sul fatto che per primo noi rilevammo: rimane così assodato che mentre la vescicola ottica di *Rana esculenta* si differenzia nell'embrione di *Triton*, nelle stesse condizioni sperimentali i trapianti inversi non si verificano!

Valendoci dell'opportunità di aver potuto avere embrioni di altre specie di *Rana*, abbiamo voluto estendere le nostre esperienze di trapianti di vescicole ottiche di differenti Urodeli su embrioni di differenti specie di Anuri.

Abbiamo pertanto eseguito quest'anno esperienze di trapianto di vescicole ottiche nelle seguenti combinazioni di esemplari:

<i>Triton cristatus</i>	su <i>Bufo vulgaris</i>
<i>Triton cristatus</i>	su <i>Rana agilis</i>
<i>Axolotl</i>	su <i>Rana agilis</i>
<i>Axolotl</i>	su <i>Rana X</i>
<i>Axolotl</i>	su <i>Rana esculenta</i>
<i>Axolotl</i>	su <i>Bufo vulgaris</i>
<i>Axolotl</i>	su <i>Rana arvalis</i>

In tutto questo gruppo di ricerche per quanto, date le molte specie, non si sia potuto raggiungere quel numero di esperienze che avremmo voluto, possiamo tuttavia dire che nei primi cinque gruppi di esperienze abbiamo ottenuti risultati identici a quelli di *Triton* su *Rana esculenta*. Invece operando con *Axolotl* sulla *Rana arvalis* in un caso rimasto fino ad ora unico abbiamo ottenuto un bel differenziamento della vescicola ottica, e in altri due casi differenziamento incompleto, accompagnato da segni di distruzione⁽¹⁾. Nell'*Axolotl* su *Bufo vulgaris* abbiamo rilevato una notevole resistenza degli abbozzi senza che si possano notare segni di avanzamento.

I risultati ora esposti meritano considerazione perchè mostrano sempre più il valore della costituzione zoologica nel differente comportamento che può avere il medesimo abbozzo embrionale dello stesso datore (Urodelo) quando vari l'ospite (Anuro).

VI. - Esperienze di *Triton* su *Hyla*.

Ripetendo le esperienze quest'anno abbiamo avuto modo di constatare, e un primo accenno l'avevamo già dato lo scorso anno, che la vescicola ottica di *Triton taeniatus* e *cristatus* (sia primaria che secondaria o introflessa) trapiantata su embrioni di *Hyla arborea* presenta uno sviluppo di massa e una resistenza maggiore che non l'occhio degli Anuri negli Urodeli. Un trattamento con tiroide (nutrendo le larve di *Hyla*) ci ha dimostrato quello che si poteva prevedere, che cioè i processi distruttivi vengono accelerati, come dimostra il confronto con esperienze di controllo di esemplari di *Hyla* nutriti con tuorlo d'uovo. In questi ultimi si vedono

(1) Teniamo a far risaltare che questi risultati dell'*Axolotl* sulla *Rana arvalis* si sono ottenuti soltanto con le vescicole ottiche secondarie già alquanto avanti nello sviluppo. Non abbiamo potuto sperimentare con la vescicola ottica primaria perchè ci è venuto a mancare il materiale. In ogni modo, quali che siano i risultati che daranno le esperienze in proposito, rimane un risultato differenziale con quanto è avvenuto, con gli stessi stadi, in altre esperienze (*Axolotl* su *Rana esculenta*, ecc.).

ancora dopo 34 giorni dall'operazione parti ben differenziate, sebbene l'occhio sia già in preda a processi distruttivi, mentre in quelli trattati da alcuni giorni con tiroide si trovano solo residui pigmentati dell'occhio trapiantato.

Riassunto:

Tutto il complesso delle nuove esperienze, avanti ricordate, ci consente di confermare e meglio lumeggiare i risultati degli scorsi anni. Abbozzi di organi simili (vescicole ottiche, encefalo) di Anuri ed Urodela tendono a fondersi e a dare regolazioni di forma tali da ricordare quelle ottenute nei trapianti ed innesti omoplastici ed eteroplastici (Born, ecc.) e queste regolazioni sono tali da escludere che si tratti di banali fusioni per ragioni meccaniche. Si può allora pensare che questi fenomeni di vera affinità siano dovuti ad azioni chemiotropiche, come risulta ancora dai rapporti che si possono stabilire con assoni nervosi tra abbozzi trapiantati di Anuri con l'encefalo dell'Urodela ospite.

Le esperienze fatte allo scopo di dimostrare se un secondo trapianto di abbozzo oculare venga, o no, influenzato da una prima operazione di trapianto, ci hanno condotto, per i casi positivi ottenuti, ad escludere una influenza diretta, perchè il secondo trapianto può differenziarsi perfettamente.

Numerose esperienze sono state compiute estendendo i trapianti di vescicole ottiche di vari Urodela su nuove specie di Anfibi anuri e particolarmente su varie specie di *Rana*. In linea generale possiamo confermare quanto abbiamo già stabilito negli scorsi anni a proposito dei trapianti di abbozzi oculari di *Triton* su *Rana esculenta* — esperienze queste minutamente analizzate nel nostro Istituto dal Perri — vale a dire che gli abbozzi oculari di vari Urodela trapiantati negli Anuri vanno distrutti. Questa non è però una legge generale; già abbiamo descritto il comportamento positivo della vescicola ottica di *Triton* in *Hyla arborea*. Inoltre le esperienze di quest'anno aggiungono a questi risultati positivi quelli della *Rana arvalis* che ha permesso in alcuni casi il differenziamento più o meno completo dell'abbozzo oculare di *Axolotl*. Ancora una volta dunque si rivela l'importanza della costituzione zoologica perchè, mentre alcune specie dimostrano una netta incompatibilità biochimica, altre rivelano una maggiore o minore intensità di questi processi fino a giungere alla tolleranza e al differenziamento nella fase embrionale.

I casi inversi di trapianti di Anuri su Urodela finora ci hanno sempre mostrato casi positivi di differenziamento. Per ultimo abbiamo ricordato le esperienze con tiroide che ci hanno fatto vedere come tale trattamento acceleri i processi distruttivi che si stabiliscono, al termine della fase embrionale, nell'occhio di *Triton* trapiantato in *Hyla arborea*.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Ricerche su trapianti di abbozzi oculari di Triton su parti isolate di embrioni di Rana esculenta*⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ di ALDO SPIRITO, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

In una Nota⁽³⁾ pubblicata lo scorso anno in questi « Rendiconti », trattando di innesti di estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli, riferivo, in perfetta concordanza a quanto avevano stabilito in precedenza Cotronei e Spirito⁽⁴⁾ per i trapianti xenoplastici di alcuni abbozzi di organi, i primi risultati ottenuti nelle diverse combinazioni di unione di zone, tra le varie specie sperimentate.

Nei riguardi degli innesti di porzioni cefaliche di *Triton* su *Rana esculenta* così scrivevo: « Dalle mie esperienze in proposito risulta che le parti anteriori più o meno grandi di embrioni di Urodeli vanno rapidamente distrutte quando siano innestate su esemplari di *Rana esculenta* mutilati della regione anteriore, ma che conservino la regione degli abbozzi branchiali. Nelle esperienze, invece, nelle quali viene asportata anche questa regione si è avuto, a parità di tempo e di temperatura, un completo differenziamento e sviluppo degli abbozzi di organi e di tessuti in esse contenuti ».

Ripetendo quest'anno le esperienze per indagare le ragioni del diverso comportamento ho creduto opportuno tentare, anche per ragioni di semplicità operatoria, non più l'innesto delle regioni anteriori di *Triton* su tronco di *Rana*, ma semplicemente il trapianto di qualche abbozzo in esse contenuto, e che, insieme a tutto il resto del complesso cefalico, si era dimostrato suscettibile di distruzione o di differenziamento nei due casi sopra descritti. Ho scelto all'uopo le vescicole ottiche primarie o appena introflesse⁽⁵⁾ di *Triton taeniatus*, laddove il materiale di *Rana esculenta* era formato di parti isolate o di esemplari interi allo stadio di bottone codale.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1931.

(3) Questa Nota II si collega direttamente e anzi la considero come continuazione esplicativa della mia Nota I dal titolo: *Di alcune esperienze di innesti di più estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli*, pubblicata in questi « Rendiconti », vol. XII, 1930.

(4) In questi « Rendiconti », vol. X, 1929; vol. XI, 1930; vol. XII, 1930 e in « Atti della Società Italiana di Anatomia », 1929.

(5) Ho scelto materiale giovanissimo perchè, come ha dimostrato il Perri, le vescicole ottiche avanzatissime di *Triton* quando hanno esaurito il loro vitello, o meglio quando il tuorlo non è più visibile sotto forma di sferuletta, possono vivere integre, e anche avanzare, per un tempo maggiore di quando le cellule contengono vitello.

ESPERIENZE DELLA 1^a SERIE.

Trapianto di vescicole ottiche di Triton taeniatus nel ventre di embrioni di Rana esculenta mutilati di tutta la regione anteriore, abbozzi branchiali inclusi.

Delle due vescicole ottiche del *Triton* adoperato, una era posta (nel ventre) sul tronco isolato di *Rana esculenta* e l'altra, per controllo e nella stessa posizione, su di un esemplare intero sviluppatosi dalla stessa covata d'ova.

In tutto questo lotto di esperienze si è avuto, a parità di tempo e di temperatura, distruzione dell'abbozzo trapiantato sia sul tronco che sull'intero, distruzione che si inizia già un giorno dopo l'operazione. Dopo 4 giorni (giugno) in genere non vi è affatto traccia delle vescicole poste negli addomi, i quali nel frattempo mostrano la prima delineazione delle anse intestinali.

La distruzione verificatasi per gli abbozzi oculari nel tronco isolato similmente a quel che avviene negli esemplari interi, veniva ad essere in antitesi con i risultati precedenti degli innesti e poteva essere spiegata in due sole maniere: o esservi proprio nel tronco (vitello) le sostanze distruttrici gli abbozzi degli Urodeli trapiantativi, o comportarsi diversamente l'abbozzo oculare isolato da quanto è insieme a tutto il resto della testa. Scartando provvisoriamente questa seconda ipotesi — che infatti non si è poi verificata — e tenendo presente l'idea del Cotronei sulla incompatibilità del metabolismo vitellino tra abbozzi embrionali di *Triton* trapiantati sugli embrioni di *Rana esculenta*, ho eseguito numerose nuove operazioni che si possono riassumere nelle:

ESPERIENZE DELLA 2^a SERIE.

I Gruppo. *Trapianto delle vescicole ottiche di Triton taeniatus nella regione cefalica anteriore isolata, abbozzi branchiali esclusi, di embrioni di Rana esculenta.*

Questo gruppo di esperienze ha avuto lo scopo logico di attuare delle condizioni mancanti nel primo gruppo, e cioè di porre le vescicole ottiche di *Triton* in un ambiente con scarso vitello e, per di più, rapidamente assorbibile dai tessuti in cui si trova inglobato; ciò che viene ad essere perfettamente realizzato nelle regioni cefaliche anteriori. Le operazioni venivano eseguite nella maniera seguente: su due esemplari di *Rana esculenta* della stessa covata di ova, al posto dei propri abbozzi oculari di destra venivano poste le vescicole ottiche di uno stesso embrione di *Triton taeniatus* e, appena dopo la cicatrizzazione, in un embrione veniva separata

la sola parte anteriore — abbozzi branchiali esclusi, in modo da impedire qualsiasi apporto di sostanze da altre regioni — laddove l'altro usato per controllo veniva rimasto intero o quasi.

In tutta questa serie di operazioni si è potuto notare, già con l'esame eseguito *in vivo* al microscopio binoculare, che nel tempo stesso che gli abbozzi oculari di *Triton* andavano perdendo la loro forma e sparendo negli esemplari interi, nelle regioni cefaliche isolate rimanevano integri e dopo

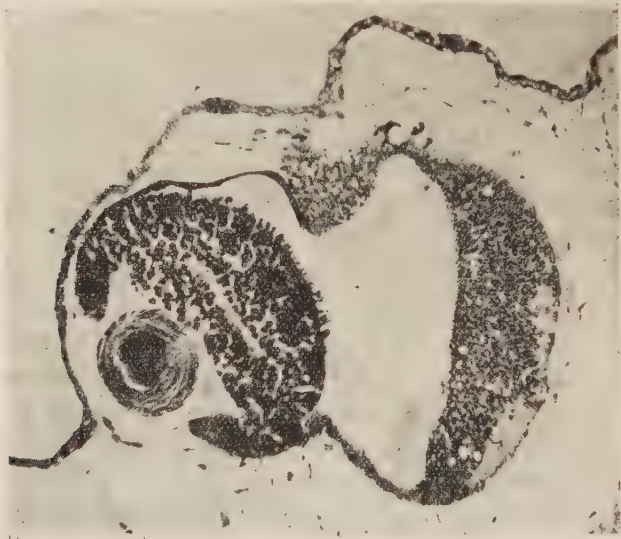


Fig. 1. — Microfotografia di una sezione trasversale di una parte cefalica anteriore di *Rana esculenta* con la vescicola ottica di *Triton* differenziata. Obb. 6a Leitz.

un po' di tempo si poteva perfino osservare la presenza di cristallini ben formati e i primi accenni della pigmentazione del *tapetum*. Dopo qualche tempo (6 giorni) gli occhi di *Triton* apparivano perfetti e quindi le coppie (girino intero e parte isolata) sono state fissate. Nell'animale intero già da due giorni si era perduta qualsiasi traccia visibile degli abbozzi trapiantativi.

L'esame microscopico delle sezioni delle parti cefaliche isolate ha mostrato gli occhi di *Triton* in condizioni perfette di conservazione, con abbondanti mitosi e sprovvisti affatto di tuorlo. Anche nei casi nei quali l'abbozzo oculare è stato trapiantato allo stadio di vescicola ottica primaria, senza nessun accenno di invaginazione e di ispessimento dell'ectoderma lentogeno, si è avuto la formazione di un calice perfetto e di un bel cristallino (fig. 1). La retina si è differenziata e mostra tutti gli strati; a volte anche un accenno di nervo ottico.

In queste condizioni non solo l'abbozzo oculare ha dimostrato la possibilità di uno sviluppo istologico e morfologico più o meno normale che anche l'abbozzo olfattorio — ancora più suscettibile dell'occhio della solita distruzione embrionale — trapiantato allo stadio di semplice piastra, si è approfondato in una bella fossetta, nel tempo stesso differenziandosi.

II Gruppo. *Trapianto di vescicola ottica di Triton taeniatus nel bottone codale isolato di embrioni di Rana esculenta.*

Ottenuti così per la prima volta questi risultati positivi di differenziamento dell'abbozzo oculare (vescicola ottica primaria e vescicola ottica appena introflessa) e dell'abbozzo olfattivo di *Triton taeniatus* su *Rana esculenta* è

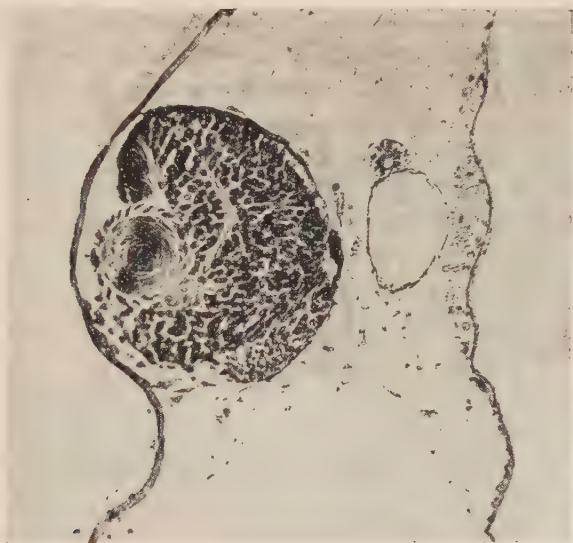


Fig. 2. — Sezione trasversale di una coda isolata di *Rana esculenta* con la vescicola ottica di *Triton* differenziata.

Obb. 6a Leitz.

stata mia cura sperimentare con altre regioni embrionali aventi le stesse caratteristiche delle parti cefaliche isolate, e cioè scarso tuorlo rapidamente assorbibile nell'ulteriore sviluppo. Ho scelto per queste operazioni il bottone codale, come la parte più rispondente all'impostazione delle operazioni, e come una regione ben sviluppabile anche se separata dall'organismo intero.

Le operazioni sono state eseguite come quelle del primo gruppo, sempre con esemplari di controllo, i quali sono serviti a dimostrare che, anche trapiantata nella coda di girini interi di *Rana esculenta*, la vescicola ottica di *Triton* va rapidamente distrutta.

Nelle code sviluppatesi dai bottoni codali isolati ho potuto notare, invece, fin dai primi giorni dopo l'operazione, un processo di pigmentazione dell'abbozzo oculare trapiantatovi e la formazione di una lente evidentissima.

L'esame microscopico delle sezioni seriali di queste parti isolate, fissate 6 giorni dopo l'operazione, ha dimostrato un buon sviluppo morfologico delle vescicole ottiche di *Triton* e un perfetto differenziamento istologico sì che gli occhi si presentano con le retine distinte in tutti gli strati e col *tapetum* pigmentato. Il cristallino è in uno stato avanzatissimo ed in ottime condizioni (fig. 2).

Nelle code degli esemplari interi, fissati dopo lo stesso periodo di tempo, invece non si trova nessuna traccia degli abbozzi trapiantativi.

III. Gruppo. *Trapianto di vescicole ottiche di Triton nel bottone codale di embrioni di Rana esculenta, isolato insieme ad un segmento del tronco.*

Ottenuti così i risultati positivi sopradescritti e che avevano messo in luce la possibilità di differenziamento per gli abbozzi oculari e olfattorio di *Triton* trapiantati nella parte cefalica anteriore e nel bottone codale isolati di *Rana esculenta*, nel tempo stesso che si otteneva rapida distruzione nel tronco anch'esso isolato, sono state eseguite altre operazioni per dimostrare ancor meglio come l'azione distruttrice risiedesse proprio in quest'ultimo, o, meglio, fosse data dalle sostanze derivanti dal metabolismo del suo contenuto; e cioè il vitello (Cotronei).

Alle operazioni del gruppo precedente, quindi, ho apportato la modificazione di separare non il solo bottone codale, ma con esso un piccolo segmento ventrale. Esemplari interi, operati identicamente, fungevano come sempre da controllo.

Le esperienze di questo gruppo hanno dato i risultati che si potevano logicamente attendere, data la possibilità di una diffusione di sostanze del ricambio vitellino fin nella coda. Infatti non si è ottenuto alcun differenziamento degli abbozzi oculari di *Triton* trapiantati, ma soltanto una maggiore resistenza rispetto a quelli posti nel bottone codale di esemplari interi. Ciò è dato evidentemente da un minore e più lento apporto di sostanze distruttrici là dove si sono verificati quei difetti di circolazione dovuti all'assenza del cuore.

In conclusione dalle esperienze suesposte si può rilevare che la vescicola ottica primaria o appena introflessa di embrioni di *Triton taeniatum*, sempre distrutta allorchè viene trapiantata in qualsiasi regione di embrioni di *Rana esculenta* interi (Cotronei e Spirito, Perri), può differenziarsi morfologicamente e istologicamente se si trapianti nella regione cefalica anteriore o nel bottone codale isolati.

Nel bottone codale isolato insieme ad un segmento ventrale si è avuto soltanto una maggiore resistenza dell'abbozzo oculare trapiantatovi rispetto al controllo dato dagli esemplari interi; e, nel ventre isolato, la solita rapida distruzione.

Il fattore isolamento delle regioni cefaliche e del bottone codale, permettente il differenziamento mai prima ottenuto degli abbozzi oculari e olfattorio di Triton in Rana esculenta, deve essere quindi interpretato, per la mancanza di una adeguata circolazione, come determinante l'impossibilità di apporto in esse zone delle sostanze del ricambio del vitello di riserva, proprio del ventre (Cotronei): sostanze scarsissime e di rapidissimo esaurimento nelle regioni sud-dette ⁽¹⁾.

Rimangono così anche spiegate le ragioni di differenza di comportamento accennate al principio della presente Nota nei riguardi degli innesti di estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli, eseguite lo scorso anno, poichè quando non si è ottenuta distruzione della parte anteriore di Triton sul tronco di Rana esculenta, per la mancanza del cuore, e quindi per l'insufficiente circolazione, non vi è stato passaggio di sostanze tra la regione ventrale dell'Anuro e la parte cefalica dell'Urodelo, funzionante vieppiù meglio in questi casi come regione autonoma. Nei casi invece nei quali, data la presenza del cuore dell'Anuro, si è verificato questo passaggio di sostanze distruttrici (all'esame delle sezioni si è notato nelle teste di Triton gran copia di sangue di Rana esculenta) si è ottenuta, come sempre, rapida distruzione delle regioni innestate.

(1) Ho istituito esperienze di trapianto di vescicole ottiche di Triton su regioni cefaliche isolate, ripetendo con il medesimo abbozzo vari trapianti successivi sempre in regioni cefaliche isolate di Rana esculenta dello stesso stadio (bottone codale) e ciò per vedere il comportamento dell'abbozzo trapiantato su regioni cefaliche in uno stadio giovanile standardizzato.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1931 (Anno IX).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Meccanica. — *Sui corpi aerotermodinamici portanti.* Nota⁽¹⁾
del Corresp. G. A. CROCCO.

Abbiamo definito in una precedente Nota⁽²⁾ *corpo aerotermodinamico* un corpo aerodinamico in moto che presenti una cavità entro la quale si raccolga l'aria esterna alla temperatura e pressione spontanea dovuta alla velocità, per lasciarla sfuggire in direzione opposta dopo averla surriscaldata. La velocità di uscita risultando maggiore della velocità di entrata a causa del surriscaldamento, ne nasce un effetto reattivo che può neutralizzare la resistenza del corpo o trasformarlo in corpo propulsivo.

Vogliamo ora applicare questo concetto a corpi aerodinamici *portanti*, del tipo dei velivoli, ove alla *resistenza di penetrazione* si aggiunge una *resistenza di sustentazione*, dovuta al meccanismo aerodinamico per il quale si genera la *partenza*.

*
* *

È noto che tale meccanismo, per le velocità attuali dell'aviazione, che consentono di ritenere l'aria *incompressibile*, consiste in una circolazione fluida attorno al corpo portante, indefinitamente estesa da ogni parte; e che, se il corpo portante è esso stesso indefinito nel senso trasversale al moto, conduce a una resistenza di sustentazione *nulla*.

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1931.

(2) Questi «Rendiconti», fascic. del 21 giugno 1931. *Sui corpi aerod. a resist. negativa*. In tale Nota è occorso nella formula (14) un errore tipografico. In luogo di $\omega + \Omega$ deve leggersi $2\omega + \Omega$. È stato corretto negli estratti.

Se invece il corpo portante è finito (*ala*), la *resistenza di sustentazione*, altrimenti detta *resistenza indotta*, risulta espressa, com'è noto, da:

$$R_s = k \cdot \frac{P^2}{\rho S V^2},$$

dove k è una costante dipendente dall'*allungamento* dell'*ala*; P la sua portanza; S la sua superficie; e ρ e V sono la densità dell'aria ambiente e la sua velocità relativa.

Quando tuttavia la compressibilità dell'aria non è più trascurabile, e ciò avviene quando la velocità si avvicina a quella del suono, il classico meccanismo della circolazione ne rimane alterato, finchè, superata la velocità del suono, esso cambia completamente di natura, suddividendosi lo spazio fluido in due distinte regioni, una delle quali, anteriore al corpo, rimane indisturbata; e l'altra, posteriore, sede delle reazioni sustentatrici, limitata dal *diedro di Mach*, risulta tanto meno estesa quanto più la velocità di cammino superi quella del suono.

Chiameremo *subacustiche* le velocità per le quali sono attendibili le formule dell'ordinaria aviazione, generalmente inferiori a $0.7 c$, dove c sia la velocità del suono nell'aria alla temperatura ambiente; *acustiche* le velocità (tra $0.7 c$ e $1.3 c$) per le quali intervengono nella corrente attorno al corpo contemporaneamente velocità inferiori e superiori a quelle del suono; e *iperacustiche* le velocità superiori a $1.3 c$, per le quali generalmente tutto il decorso della corrente fluida si può considerare a velocità superiori a quella del suono.

*
* * *

Sebbene poco ancora si conosca di preciso sul fenomeno della portanza alle velocità *iperacustiche*, tuttavia teoria ed esperienza sono concordi nel rivelare che, a causa della limitazione della massa d'aria interessata nella sustentazione, la portanza di una determinata ala, espressa in funzione del quadrato della velocità, non presenta più un *coefficiente di portanza* costante, come nella teoria della circolazione, ma sibbene un *coefficiente decrescente* con la velocità; e che vi appare inoltre una *resistenza di sustentazione* (detta da Ackeret⁽¹⁾ *resistenza d'onda*) fin nel caso dell'*ala indefinita*.

La teoria stessa non rivela peraltro nessuna *resistenza indotta* supplementare nel caso dell'*ala finita*.

Tale *resistenza di sustentazione* dell'*ala indefinita*, che può quindi estendersi senz'altro, allo stato attuale delle nostre conoscenze, al caso dell'*ala finita* di superficie S , è stata calcolata dall'Ackeret⁽²⁾ per il caso di un pro-

(1) I. ACKERET, *Luftkräfte auf Flügel etc.*, « Ztschr. für Flugtechnik, 1925, p. 74.

(2) Loc. cit.

filo laminare parabolico e dal Busemann⁽¹⁾ per il caso di un profilo laminare piano, che questo autore considera come il profilo *ideale* per velocità iperacustiche.

Nell'un caso e nell'altro essa appare sotto la forma

$$(15) \quad R_s = k(V) \frac{P^2}{\rho S V^2}$$

identica a quella della resistenza indotta nella teoria della circolazione, a meno del coefficiente $k(V)$ che non è costante per una data ala, ma funzione di V .

Dai calcoli di Ackeret per la lamina parabolica si deducono per $k(V)$, a temperatura ordinaria, i valori 1.11 e 1.69 per le velocità di 575 e 1020 m./sec. rispettivamente. Ma in questi valori, a causa della curvatura della lamina, sono conglobate resistenze d'onda che debbono considerarsi di *penetrazione* e non di *sostentazione*.

Dalle formule di Busemann deducesi invece, per lamina piana

$$(16) \quad k(V) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{V^2}{c^2} - 1}.$$

Per le due velocità suddette si ottengono a temperatura ordinaria i valori 0.68 e 1.41 che possono considerarsi come coefficienti di *resistenza di sostentazione* pura.

Per confrontarle col coefficiente relativo alla sostentazione quadratica calcoleremo k nel caso di un'ala finita di *allungamento* 1:5 e porremo

$$(17) \quad k(V) = k \psi(V)$$

ottenendo per $\psi(V)$, a velocità doppia, tripla o quadrupla di quella del suono ed a temperatura ordinaria, i valori 6.92, 11.3, 15.5, rispetto a quello di un'ala di allungamento 1:5. A parità di portanza, quindi, la resistenza di sostentazione per velocità iperacustiche è di un ordine di grandezza *decuplo* di quella corrispondente alle attuali velocità.

*
* * *

Poco di preciso si conosce altresì circa la *resistenza di penetrazione* dei corpi portanti alle velocità *iperacustiche*, per le quali alla resistenza di profilo si sostituisce una resistenza d'onda, o d'urto, dovuta allo spessore del profilo stesso ed alla sua curvatura. Tale resistenza posta sotto forma quadratica, presenta un coefficiente *decescente* con la velocità⁽²⁾, come avviene

(1) A. BUSEMANN, *Gasdynamik*, IV. Kap., § 28; *Handbuch der Experimentalphysik*, Bd. IV., 1. Teil, Leipzig, 1931.

(2) ACKERET, loc. cit.; BÜSEMAN, loc. cit.

per i proiettili di artiglieria, onde chiamando $\varphi(V)$ il rapporto tra questo coefficiente e l'analogo, C_r , per velocità *subacustiche*, potremo scrivere:

$$(18) \quad R_p = C_r \varphi(V) \rho S V^2;$$

formula estensibile anche alla resistenza di un corpo semplicemente penetrante.

* * *

Rimane il campo delle velocità *acustiche*, per le quali nessuna teoria generale ancora si delinea nella scienza aerodinamica; mentre le esperienze si riferiscono a casi particolari. Non è quindi possibile una *saldatura* razionale tra le formule subacustiche e quelle iperacustiche.

Tuttavia per dare alle funzioni $\varphi(V)$ e $\psi(V)$ la *continuità* necessaria ai calcoli numerici ammetteremo arbitrariamente per $\varphi(V)$ l'andamento della funzione balistica del Siacci⁽¹⁾ che fornisce cifre più severe di quelle recenti del Cranz⁽²⁾; e per $\psi(V)$ un andamento lineare, suggerito dai valori numerici precedentemente calcolati, tra $\psi(V) = 1$ per $V < 0.7 c$ e $\psi(V) = 15.5$ per $V = 4 c$.

* * *

Con queste considerazioni la resistenza complessiva del corpo aerodinamico portante prenderà la forma generale

$$(19) \quad R = C_{r0} \varphi(V) \rho S V^2 + k \psi(V) \frac{P^2}{\rho S V^2};$$

dove C_{r0} è il coefficiente di resistenza minimo, supposto invariabile.

Cosicchè R potrà rappresentare la resistenza di un velivolo che per $\varphi(V) = \psi(V) = 1$ rientri nel campo dell'ordinaria aviazione.

Chiamandone pertanto V_E la *velocità economica* a quota zero, definita da

$$(20) \quad V_E^2 = \frac{P}{\rho_0 S} \sqrt{\frac{k}{C_{r0}}}$$

si potrà altresì scrivere, posto $\rho = \delta \rho_0$,

$$(21) \quad R = C_{r0} \left(\varphi(V) + \frac{\psi(V)}{\delta^2} \frac{V_E^4}{V^4} \right) \delta \rho_0 S V^2;$$

formula d'aviazione affatto generale che ci dà, a qualsiasi quota e velocità, la resistenza di un corpo aerodinamico portante o di un velivolo ove C_{r0}

(1) F. SIACCI, *Scritti scientifici*, Prov. dello Stato, 1928, vol. I, parte 2^a. Nota 1 a p. 551, fig. 2^a.

(2) ACKERET, *Gasdynamik; Handbuch der Physik*, Bd. VII.

è il coefficiente di resistenza minimo, supposto costante ed inclusivo di quello dei corpi penetranti connessi. La (21) consente di calcolare il *disco resistente* ⁽¹⁾,

$$(22) \quad \Omega = C_{r0} S \left(\varphi(V) + \frac{\psi(V)}{\delta^2} \frac{V_E^4}{V^4} \right),$$

a qualsiasi quota e velocità.

*
* *

Per applicare ora a un tal velivolo i criteri di propulsione aerotermodinamica basterà ottenere per la velocità di equilibrio $C_F \omega - \Omega = 0$; dove C_F , ω , Ω hanno il significato precisato nella Nota precedente.

Questa condizione, che determina C_F in rapporto ad ω , e quindi la temperatura T_r nell'interno del corpo aerotermodinamico propulsivo, è più severa, *ceteris paribus*, di quella relativa al corpo semplicemente penetrante, a causa del termine che rappresenta la resistenza di sustentazione.

Tale severità si inasprisce con la quota, ma si attenua con la velocità. A quota *zero* infatti il secondo termine diviene presto trascurabile col crescere della velocità, per gli attuali valori di V_E che non superano 80 metri al secondo. Il calcolo si può quindi limitare, a *quota zero*, al primo termine come per i corpi penetranti; e lascia prevedere la possibilità, pei velivoli, di raggiungere velocità iperacustiche. Ma le potenze corrispondenti sono elevatissime ed i consumi di combustibile che ne risultano, a quota zero, sono così notevoli da impedire pratiche autonomie.

*
* *

L'ordine di grandezza delle potenze e dei consumi a parità di percorso si riduce invece notevolmente a quote stratosferiche.

Nel fatto la resistenza R , cui sono proporzionali i consumi chilometrici, consta come mostra la (19) di due termini di cui uno proporzionale *direttamente* a δ e l'altro *inversamente*. Esiste quindi, per ogni valore di V , un valore di δ che *rende minima la resistenza* cioè

$$(23) \quad \delta = \frac{V_E^2}{V^2} \sqrt{\frac{\psi(V)}{\varphi(V)}};$$

e per il quale la resistenza di penetrazione eguaglia quella di sustentazione. Naturalmente tale complessiva resistenza è superiore alla minima ottenibile a quota zero, e precisamente nel rapporto $\sqrt{\varphi(V) \psi(V)}$.

(1) Vedi Nota precedente.

Diamo nel quadro seguente un esempio numerico delle quote di minima resistenza corrispondenti a varie velocità di avanzamento, ponendo $V_E = 80$ m./sec.; e $c = 295$ m./sec. nel calcolo di $\varphi(V)$ e $\psi(V)$.

Velocità in m/sec.	80	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Quote di minima resistenza in km. . . .	zero	4.4	14.9	19.6	22.5	24.6	26.1	27.2	28.2	29.1	30
Percento di consumo chilometrico per pari velocità a quota zero .	100	45.5	31.4	18.3	9.6	7.0	5.5	4.6	3.9	3.4	3

Ne risulta confermata la convenienza di sviluppare le alte velocità a quote stratosferiche⁽¹⁾. Però il coefficiente di resistenza risulta circa *doppio* del corrispondente a quota zero, il che obbliga, *ceteris paribus*, a più elevate temperature nella camera di compressione.

Ci riserviamo un'ulteriore sviluppo dell'argomento.

Chimica. — *Le leghe di zinco e manganese*⁽²⁾. Nota⁽³⁾ del Socio N. PARRAVANO e di V. CAGLIOTI.

Le leghe di zinco e manganese sono state più volte oggetto di ricerca, ma con risultati notevolmente scontranti.

Molta parte di questa disparità di conclusioni va certamente attribuita alla natura del materiale adoperato per le esperienze. È noto, infatti, come il manganese sia un metallo difficile ad aversi ad uno stato anche relativo di purezza⁽⁴⁾.

(1) CROCCO, *Possibilità di Superaviazione*, questi « Rendiconti », marzo-aprile 1926; COSTANZI, *Sulla possibilità ecc.*, rivista « Aer », n.º 3 del 1914.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(3) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1931.

(4) HAHN e KYROPOULOS, « Z. an. Chem. », 95, 105 (1916), per lo studio delle leghe di Au e Mn hanno adoperato un metallo che conteneva 91.7 % Mn, 5.3 % Al, 0.7 % Fe, 0.5 % Si, 0.4 % Cu; WESTGREN e PHRAGMEN, « Z. f. Physic », 53, 777 (1925), per le ricerche sulla struttura cristallina del manganese hanno impiegato diversi prodotti, fra i quali uno contenente 0.4 % Al, 1.3 % Fe, 1.4 % Si, e un altro, 5.5 % Al, 1.5 % Fe, 1 % Si; ÔSAWA, « The Sc. Rep. of the Tôhoku Imp. Un. », 19, 247 (1930), per le leghe di Fe e Mn si è servito di un metallo che conteneva 2.02 % Si e 0.35 % A, e SEKITO, « Z. Krystall. », 72, 407 (1930), in un recente lavoro sulla struttura cristallina del manganese, ha adoperato un prodotto contenente 1.41 % Fe, 0.17 % Si, 0.33 % C, 0.06 % Al, e 97.1 % Mn.

In una Nota precedente⁽¹⁾ uno di noi con V. Montoro ha riferito i risultati avuti nello studio di una serie di leghe preparate con un manganese «reinst» di Kahlbaum di prima della guerra. Essendosi però questo dimostrato di composizione del tutto variabile, e contenente fino al 18 % di impurezze, principalmente costituite da alluminio, abbiamo creduto necessario ripetere le esperienze con un metallo Schering-Kahlbaum che conteneva 97 % di Mn.

I risultati di queste nuove ricerche e le considerazioni generali alle quali essi possono portare saranno esposti in esteso altrove. Qui ci limitiamo a riassumere alcune delle conclusioni principali cui siamo giunti.

Abbiamo esteso le nostre esperienze fino ad una concentrazione corrispondente a 33.06 % di Mn, essendo questo il limite di solubilità del manganese nello zinco alla pressione ordinaria e a temperatura di circa 900°. Tutti gli spettrogrammi sono stati eseguiti con anticatodi di ferro, di rame e di cromo.

Un confronto tra gli spettrogrammi permette di riconoscere l'esistenza di tre fasi. Data l'analogia di queste fasi con quelle delle altre leghe del tipo degli ottoni, le abbiamo indicate con le lettere η , γ , ϵ .

Hanno presentato lo spettro della fase ϵ : una lega a 33.06 % di Mn raffreddata lentamente, una a 30.42 % ricotta a 400° per quattro ore e temprata, leghe a 26.61 %, 26.03 %, 24.46 % di Mn raffreddate lentamente, e poi leghe a 22.08 %, 18.63 %, 16.51 %, 15.40 %, 15.18 %, 14.23 %, 12.25 % di Mn temprate a 400° o 350°. Le righe corrispondenti si ordinano sui grafici di Hull per il sistema esagonale su un rapporto assiale $\frac{c}{a} = 1.607$, ottenendosi, per le singole leghe, i valori della costante a_0 che risultano dal seguente specchietto e che corrispondono ad una cella elementare con soli due atomi, analogamente a quanto si verifica per le fasi ϵ degli ottoni.

TABELLA.

Composizione della lega: Mn % . .	33.06	26.03	24.46	22.08	18.63	16.51	15.40	14.23	12.25
Valore di a_0 in Å .	2.754	2.744	2.75	2.75	2.75	2.75	2.75	2.75	2.76

Hanno presentato lo spettro della fase γ le leghe aventi una concentrazione in manganese compresa fra 22.21 % e 8.09 % di Mn raffreddate lentamente; il calcolo degli spettrogrammi corrispondenti conduce per questa fase ad una cella cubica a corpo centrato con 52 atomi, analogamente a

(1) «Mem. R. Acc. d'Italia», I, 5 (1930).

quanto si verifica per la fase γ degli ottoni. I valori della costante reticolare sono compresi fra 9.21 e 9.11 Å.

La fase η è una soluzione solida di manganese in zinco a basso tenore in manganese (1 % circa). Essa è stata bene identificata nelle leghe a 0.5 % e a 2.22 % di Mn, gli spettrogrammi delle quali si ordinano bene sui grafici di Hull per il sistema esagonale su rapporto assiale $\frac{c}{a} = 1.84$ e una costante reticolare che per le due leghe è rispettivamente $a_0 = 2.665$ Å e 2.67 Å. Questa fase è però instabile; col tempo si smista, mostrando il reticolo dello zinco senza alcuna deformazione.

Tale fenomeno d'invecchiamento si ritrova in tutte le leghe comprese fra 12 % e 0 di manganese, ed è dovuto, probabilmente, a trasformazioni che si verificano a temperature molto vicine a quella ordinaria, che non si osservano con l'analisi termica e che rendono molto difficile stabilire la vera forma del diagramma di stato in questa zona.

Così una lega a 5.76 % di Mn che, appena preparata, mostra le righe della fase η e della fase ϵ con costanti retcolari che sono rispettivamente $a_0 = 2.664$, $\frac{c}{a} = 1.84$ e $a_0 = 2.763$ e $\frac{c}{a} = 1.607$, dopo un certo tempo dalla preparazione, mostra invece le righe dello zinco senza deformazione, e, accanto alle linee della fase ϵ , che sono divenute indistinte, ne mostra altre debolissime e affatto chiare. Esse si osservano anche nelle leghe a 8.09 %, 10.07 %, 11.05 % di Mn raffreddate tutte lentamente, e, in questi casi, accanto a quelle della fase γ .

Il loro ordinamento, che mal si accorda per una fase cubica con 90 atomi per cella elementare, analoga a quella trovata da Westgren nel sistema Au-Zn, sembra condurre meglio o ad una fase γ' , cubica con $a_0 = 7.82$ Å, analoga a quella che si riscontra nel sistema Au-Zn con 32 atomi per cella elementare, o ad una fase β' cubica, con $a_0 = 6.76$ Å analoga a quella riscontrata da Westgren e Bradley nel sistema Ag-Al con 20 atomi per cella elementare. Comunque, però, le righe sono sempre poco nitide e tali da rendere incerta la valutazione dell'intensità che, sola, potrebbe essere di guida per la scelta dei tipi di struttura.

Le righe dello zinco che si osservano nelle leghe raffreddate lentamente fino a 6.98 % di Mn, in quelle temprate a 350° e lasciate lungo tempo a sé, appaiono anche fino ad una concentrazione di 9.85 % in Mn accanto a quelle della fase γ' o β' .

Riassunto. — Sono state studiate roentgenograficamente le leghe di zinco e manganese fino ad una concentrazione del 33.06 % di Mn, partendo da zinco a 99.8 % e manganese a 97 %: sono state riscontrate le fasi γ , ϵ ed η con caratteristiche strutturali analoghe a quelle degli ottoni e ne sono stati definiti i campi di esistenza.

La fase ϵ , esagonale, è stabile a temperatura ordinaria fra 33 % e 24 % di Mn circa, la temperatura più alta fra 24 % e 12.5 % di Mn circa. La fase γ , a struttura cubica a corpo centrato con 52 atomi per cella elementare, ha un campo di esistenza compreso fra 22.26 % e 8.09 % di Mn ed è stabile alla temperatura ordinaria. La fase η è costituita da soluzione solida di manganese in zinco a basso tenore in manganese (1 % circa).

Quest'ultima è instabile: con l'invecchiamento si smista formando un eutettico di zinco con un'altra fase γ' o β' probabilmente cubica, le cui righe si osservano accanto a quelle dello zinco fino ad una concentrazione di 6.98 % di Mn e accanto a quelle della fase γ nelle leghe fino a 11 % circa di Mn. Essa non è stata però bene identificata dato il basso grado di cristallizzazione delle leghe in questo intervallo di concentrazione, dovuto ai fenomeni d'invecchiamento, che sono ancora oggetto di studio.

Biologia. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sull'adenocarcinoma trapiantabile del topo* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Corrisp. P. RONDONI e di G. MEZZADROLI.

Le ricerche perseguite da anni da uno di noi (Mezzadrolì) sull'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sui semi e sulle piante, e quelle più recenti sullo sviluppo dei bachi da seta ⁽³⁾ ci hanno indotto a sperimentare la influenza delle stesse onde sull'adenocarcinoma del topo.

Era interessante infatti vedere come avrebbero agito sul tumore dei topi queste onde, che stimolano così vivamente alcune funzioni vitali delle piante e degli animali e soprattutto eccitano i fenomeni della crescita fisiologica.

L'azione biologica delle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 1.5-3$ m. è stata osservata e studiata solo in questi ultimi anni e così mentre esiste tutta una vasta letteratura sull'effetto biologico dei raggi UV, dei raggi Röntgen, dei raggi α, β, γ del radio, pochi sono gli Autori che si sono occupati delle onde elettromagnetiche ultracorte in biologia vegetale e ancor meno quelli che ne studiarono l'azione sugli animali.

Lakhowsky sperimentava nel 1924 all'Ospedale della Salpetrière di Parigi l'azione esercitata dalle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 2$ m.

(1) Lavoro eseguito nella sezione biologica dell'Istituto del cancro di Milano e nell'Istituto di bacteriologia industriale di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 17 settembre 1931.

(3) Per la letteratura sull'argomento indirizziamo i lettori alla Nota: *Le onde elettromagnetiche ultracorte in biologia*, prof. G. MEZZADROLI, « Giornale di biologia applicata », anno I, n. 1, Bologna 1931; ed alle Note precedenti dello stesso A. in questi « Rendiconti ».

emesse da un suo particolare apparecchio Radio-cellulo-oscillatore sul cancro sperimentale delle piante, ottenuto a mezzo di inoculazione di *Bact. tumefaciens* nel *Pelargonium zonatum*. Egli sarebbe riuscito a guarire queste piante dopo tre trattamenti di tre ore ciascuno.

In Germania (1929) il prof. Esau studiava l'azione biologica delle onde elettromagnetiche ultracorte $\lambda = 1,5$ m. e riusciva a guarire i topi affetti da tubercolosi (?).

A Vienna (1929) il prof. Franz Seidel studiava e metteva in evidenza l'azione battericida delle onde ultracorte di $\lambda = 1,5-3$ m. e riusciva a sterilizzare il latte.

In Italia il Brunori ripeteva le esperienze del Lakhowsky sul *Pelargonium* inoculato con *Bact. tumefaciens* e determinava le lunghezze d'onda cui sintonizzare le singole specie.

In America il dott. Abramus con un apparecchio dello stesso tipo del Brunori ha sperimentato la terapia di varie forme patologiche umane, ottenendo risultati negativi.

Uno di noi (Mezzadrolì) sperimentava come già detto fino dal 1927 l'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 2-3$ m. sui semi delle piante, sui bachi da seta e sui microrganismi, rilevando la loro azione stimolante.

Si è voluto sperimentare ora l'azione delle onde elettromagnetiche di $\lambda = 3$ m. sull'adenocarcinoma del topo; e riferiremo brevemente di queste prime esperienze dalle quali si delinea nettamente l'influenza di dette onde ultracorte.

PARTE SPERIMENTALE.

Ci siamo serviti di queste esperienze dell'apparecchio Radio-oscillatore ad onde ultracorte di $\lambda = 3$ m. già descritto nelle Note precedenti (Mezzadrolì). I topi venivano posti (entro cassettime di legno) in risonanza col l'oscillatore e irradiati a seconda dei casi per 50 minuti, 2 ore, 5 ore, 10 ore al giorno.

Le esperienze vennero fatte con topi bianchi e materiale neoplastico (ceppo Ehrlich) forniti dalla sezione biologica dell'Istituto Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura del cancro (Milano). Tali topi avevano subito un innesto di carcinoma 8 giorni prima dell'inizio del trattamento; ed erano stati, ad attecchimento assicurato, trasportati con cura da Milano a Bologna ed ivi sottoposti all'esperimento.

La prima serie di esperienze venne fatta su 11 topi, così suddivisi:

- a) Topi di controllo n. 5;
- b) Topi irradiati 30 minuti giornalieri n. 2;
- c) Topi irradiati 2 ore giornaliere n. 2;
- d) Topi irradiati 5 ore giornaliere n. 2.

Venne seguita la vitalità dei topi e l'ingrossamento del tumore. Dopo la loro morte gli animali vennero pesati; e si estrasse il tumore che venne pure pesato; tutti questi dati, riportati nella tabella seguente, permettono di ottenere un quadro chiaro dell'azione esercitata dal trattamento con le onde elettromagnetiche ultracorte in questa serie sperimentale:

TABELLA I.

	Vita media in giorni	Peso medio del topo alla morte	Peso medio del tumore estratto dal topo morto	Aumento medio giornaliero del tumore (velocità di crescita)
Topi di controllo (dati medi riferiti a 5 indi- vidui)	30 giorni e $\frac{1}{4}$	gr. 26.2	gr. 8.4	gr. 0.28
Topi irradiati 30 m. gior- nalieri e 2 ore gior- nalieri (dati medi riferiti a 4 individui) . . .	27 giorni e $\frac{1}{2}$	gr. 26.7	gr. 15.4	gr. 0.57
Topi (2) irradiati 5 ore giornalieri	47 giorni	gr. 22	gr. 10	gr. 0.33

Osservazioni.

Se si osservano i dati elencati e si raffrontano fra loro, si vede che i topi controllo hanno vissuto in media 3 giorni di più di quelli irradiati rispettivamente 30 minuti e 2 ore giornaliere. I topi irradiati per 5 ore giornaliere hanno vissuto 17 giorni più dei controlli e 20 giorni più di quelli irradiati per 30 minuti e 2 ore al giorno. Per quanto riguarda dunque la durata della vita dei topi si dovrebbe dire che il trattamento meno intenso ha avuto azione scarsa, consistente in abbreviamento della vita del topo portatore di circa il 10 %, il che rientra nelle consuete oscillazioni individuali di sviluppo del tumore del topo; quello più intenso, in due topi solo, avrebbe prolungato la vita dei topi, in modo piuttosto considerevole, dando anche l'impressione che il tumore si ulceri più tardivamente e offra una necrosi più secca che di consueto. Sempre poi si è avuta (in 6 topi contro 5 controlli) una accelerazione della crescita neoplastica, che è quasi raddoppiata per il più blando trattamento, di poco aumentata invece rispetto ai controlli per effetto del trattamento intenso.

Non essendoci dubbi sulla azione accelerante della crescita neoplastica per parte delle onde ultracorte, si è voluto vedere più particolarmente

l'effetto del trattamento intenso, che nell'esperimento precedente ha agito accelerando bensì ma molto meno di quello blando o medio ed ha permesso la sopravvivenza dei topi assai a lungo.

La seconda serie di esperienze venne quindi intrapresa, tenendo 4 topi come controllo e trattando altri 4 per 10 ore giornaliere con le onde elettromagnetiche ultracorte ed i risultati sono esposti nella tabella n. 2:

TABELLA II.

	Vita media in giorni	Peso medio del topo alla morte	Peso medio del tumore estratto dal topo morto	Aumento medio giornaliero del tumore
Topi di controllo (dati medi su 4 individui).	26.6	gr. 22	gr. 5.3	gr. 0.20
Topi trattati 10 ore al giorno (dati medi su 4 individui).	34.5	gr. 21	gr. 10	gr. 0.38

Anche in questo caso si osserva un incremento maggiore del tumore nei topi trattati con onde elettromagnetiche ultracorte: il peso medio del tumore è quasi raddoppiato alla fine dell'esperimento, in confronto ai controlli; e si osserva pure un certo prolungamento della vita media.

Conclusioni.

Abbiamo voluto sperimentare l'azione esercitata da un trattamento con onde elettromagnetiche ultracorte di $\lambda = 3$ m., emesse da un particolare apparecchio Radio-oscillatore, sull'adenocarcinoma del topo.

Il trattamento venne effettuato per tempi diversi: 30 minuti, 2 ore, 5 ore, 10 ore al giorno: esso ebbe per effetto costante (su 10 topi contro 9 di controllo, repartiti in due serie sperimentali) una *accelerazione* della crescita del tumore di oltre il 50 % in media rispetto ai controlli. Il fenomeno è così costante e netto che ci pare siano da escludere accidentalità sperimentali.

Non così regolare è però il rapporto fra durata giornaliera della irradiazione ed effetto accelerante, avendosi talora effetti meno acceleranti per trattamenti più intensi; ma qui possono essere in giuoco fattori individuali, per eliminare i quali occorrerebbero più numerose serie sperimentali. Questo

stesso non perfetto parallelismo quantitativo però ci conferma la realtà del fenomeno fondamentale, l'azione accelerante, mai mancata.

Singolare è il prolungamento della durata della vita nei topi trattati più intensamente (due della prima serie ed i quattro della seconda), ad onta della aumentata velocità di crëscita del tumore. Forse si può mettere in rapporto questo fatto colla minore estensione della necrosi nei tumori trattati ed anche colla ridotta infettabilità batterica secondaria. Il topo muore di regola per la proteotossicosi intensa in rapporto ai fatti necrotici nel tumore e per infezione del tumore ulcerato: ora questi processi possono essere fino ad un certo punto ridotti per la maggiore vitalità delle cellule neoplastiche sotto l'influenza del trattamento irradiante. Ma sono a tutt'oggi non ancora ben chiari i rapporti fra proliferazione e necrosi delle cellule neoplastiche; e noi non possiamo affrontare qui il problema. Basti per ora concludere che *il trattamento dei topi portatori di adenocarcinoma trapiantabile con onde elettromagnetiche di $\lambda = 3$ m. accelera la velocità di crescita del tumore*, ossia stimola in esso i fenomeni della proliferazione cellulare. Non possiamo da questi risultati nulla inferire in riguardo all'azione eventuale su tumori spontanei.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Parallelismo generalizzato in una V_3* . Nota II di G. BARBA, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Consideriamo una linea L immersa in una V_3 e su di essa due punti P, P_1 .

Così come si è fatto nel caso di una linea immersa in una V_2 , definiremo parallele le direzioni delle tangenti t, t_1 alla L , rispettivamente in P e P_1 .

Rileviamo subito, però, che, mentre tale connessione era sufficiente nella V_2 , per definire il trasporto rigido di un fascio di direzioni, di centro un punto della linea, lungo la linea stessa, nel caso che attualmente trattiamo essa non è più bastevole. È, cioè, necessario che la connessione involga altri elementi oltre le direzioni delle tangenti, perchè sia possibile un trasporto rigido di una stella di direzioni lungo la linea stessa.

Sia ρ una prefissata direzione tra quelle del fascio normale a t . Ad essa corrisponda, per una certa legge, nel punto P_1 , la ρ_1 , fissata nel fascio normale a t_1 . Tale connessione determina, perfettamente, nel senso anzidetto, la legge di trasporto rigido di una stella di direzioni lungo una autoparallela.

In effetti, ogni direzione d in $\pi \equiv (t, \rho)$, formante con t l'angolo θ , avrà, quale corrispondente in $\pi_1 \equiv (t_1, \rho_1)$ la d_1 formante con t_1 l'angolo $\theta_1 = \theta$. Nello stesso modo, alla δ spiccata da P e formante con t l'angolo α e con d l'angolo β , corrisponderà, in P_1 , la δ_1 formante, rispettivamente, con t_1 e δ_1 gli angoli $\alpha_1 = \alpha$ e $\beta_1 = \beta$.

Quel che caratterizza, dunque, il trasporto rigido di una stella di direzioni lungo una linea L immersa in una V_3 è il riferimento per direzioni e giaciture generiche determinate con una certa legge.

2. Concretiamo la predetta legge, in particolare, con l'imporre che il trasporto di una direzione abbia luogo per tangenti alle autoparallele e quello di una giacitura per piani osculatori ad esse. In tal caso il trasporto rigido di una stella di direzioni avviene così:

- a) Per ogni coppia di punti P, Q passa una curva autoparallela;
- b) i triedri fondamentali in P e Q sono assunti, per definizione, paralleli.

Sotto queste condizioni diremo che le curve autoparallele definiscono nella V_3 un *parallelismo completo* intendendo, con tale locuzione, di ricordare che, a caratterizzare il parallelismo, basta la definizione delle curve autoparallele.

(1) Nella seduta del 21 giugno 1931.

Un parallelismo completo, in una V_3 , lo diremo senza residuo, allorchè, dati i punti P, Q, R il trasporto lungo autoparallele avviene in maniera che, percorrendo il triangolo PQR , a partire da P e ritorno in P , ogni direzione viene a sovrapporsi a quella di partenza, ed ogni piano osculatore a quello di partenza: in altre parole, quando si ritorna con lo stesso triedro fondamentale. Per quanto si riferisce alle direzioni tangenziali non vi è che da ripetere quanto pel caso V_2 . Lo stesso dovrà accadere pel trasporto, lungo il triangolo, della giacitura del piano osculatore.

Si conclude, perciò, che un parallelismo completo senza residuo si ottiene fissando un sistema ∞^4 di curve autoparallele tali che, per due punti generici dello spazio ne passi una ed una sola. Fissati, inoltre, i punti generici A, B, C deve avvenire che, orientato il percorso sulle tre curve AB, BC, CA , la somma degli angoli esterni del triangolo così costruito, debba essere 2π . Egualmente, 2π dovrà essere la somma degli angoli diedri formati dai piani osculatori in A, B, C , rispettivamente alle curve $CA, AB; AB, CB; BC, CA$.

Assegnate le condizioni sotto le quali si è sicuri che un parallelismo completo riesce senza residuo, volendo procedere all'effettiva costruzione si può come segue.

Fissata una generica autoparallela AB , per ogni punto P di essa spicchiamo le autoparallele ad essa normali: otterremo un sistema semplicemente infinito di fasci di autoparallele; per ogni punto Q di ciascuna di queste spicchiamo il fascio delle autoparallele ad essa normale. Si avranno, in tal modo, le ∞^4 autoparallele caratterizzanti il parallelismo completo in una V_3 . Ed invero, i punti P su A sono ∞^1 ; per ognuno di essi passa un fascio di autoparallele, dunque si ottiene un sistema ∞^2 di autoparallele formanti superficie ortogonali ad AB .

Su una qualunque di queste superficie vi sono ∞^2 punti, per ognuno dei quali passa un fascio di autoparallele, perciò, in sostanza, si hanno ∞^4 autoparallele. Vediamo quali condizioni devono verificare queste ∞^4 autoparallele affinchè il parallelismo completo subordinato riesca senza residuo. Consideriamo, a tal uopo, il quadrilatero $PQRS$ in cui la distribuzione dei vertici sia la seguente: P su AB ; Q su una generica autoparallela normale in P ad AB ; R su una generica autoparallela normale in Q a PQ , ed infine, S , su AB , quale intersezione con l'autoparallela del fascio normale in R alla RQ .

Ovviamente, allora, le condizioni affinchè non vi sia residuo sono date dall'essere:

I) l'angolo in S retto [come richiedono considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 2, Nota I];

II) la somma degli angoli dei piani osculatori, percorrendo il quadrilatero, 2π .

Resta, così, definita la costruzione di un parallelismo completo senza residuo.

3. Abbiamo notato al n. 1 che quel che caratterizza il trasporto di una stella di direzioni lungo una linea L immersa in una V_3 , è il riferimento per direzioni e giaciture generiche, determinati con una certa legge.

Successivamente, al n. 2, ci siamo intrattenuti su un particolare riferimento, ottenuto precisando tale legge mediante una speciale corrispondenza fra i piani: quella ottenuta assumendo come parallele le giaciture dei piani osculatori. Si è, così, determinato il parallelismo completo, pienamente caratterizzato da prefissate ∞^4 linee della V_3 .

Possiamo pensare, però, con maggior larghezza, ad un altro tipo di corrispondenza, nel senso che preciseremo qui. Essa dà luogo ad un parallelismo pel quale non è più sufficiente assegnare ∞^4 linee. Non sarà, quindi, un parallelismo completo, nel significato che abbiamo, poc'anzi, attribuito a tale denominazione. Per ovvie ragioni lo chiameremo *parallelismo ridotto*. Ecco di che si tratta.

Fissiamo, nella V_3 , un sistema ∞^3 di superficie con la condizione ch'esse, a due a due, si incontrino sotto angolo costante lungo la linea di intersezione, nel mentre, questa, risulti sostegno d'un sistema di tali superficie tagliantisi, lungo essa, sotto angolo costante.

Un tale sistema di superficie definisce un sistema ∞^4 di linee⁽¹⁾. Esso individua un parallelismo che chiameremo — come abbiám detto — ridotto, caratterizzato dal supporre che una generica linea trasporti autoparallela-mente le proprie tangenti, ed una generica superficie le giaciture dei propri piani tangenti.

Il trasportato da un punto P ad un punto P_1 della V_3 , ha luogo nel seguente modo. Pei due punti P e P_1 passa una (ed una sola) linea l determinata da due superficie s, s' del sistema, incontrantisi, lungo essa, sotto angolo costante.

La direzione di l in P è parallela a quella in P_1 ; poi, il piano tangente ad s in P è parallelo a quello ad s in P_1 . Analogamente pei piani tangenti ad s' . Com'è chiaro ciò basta per definire il trasporto di tutta la stella da P a P_1 . La necessità che s ed s' si incontrino sotto angolo costante si ravvisa nel fatto che, in piani normali ad l , p. es., le direzioni tangenziali ad s ed s' spiccate da P e P_1 devono formare, in tali punti, angoli eguali, per via del trasporto rigido che ci occupa.

Definito, così, il parallelismo ridotto, vi sarà luogo a caratterizzare, così come si è fatto pei precedenti parallelismi, il parallelismo ridotto senza residuo.

(1) Si hanno, in sostanza ∞^2 sistemi di superficie. Una prefissata superficie con le ∞^3 altre darebbe luogo ad ∞^3 linee, ma pel fatto che l'intersezione deve essere sostegno di ∞ superficie, si avranno, in sostanza ∞^2 linee. Potendo variare la predetta superficie tra quelle appartenenti agli ∞^2 sistemi, si avranno in totale, le ∞^4 linee.

A tal uopo occorre assegnare ∞^2 sistemi di superficie tali che le superficie di un sistema incontrino sotto lo stesso angolo — costante lungo la linea d'intersezione — quelle di un altro, nel mentre tali linee siano sostegno di ∞ altre superficie, ognuna appartenente a sistemi diversi.

Considerazioni analoghe a quelle del n. 2, Nota I, danno ragione di ciò.

In particolare, il parallelismo ridotto senza residuo sarà definito da sistemi di superficie mutuamente ortogonali.

Affinchè si abbia un parallelismo ridotto senza residuo occorre e basta che:

I) Su una superficie, lungo un qualunque triangolo ABC costituito da autoparallele, la direzione di una di queste in un suo punto, dopo il ciclo, ritorni su sè stessa.

II) A partire da un punto qualunque P del triangolo ABC, centrata, successivamente, sino a ritornare in P, in ogni punto, una sfera di raggio unitario in maniera che il suo asse polare, in ogni punto, sia determinato dalla direzione, ivi, tangenziale, ed il cerchio meridiano sia quello determinato dalla giacitura del piano tangente, nel punto, alla superficie e riportando sulla sfera il punto indicatore della normale alla giacitura, in ogni punto, deve ottenersi, sulla predetta sfera, un triangolo $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ corrispondente ad ABC.

4. Sia assegnato un sistema ∞^6 di superficie Ω tali che, a 2 punti generici P e Q corrisponda una ed una sola linea k , per essi passante, ed una semplice infinità di superficie passanti per k e secantesi, a due a due, in P e Q, sotto lo stesso angolo; inoltre, a due punti P_i e Q_i di k corrisponda, sì, la stessa linea k , ma un diverso sistema di superficie (condizionato come sopra).

Il trasporto della stella di direzioni si effettua, in tal caso, pensando parallele:

a) le direzioni tangenti a k ;

b) le giaciture dei piani tangenti ad $\Omega(P, Q)$, in P e Q.

Il parallelismo ridotto che così ne risulta, lo diremo generalizzato. Per esso, la superficie σ costituita dalle autoparallele AP, AQ, ... spiccate da A ed appoggiantesi, nei punti P, Q, ..., all'autoparallela l , è, generalmente, distinta dalla superficie σ_i costituita dalle autoparallele A_iP , A_iQ , ... spiccate dal generico punto A_i dell'autoparallela AP, mentre, pel parallelismo ridotto dianzi definito, le due superficie σ e σ_i — sopra precisate — coincidono sempre a causa del sistema di superficie prescelto per caratterizzare le ∞^4 autoparallele.

5. Vogliamo, per ultimo caratterizzare i sistemi ∞^4 di curve dello spazio ordinario che assunte come autoparallele danno luogo a parallelismo senza residuo.

In un parallelismo senza residuo, ad una direzione t , tra quelle della stella spiccata da P corrisponde una ben fissata direzione t_1 , nel punto P_1 di t . Ciò induce a porre a fondamento di un tal parallelismo un sistema ∞^2 di curve tali che, per un punto generico dello spazio ne passi una ed una sola, curve che sono da considerare autoparallele e « parallele fra loro » come diremo brevemente per accennare alla condizione di parallelismo delle direzioni tangenti, nel senso stabilito in precedenza. Pel fatto che il parallelismo è senza residuo si esige, inoltre, che altre ∞^2 curve, ottenute partendo da P in una qualunque direzione, siano isogonali a quelle del sistema fondamentale.

Assegnato, allora, il sistema ∞^4 di curve, noi possiamo pensare ∞^2 superficie, ciascuna contenente ∞^1 curve e tali che, per ogni curva passi un sistema ∞^1 di superficie incontrantesi lungo essa sotto angolo fisso. Su ogni superficie pensiamo, poi, tracciate le traiettorie isogonali a quelle della congruenza in essa tracciata.

Le ∞^4 curve così ottenute formano, sulle superficie, dei sistemi isogonali che definiscono il trasporto senza residuo delle direzioni.

6. Diversamente occorre procedere se si vogliono trasportare, anche, le giaciture. In tal caso le ∞^4 curve devono giacere su ∞^2 sistemi di superficie intersecantesi, a due a due, nelle ∞^4 curve, sotto lo stesso angolo, costante lungo la linea di intersezione nel mentre questa è d'intersezione, anche, per ∞ altre superficie.

Si vengono, così, a realizzare, nell' S_3 , delle corrispondenze conservanti gli angoli, ove si riferisca l' S_3 a sè stesso mediante il parallelismo. Dopo ciò, ad ognuna delle ∞^3 superficie dell' S_3 , facciamo corrispondere un piano dell' S'_3 di maniera che l'angolo d'intersezione di due piani sia quello, costante lungo tutta la linea, di intersezione delle superficie. Tale corrispondenza conforme, nell' S_3 , può sempre, com'è ovvio, stabilirsi. Pel teorema di Lionville⁽¹⁾, allora, le più generali trasformazioni conformi dello spazio euclideo in sè stesso le otterremo mediante il gruppo T di trasformazioni dovute ad inversioni per raggi vettori reciproci, movimenti e similitudini. Ne segue, allora, che le superficie dell' S_3 si devono ottenere dai piani dell' S'_3 mediante le T .

Ma il piano e la retta, per T , si trasformano in sfera e cerchio, si può quindi concludere che *il parallelismo senza residuo — valido per trasporti di direzioni e giaciture — si ottiene, soltanto, se il sistema delle superficie di definizione è quello ottenuto dal sistema di piani dell' S_3 , mediante T , ossia il sistema formato da tutte le sfere passanti per un punto fisso.*

(1) Ved. L. BIANCHI, *Geom. diff.*, vol. I, p. 376. Pisa, Spoerri, 1902.

Meccanica. — *L'invariante adiabatico nel moto libero dei giroscopi.* Nota I⁽¹⁾ di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Per alcune applicazioni astronomiche della teoria degli invarianti adiabatici che abbiamo in animo di esporre in una prossima Nota è utile trattare qui con qualche dettaglio il problema cospicuo offerto dal moto libero di un corpo a struttura giroscopica, turbato da sole influenze adiabatiche.

Va subito rilevato che a prima vista potrebbe sembrare ozioso o quasi riprendere una questione già diffusamente trattata da più autori, dal Planck, Epstein, Reiche⁽²⁾ ed altri, sin dai primi inizi della teoria dei quanti da cui, come è noto, la nozione d'invariante adiabatico trae le origini. Senonchè però, quelle ricerche, volte a fini diversi da quelli qui perseguiti, condotte secondo gli indirizzi di una teoria (transitoria) alquanto discosta dalla meccanica classica, sono difficilmente inquadrabili nei suoi schemi.

Appare quindi giustificato e forse anche desiderabile riprendere coi mezzi di questa (teorema di Gibbs-Hertz e teoria generale di Levi-Civita⁽³⁾) il pur tanto battuto problema. Perverremo così pel moto libero di un giroscopio soggetto ad influenze variabili lentamente (più precisamente, nel senso adiabatico), involgano esse le costanti inerziali del sistema o, e questo è il punto essenziale della nostra ricerca, i cosiddetti *momenti* corrispondenti alle *coordinate ignorabili* del corpo di cui si tratta, alla nozione dell'invariante

$$\frac{W}{2\pi} = K(1 - \cos \omega)$$

ω designando il più piccolo dei due angoli che il vettore momento delle quantità di moto \mathbf{K} fa con un ben determinato asse fisso, asse fisso rispettivamente con quello di figura.

§ 2. *Un breve richiamo.* — Con riferimento ad una Nota precedente, e, per maggiori dettagli alla citata Memoria del Levi-Civita, consideriamo un sistema canonico ad n gradi di libertà, con $m < n$ coordinate *ignorabili*

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1931.

(2) Cfr. A. SOMMERFELD, *Atombau und Spektrallinien*, IV ed., pp. 741-748. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1924.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Sugli invarianti adiabatici*, « Atti del Congresso internazionale dei Fisici », Como, settembre 1927, Zanichelli, Bologna, 1928.

q_1, q_2, \dots, q_m , ammettente oltre gli m integrali $p_1 = c_1, p_2 = c_2, \dots, p_m = c_m$ l'integrale dell'energia

$$H = E.$$

Supponiamo ora che la funzione caratteristica H di codesto sistema (da designarsi come *imprimitivo d'ordine m* secondo denominazioni già richiamate in una Nota precedente), in questo caso funzione di $n - m$ coordinate q cioè, per la precedente notazione attribuita alle coordinate ignorabili, delle $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ e delle p_1, p_2, \dots, p_n , di cui le p_1, p_2, \dots, p_m sono costanti, contenga un certo numero, che non importa precisare, di parametri. Orbene, codesti parametri e se si vuole assieme con questi le p_1, p_2, \dots, p_m , si facciano variare lentamente, precisamente tanto che, a variazione ultimata, il punto rappresentativo nello spazio ridotto delle fasi a $2(n - m)$ dimensioni (spazio rappresentativo delle $q_{m+1}, \dots, q_n; p_{m+1}, \dots, p_n$) abbia sensibilmente invasa la ipersuperficie σ , a $2(n - m) - 1$ dimensioni (H) $_{p_1=c_1, \dots, p_m=c_m} = E$ su cui è, per la premessa natura d'integrale della H , costretto a muoversi. Si dimostra allora, p. es. come caso particolare d'un teorema di Levi-Civita relativo ai sistemi *imprimitivi*, che, ammessa chiusa la σ , il volume ridotto W da questa limitato è un invariante adiabatico, cioè non varia col variare — nel senso precisato — delle a e delle p corrispondenti alle ignorabili q_1, q_2, \dots, q_m .

§ 3. *Forma canonica per l'integrale dell'energia di un solido a struttura giroscopica non soggetto a forze* ⁽¹⁾. — Designino al solito: $A = B, C$ i momenti principali d'inerzia relativi agli assi principali x, y, z che assumiamo come terna mobile di riferimento; φ, ψ, θ gli angoli di Eulero atti a caratterizzarne la orientazione per rispetto ad una terna fissa ξ, η, ζ .

Pel moto libero, cioè esente da forze attive esterne, l'integrale dell'energia, esprimente in tal caso la costanza dell'energia cinetica T , dunque

$$(I) \quad T = E,$$

ove con $p_\varphi, p_\psi, p_\theta$ si designino gli impulsi relativi alle φ, ψ, θ ora caratterizzate, si scrive

$$(Ia) \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_\theta^2 + \sigma^2}{A} + \frac{p_\varphi^2}{C} \right\} = E,$$

essendosi posto

$$\sigma = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos \theta}{\sin \theta}.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, parte II del vol. II, pp. 304-305, Zanichelli, Bologna 1928.

Le φ e ψ non compaiono esplicitamente, sono dunque *ignorabili*; si hanno quindi senz'altro i due integrali, esprimenti la costanza dei momenti

$$p_{\varphi} = c_1 \quad , \quad p_{\psi} = c_2 .$$

Introducendo codeste espressioni nella (1 a) si viene a caratterizzare nello spazio ridotto a 2 dimensioni della sola p_{θ} e θ una σ , ridotta addirittura ad una linea. Se questa risulta chiusa, l'area limitata sarà, per quanto si è detto, un invariante adiabatico, la condizione di ergodicità essendo evidentemente trivialmente soddisfatta come per tutti i sistemi ad un solo grado di libertà. Le variabili adiabatiche a , è superfluo rilevarlo, si potranno ravvisare nei momenti di inerzia A e C e particolarmente nelle p_{φ} e p_{ψ} . Proprio quelle che in teoria dei quanti si riguardavano quantizzate, e quindi invarianti per rispetto a influenze *continue*.

§ 4. *Chiusura della σ . Volume ridotto.* Ottenuta così la relazione involgente la θ e corrispondente p_{θ} definiente la σ ridotta $(H)_{p_{\varphi}=c_1, p_{\psi}=c_2} = E$ nello spazio ridotto, si tratta di accertarne la chiusura.

Poniamo all'uopo nella (1 a)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} e = E - \frac{p_{\varphi}^2}{2C}, \\ \frac{p_{\varphi}}{\sqrt{2Ae}} = y \quad , \quad \cos \theta = x \quad , \quad \frac{p_{\psi}}{\sqrt{2Ae}} = c \quad , \quad \frac{p_{\psi}}{\sqrt{2Ae}} = b. \end{array} \right.$$

La (1 a) suddetta si scrive allora compendiosamente

$$(3) \quad y^2 + \frac{(c - bx)^2}{1 - x^2} = 1$$

ovvero anche

$$(3 a) \quad (1 - x^2) y^2 + x^2 + (c - bx)^2 = 1 .$$

Si constata in primo luogo senza difficoltà che, la curva ora definita è simmetrica rispetto all'asse x , si annulla nei punti x_1, x_2 interni alla striscia $x = \pm 1$ determinabili come radici dell'equazione (ottenuta dalla (3 a) per $y = 0$),

$$(4) \quad x^2 + (c - bx)^2 = 1 .$$

Codeste radici, aventi modulo inferiore ad 1, precisamente

$$(5) \quad x_{1,2} = \frac{bc \pm \sqrt{1 + b^2 - c^2}}{1 + b^2} ,$$

reali e distinte sotto la condizione che sia ⁽¹⁾

$$\frac{c}{\sqrt{1+b^2}} < 1,$$

limitano il campo di variabilità della x , interno alla striscia $x = \pm 1$, che è

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

La chiusura della curva nel tratto ora definito si constata immediatamente dalla (3a) con una semplice ispezione.

(1) Che effettivamente si abbia

$$\frac{c}{\sqrt{1+b^2}} < 1$$

si riscontra senza difficoltà esplicitando c e b in base alle (2). Si ha anzitutto:

$$(*) \quad \frac{c}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{p_\psi}{\sqrt{2Ae + p_\varphi^2}} = \frac{p_\psi}{\sqrt{(p_\theta^2 + \sigma^2) + p_\varphi^2}}.$$

Indi, ricordando le note espressioni dei momenti $p_\varphi, p_\psi, p_\theta$ in funzione di A, C e componenti di rotazione p, q, r

$$p_\theta = A(p \cos \varphi - q \sin \varphi),$$

$$p_\varphi = Cr,$$

$$p_\psi = A(pj_1 + qj_2) + Crj_3,$$

j_1, j_2, j_3 designando i coseni direttori di ζ rispetto a x, y, z , si trae

$$p_\theta^2 + \sigma^2 = A^2(p^2 + q^2) \quad , \quad p_\varphi^2 = C^2 r^2.$$

Ove si ricordi che il momento della quantità di moto \mathbf{K} ha il modulo dato dalla relazione

$$K^2 = A^2(p^2 + q^2) + C^2 r^2,$$

risulta

$$p_\theta^2 + \sigma^2 + p_\varphi^2 = K^2 \quad , \quad p_\psi = K_\zeta$$

e perciò, per (*),

$$\frac{c}{\sqrt{1+b^2}} < 1 \quad \text{per } K \text{ non coincidente con } \zeta.$$

Quanto all'esser $|x_1|, |x_2| < 1$, rilevando che, ove si indichino con θ^* ed α gli angoli che ζ rispettivamente ζ fanno con \mathbf{K} , si ha

$$p_\varphi = K \cos \theta^* \quad , \quad p_\psi = K \cos \alpha,$$

$$\sqrt{2Ae} = \sqrt{A^2(p^2 + q^2)} = K \sin \theta^*,$$

si trae

$$x_{1,2} = \frac{bc \pm \sqrt{1+b^2-c^2}}{1+b^2} = \cos \theta^* \cos \alpha \pm \sin \theta^* \sin \alpha = \cos(\theta^* \pm \alpha),$$

donde, esclusa la circostanza $p_\psi = K$, $x_{1,2} < 1$ c. d. d.

Attesa la chiusura della (3) resta subordinata naturalmente quella della σ ridotta da cui la (3) si è desunta come trasformata attraverso le posizioni (2).

Possiamo passare dunque al calcolo dell'area, cioè del volume ridotto W , precisamente

$$W = \int p_0 d\theta$$

ovvero anche, per le (2), posto

$$I = 2 \int_{x_1}^{x_2} y \frac{dx}{\sqrt{I - x^2}},$$

$$W = \sqrt{2Ae} I.$$

Quanto ad I , poichè in base alla (3) e (4)

$$y = \sqrt{I + b^2} \frac{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}}{\sqrt{I - x^2}},$$

si avrà evidentemente, introducendo l'integrale

$$I' = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(x - x_1)(x_2 - x)}}{I - x^2} dx,$$

$$I = 2\sqrt{I + b^2} I'.$$

Per il calcolo di I' conviene notoriamente porre,

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = s, & \frac{x_2 - x_1}{2} = d, \\ x = s + d \sin u. \end{cases}$$

Si ricava allora senza difficoltà, attraverso sviluppi alquanto lunghi che qui è inutile riportare,

$$I' = \frac{\pi}{2} \left\{ I - \sqrt{(I + s)^2 - d^2} - \sqrt{(I - s)^2 + d^2} \right\}$$

e quindi, esprimendo s e d pel tramite delle (6), ove si ricordino le relazioni che legano le radici x_1, x_2 alle costanti b e c ,

$$I = 2\pi \left\{ \sqrt{I + b^2} - \begin{cases} b & \dots \text{ per } b > c, \\ c & \dots \text{ per } b < c. \end{cases} \right.$$

Tenendo presenti le espressioni di b, c in funzione di K , risulta in definitiva

$$W = \sqrt{2 A e} I = K \cdot \begin{cases} (1 - \cos \alpha) & \text{per } b > c, \\ (1 - \cos \tilde{\theta}) & \text{per } b < c, \end{cases}$$

$b \geq c$ discriminando la ubicazione dell'asse ζ , *esterna*, rispettivamente *interna* al cono di asse K e semiapertura $\tilde{\theta}$.

Va rilevato che, per $\alpha = 0$ (coincidenza di K con ζ) vien meno l'invariante adiabatico, risultando identicamente $W = 0$; per ζ sul manto del cono havvi coincidenza delle due espressioni di W , la cui diversità va attribuita al fatto qualitativo che l'asse ζ , per ipotesi fisso e quindi immune da influenze adiabatiche, può presentare due eventualità rispetto all'andamento generale del fenomeno: essere cioè esterno, ovvero interno al cono precessionale.

Meccanica. — *Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. II. Amortissement exponentiel à l'infini.* Nota ⁽¹⁾ di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans une Note précédente ⁽²⁾ j'ai réduit aux équations différentielles ordinaires le problème de la stabilité des mouvements laminaires en envisageant notamment le cas où le mouvement non troublé se réduit au repos. Je vais approfondir ici les conséquences de l'hypothèse, tout à fait dans l'esprit de la question, d'un amortissement exponentiel dans le temps et à l'infini.

Je garderai, pour plus de commodité, les notations et je continuerai le numérotage des §§ et des formules de ma Note précédente.

4. Étude du cas de perturbations s'annulant exponentiellement à l'infini.

Nous étudierons maintenant les perturbations correspondantes aux λ, μ réels positifs, donc s'annulant à l'infini et évanescences avec le temps. Nous avons donc les expressions (10) des ψ_k .

λ, μ doivent satisfaire à une des deux équations E_1, E_2 au moins que l'on obtient en annulant les coefficients de A_{10}, B_{10} . Ces deux relations sont satisfaites à la fois, si l'on a

$$\left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda \right) H = p\pi,$$

$$\left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda \right) H = q\pi,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1931.

(2) Dans ce même volume des « Rendiconti », p. 93.

p, q entiers, donc

$$\lambda H = r\pi, \quad \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{v}} H = s\pi,$$

r, s entiers,

$$H^2 \frac{\mu}{v} = (s^2 - r^2) \pi^2.$$

Supposons que ces relations

$$(24) \quad \lambda H = r\pi, \quad H^2 \frac{\mu}{v} = (s^2 - r^2) \pi^2$$

n'aient pas lieu à la fois, ce qui arrivera certainement si λ n'est pas choisi de manière à satisfaire à la première relation.

Supposons que la première des équations E_i ait lieu. On a alors $B_i = 0, A_i$ arbitraire réel. Nous avons donc

$$\varphi_i = A_i \sin r_i y$$

$$p_i = \lambda, \quad r_i = \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{v}}.$$

φ_i est *impair*. Envisageons maintenant les formules (20). Si $\varphi_{k-h, h}$ est *impair* on a la condition

$$(25) \quad \int_0^H \sin p_{k-h, h} u \cdot \varphi_{k-h, h}(u) du = 0$$

et si $\varphi_{k-h, h}$ est *pair* on a la condition

$$(26) \quad \int_0^H \cos p_{k-h, h} u \cdot \varphi_{k-h, h}(u) du = 0,$$

donc on a dans le premier cas

$$B'_{k-h, h} = 0$$

et dans le second

$$A'_{k-h, h} = 0.$$

On a donc dans le premier cas

$$f_{k-h, h}(-y) = -A'_{k-h, h} \sin p_{k-h, h} y + \frac{1}{p_{k-h, h}} \int_0^{-y} \sin p_{k-h, h}(-y-u) \varphi_{k-h, h}(u) du,$$

et dans le second cas

$$f_{k-h, h}(-y) = B'_{k-h, h} \cos p_{k-h, h} y + \frac{1}{p_{k-h, h}} \int_0^{-y} \sin p_{k-h, h}(-y-u) \varphi_{k-h, h}(u) du.$$

Or on a dans le premier cas

$$\begin{aligned} \int_0^{-y} \sin p_{k-h,h}(-y-u) \varphi_{k-h,h}(u) du &= - \int_0^y \sin p_{k-h,h}(-y+u) \cdot \varphi_{k-h,h}(-u) du = \\ &= \int_0^y \sin p_{k-h,h}(-y+u) \varphi_{k-h,h}(u) du = - \int_0^y \sin p_{k-h,h}(y-u) \varphi_{k-h,h}(u) du, \end{aligned}$$

donc $f_{k-h,h}(u)$ est *impair*. Dans le second cas $f_{k-h,h}(u)$ est *pair*.

Remplaçons dans les relations (20) $\varphi_{k-h,h}(y)$ par l'expression (16).

On a les deux conditions

$$(27) \left\{ \begin{aligned} &2 A_{k-h,h} \int_0^H \sin r_{k-h,h} u \cdot \sin p_{k-h,h} u du + \\ &+ \frac{1}{r_{k-h,h}} \int_0^H \sin p_{k-h,h} u \left[\int_0^u \sin r_{k-h,h}(u-\zeta) F_{k-h,h}(\zeta) - \right. \\ &\left. - \int_0^{-u} \sin r_{k-h,h}(-u-\zeta) F_{k-h,h}(\zeta) d\zeta \right] du = 0, \\ &2 B_{k-h,h} \int_0^H \cos r_{k-h,h} u \cdot \cos p_{k-h,h} u du + \\ &+ \frac{1}{r_{k-h,h}} \int_0^H \cos p_{k-h,h} u \left[\int_0^u \sin r_{k-h,h}(u-\zeta) F_{k-h,h}(\zeta) + \right. \\ &\left. + \int_0^{-u} \sin r_{k-h,h}(-u-\zeta) F_{k-h,h}(\zeta) d\zeta \right] du = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après ce que nous avons vu lorsque $F_{k-h,h}(\zeta)$ est *impair* l'intégrale

$$\int_0^y \sin r_{k-h,h}(u-\zeta) F_{k-h,h}(\zeta) d\zeta$$

est *impaire*, et elle est *paire*, si $F_{k-h,h}(\zeta)$ est *pair*.

Donc dans le cas de $F_{k-h,h}(\zeta)$ impair on a

$$B_{k-h,h} \int_0^H \cos r_{k-h,h} u \cdot \cos p_{k-h,h} u du = 0,$$

et dans le cas de $F_{k-h,h}(\zeta)$ pair on a

$$A_{k-h,h} \int_0^H \sin r_{k-h,h} u \cdot \sin p_{k-h,h} u du = 0.$$

Supposons qu'aucune des fonctions

$$(28) \quad \begin{cases} f_{k-h,b}^{(1)}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(r_{k-h,b} - p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} - p_{k-h,b}} - \frac{\sin(r_{k-h,b} + p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} + p_{k-h,b}} \right\}, \\ f_{k-h,b}^{(2)}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(r_{k-h,b} - p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} - p_{k-h,b}} + \frac{\sin(r_{k-h,b} + p_{k-h,b}) H}{r_{k-h,b} + p_{k-h,b}} \right\} \end{cases}$$

ne s'annule pour $k > 1$, alors on a

$$B_{k-h,b} = 0$$

si $F_{k-h,b}(\zeta)$ est impair et

$$A_{k-h,b} = 0$$

si $F_{k-h,b}(\zeta)$ est pair.

Si φ_1 est impair, f_1 est donc impair, mais alors F_2 est impair, donc φ_2 est impair. f_2 est impair, donc F_3 est impair etc. Donc les φ_k, f_k sont *impairs*.

Supposons maintenant que λ, μ satisfassent à la *seconde* équation E_2 . Alors on a

$$\varphi_1 = B_1 \cos r_1 \gamma.$$

f_1 est pair, F_2 impair, donc φ_2 impair. Donc f_2 est impair et F_3 pair, donc φ_3 pair etc. Supposons que les φ_i soient alternativement pairs et impairs φ_k pair si k impair et inversement, de même f_k . Alors si φ_k est pair, f_k pair, $k+1$ est pair et somme de deux nombres de même parité, donc F_{k+1} est impair, et φ_{k+1}, f_{k+1} impairs. Au contraire, si φ_k, f_k sont impairs, $k+1$ est impair, donc somme de deux nombres de parité différente. Donc F_{k+1} est pair, de même f_{k+1}, φ_{k+1} . Donc les φ_k, f_k sont *alternativement pairs et impairs*.

5. Suite de l'étude des perturbations correspondant aux λ, μ réels.

Dans le cas de $A_1 \neq 0$ nous obtenons des relations (27) les expressions suivantes des A_k

$$(29) \quad A_k = -\frac{1}{r_k \cdot f_k^{(1)}} \int_0^H \sin k \lambda u \cdot \int_0^u \sin r_k(u - \zeta) F_k(\zeta) d\zeta,$$

donc on a

$$(30) \quad \varphi_k = \frac{1}{r_k} \int_0^y \sin r_k(y - u) F_k(u) du - \frac{\sin r_k y}{r_k \cdot f_k^{(1)}} \cdot \int_0^H \sin k \lambda u \int_0^u \sin r_k(u - \zeta) F_k(\zeta) d\zeta.$$

Supposons que nous ayons choisi λ de manière que l'on ait

$$0 < 2 \lambda H < \pi,$$

et μ de l'équation

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda = \frac{2n\pi}{H},$$

n entier > 0 , donc

$$\mu = \mu_1 = \nu \left[\left(\lambda + \frac{2n\pi}{H} \right)^2 - \lambda^2 \right] = \nu \left[\frac{4n^2\pi^2}{H^2} + \frac{4n\pi\lambda}{H} \right].$$

$f_1^{(1)}$ est alors *négatif*, car on a

$$\left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda \right) H = 2n\pi + 2\lambda H.$$

Calculons maintenant $\mu = \mu_2$ de

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} + \lambda = \frac{(2n+1)\pi}{H},$$

donc

$$\mu_2 = \nu \left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{H} - \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right] = \nu \left[\left(\frac{\pi - \lambda H}{H} + \frac{2n\pi}{H} \right)^2 - \lambda^2 \right] > \mu_1.$$

f_1^1 est alors *positif*, car on

$$\left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu}{\nu}} - \lambda \right) H = (2n+1)\pi - 2\lambda H = 2n\pi + (\pi - 2\lambda H).$$

Il existe donc entre μ_1 et μ_2 une valeur de μ (au moins) annulant f_1^1 . Faisant croître n indéfiniment on obtient une infinité dénombrable de valeurs *réelles croissantes indéfiniment* de μ .

Envisageons les expressions f_k^1 et f_k^2 . Le second membre de ces expressions tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment. Quant au premier membre, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2 \lambda^2 + \frac{k\mu}{\nu}} - k\lambda &= k\lambda \sqrt{1 + \frac{\mu}{k\lambda^2 \nu}} - k\lambda = \\ &= k\lambda \left\{ 1 + \frac{\mu}{2k\lambda^2 \nu} + \left(\frac{1}{k} \right)_2 \right\} - k\lambda = \frac{\mu}{2\lambda \nu} + \left(\frac{1}{k} \right)_1. \end{aligned}$$

Donc le premier membre tend vers

$$(31) \quad \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\mu H}{2\lambda \nu}}{\frac{\mu}{2\lambda \nu}},$$

ce qui est *différent de zéro*, si $\frac{\mu H}{2\lambda \nu}$ est différent de $m\pi$, m entier.

Remplaçons dans l'équation E_i μ par $\frac{2\lambda\nu m\pi}{H}$, on aura l'équation E

$$(32) \quad \frac{\sin \lambda H \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2m\pi}{\lambda H}} \right]}{\lambda H \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2m\pi}{\lambda H}} \right]} - \frac{\sin \lambda H \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2m\pi}{\lambda H}} \right]}{\lambda H \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2m\pi}{\lambda H}} \right]} = 0.$$

Cette *équation-limite* n'a pour toute valeur de m qu'un nombre dénombrable de valeurs de λ . Donc lorsque $\frac{\mu}{\lambda}$ est *borné*, il n'y a qu'un nombre *fini* de valeurs de λ satisfaisant aux équations (31).

Donc on n'a dans un intervalle situé à l'intérieur de l'intervalle $0, \frac{\pi}{2H}$ de λ qu'un nombre fini de *valeurs exceptionnelles* λ_0 , lorsque le nombre n envisagé précédemment est *borné* $< N$.

À l'exception de ces nombres λ_0 la limite de f_k^1 pour $k \rightarrow \infty$ est un nombre différent de zéro donc dans tout intervalle qui ne contient ni à l'intérieur ni sur la frontière un de ces nombres exceptionnels, l'expression (31) est en valeur absolue supérieure à un nombre positif L .

Remplaçons maintenant dans les expressions $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}$ μ par son expression en λ ou bien éliminons μ entre E_i et ces équations. On obtient des fonctions de λ qui n'ont qu'un nombre fini de racines en λ dans chaque intervalle fini.

On peut pour chaque intervalle I fini de λ qui ne contient à l'intérieur ni à la frontière aucune valeur exceptionnelle λ_0 trouver un nombre L' positif et un nombre $k' > 0$ entier, tel que pour tous les $k > k'$ et pour tout λ de l'intervalle et pour les μ correspondants et tels que $\frac{\mu}{\lambda}$ soit $< N$ les f_k^1 et les f_k^2 soient en valeur absolue plus grands que L' .

Envisageons alors les f_k^1, f_k^2 qui appartiennent aux valeurs de $k \leq k'$. En éliminant μ de E_i et de ces f_k on obtient un nombre limité d'équations en λ qui ont dans un intervalle I envisagé un nombre limité de racines λ_i . Pour chaque λ de I différent des λ_i toutes les fonctions f_k^1, f_k^2 pour les μ correspondant aux λ et tels que $\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \leq N$ sont *différentes de zéro* et tendent vers un nombre différent de zéro.

Pour tout intervalle I , ne contenant à l'intérieur ni sur la frontière aucun des nombres λ_0, λ_i il existe un nombre L_i positif, tel que tous les f_k^1, f_k^2 restent *uniformément dans l'intervalle* au dessus de ce nombre L_i .

Remarquons aussi que l'expression

$$\sqrt{k^2 \lambda^2 + \frac{k\mu}{\nu}} - k\lambda$$

reste pour $k > 1$ au dessus de

$$k\lambda \left[1 + \frac{\mu}{k v \lambda^2 p} - 1 \right] = \frac{\mu}{v \lambda p},$$

p étant un nombre *suffisamment grand* indépendant de k .

Supposons maintenant que λ satisfasse à la relation

$$2\lambda H = 2m\pi + \sigma, \quad 0 < \sigma < \pi,$$

alors on a encore

$$\sin \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_1}{v}} \right) H > 0$$

pour

$$\mu_1 = v \left[\left(\frac{2n\pi}{H} + \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right],$$

et

$$\sin \left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_2}{v}} - \lambda \right) H = \sin [(2n+1)\pi - \sigma] > 0$$

pour

$$\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_2}{v}} = \frac{(2n+2m+1)\pi + \pi}{H}$$

donc pour

$$\mu_2 = v \left[\left(\frac{(2n+2m+1)\pi}{H} - \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right] > v \left[\left(\frac{2n\pi}{H} + \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right] > \mu_1.$$

Si λ satisfait à la relation

$$2\lambda H = (2m+1)\pi + \sigma, \quad 0 < \sigma < \pi$$

alors on pose

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_1}{v}} - \lambda = \frac{(2n+1)\pi}{H},$$

ce qui donne

$$\left(\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_1}{v}} + \lambda \right) H = (2n+1)\pi + 2\lambda H$$

et le nombre à gauche de E_1 est négatif. Puis on pose

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_2}{v}} + \lambda = \frac{(2n+3)\pi + (2m+1)\pi}{H},$$

donc

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_2}{\nu}} - \lambda = \frac{2(n+1)\pi + \pi - \sigma}{H}$$

et le nombre à gauche de E_1 est positif. On a

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \nu \left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{H} + \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right], \\ \mu_2 &> \nu \left[\left(\frac{(2n+2)\pi}{H} + \lambda \right)^2 - \lambda^2 \right] > \mu_1.\end{aligned}$$

Enfin, si l'on a

$$2\lambda H = 2m\pi,$$

on pose

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_1}{\nu}} - \lambda = \frac{2n\pi + \frac{\pi}{2}}{H},$$

$$\sqrt{\lambda^2 + \frac{\mu_2}{\nu}} - \lambda = \frac{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}{H},$$

et les signes sont *contraires*.

Nous avons donc le résultat:

Dans tout intervalle de λ il y a un autre intervalle I tel que pour tout λ de cet intervalle et pour $\frac{\mu}{\lambda}$ borné $\leq N$, il y a des valeurs de μ telles que:

- 1) l'équation E_1 est satisfaite,
- 2) aucune des fonctions $f_k^1, k > 1$, $f_k^2, k \geq 1$ n'est nulle,
- 3) toutes ces fonctions sont en valeur absolue plus grandes qu'un nombre positif $L > 0$ indépendant de λ de l'intervalle I .

Je remets à une Note prochaine la discussion des questions de convergence.

Geofisica. — *Un contributo della sismometria alla storia della terra* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di E. ODDONE, presentata dal Socio L. PALAZZO.

Le velocità delle onde sismiche attraverso al globo e le varie ampiezze di moto che dette onde provocano nel suolo (le une e le altre come dedotte dall'analisi di alcuni sismogrammi) oltre che servire allo scopo pratico di far sapere nel minor tempo possibile l'ubicazione dell'area epicentrale colpita da un disastro tellurico, forniscono man mano delle interessanti conoscenze sulle proprietà fisiche della materia nelle parti invisibili della crosta terrestre e del nucleo interno.

Questa Nota ha per oggetto di mostrare, in altr'ordine di idee, l'ausilio che la sismometria può dare alla scienza della terra, e precisamente all'interpretazione del più straordinario evento tra quanti si riferiscono alla sua storia: la formazione del satellite luna.

È celebre l'ipotesi di G. H. Darwin secondo la quale la luna si sarebbe distaccata dal pianeta terra, per via dell'azione mareografica esercitata dal sole. Sarebbe stata una lunga successione di azioni attrattive, avvenute in risonanza col periodo proprio di oscillazione sferoidale dell'insieme terra e luna a provocare il distacco di una porzione dei rigonfiamenti, già esageratamente estesi dalla rapida rotazione del sistema, in quei tempi primordiali ⁽³⁾.

Avvenuto il distacco, per attrito mareografico reciproco, diminuirono le velocità di rotazione e rivoluzione, in rapporti variabili col tempo e colla distanza, così da giungere alle durate ed al vettore dei tempi presenti.

La teoria del Darwin è stata oggetto di ripetute discussioni alle quali presero parte valentissimi matematici e geofisici, cito: Poincarè, Jean, Love, Bryan, Moulton, Jeffreys, Schwarzschild, Liapunow, ecc. ma sebbene tutti abbiano fatto obiezioni, attacchi e suggerito varianti, nessuno è ancora riuscito a demolirla.

Questa Nota è intesa a mostrare che alcune costanti appartenenti alla sismometria entrano, fattori dominanti, nel grandioso problema, e ne allargano il già vasto orizzonte.

Per l'oggetto a cui miro, bastano nozioni elementari e formole approssimate.

(1) Lavoro eseguito nel R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica, Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 agosto 1931.

(3) La teoria di G. H. DARWIN è sviluppata nelle « Scientific Papers di Cambridge 1908 », e nei « Phil. Trans. »; e trovasi riassunta nella traduzione italiana di G. P. MAGRINI del libro *La marea ed i fenomeni concomitanti nel sistema solare* dello stesso Darwin. È anche ottimamente volgarizzata in W. TRABERT: *Kosmische Physik*, Teubner, Berlino 1911.

Per la risonanza era necessario che il periodo della sollecitazione mareografica che dirò T_m , fosse eguale al periodo libero di oscillazione del pianeta che dirò T_o . Doveva essere

$$(1) \quad T_m = T_o.$$

Un massimo di attrazione per ogni punto presso all'equatore del sistema terra e luna doveva ripetersi ogni volta detto punto passava pel meridiano del sole. Questo in una rotazione succede due volte, quindi il periodo T_m doveva valere l'incognito semiperiodo della primordiale rotazione terrestre, e cioè essere:

$$(2) \quad T_m = \frac{T_r}{2}$$

e per la (1)

$$(3) \quad \frac{T_r}{2} = T_o.$$

Importa conoscere l'uno o l'altro T_r o T_o e si arriva ad essi per via astronomica e per via geofisica.

Nella via astronomica serve da guida la legge della conservazione del momento angolare del sistema. Attualmente vale

$$5.78 M_i \omega$$

essendo M_i il principale momento di inerzia della terra nell'ipotesi del Wiechert; ed ω l'attuale velocità angolare di rotazione $7.3 \cdot 10^{-5}$. Questo momento angolare deve eguagliare quello proprio alla terra e luna quando formavano un solo sistema.

Tenendo presente che i rigonfiamenti potevano spingersi fino ad oltre $2 R_o$ risulta che la luna si è staccata quando girava attorno all'asse terrestre con una durata di rotazione ricavabile dalla terza legge di Keplero:

$$T_r^2 = \frac{27.4^2 \times 24^2 \times 2^3}{60^3}.$$

Viene T_r eguale a quattr'ore circa.

Per via geofisica si calcola dapprima T_o e per la (3) si arriva a T_r . Il calcolo di T_o periodo di oscillazione libera della primitiva massa, già difficile per sè stesso, è reso eccessivamente complicato per via della forma e della struttura non omogenea del corpo rotante. Per T_o si intende il tempo che prende una sfera elastica o gravitazionale ad oscillare simmetricamente attorno alla sua posizione di equilibrio, per esempio a passare dalla

forma sferica a quella di arancio, poi a quella di limone, con ritorno alla sferica ⁽¹⁾.

Il problema di trovare T_0 fu risolto idrodinamicamente mediante le equazioni differenziali proprie alle oscillazioni di un'ellissoide liquido rotante. Risulta per T_0 un periodo minore, tutt'al più eguale a due ore, e quindi per la (3) viene $T_r \leq$ quattr'ore, in non ottima, ma sufficiente concordanza col risultato astronomico.

In questa Nota mostro che il miglior modo di ottenere il valore di questo periodo libero è di dedurlo dalla sismometria. Il periodo libero T_0 può esprimersi nella solita forma $T_0 = \frac{\lambda}{V_{\text{propagazione}}}$ e poichè sotto all'azione mareografica solare la lunghezza d'onda λ vale la semicirconferenza equatoriale πr possiamo scrivere:

$$(4) \quad T_0 = \frac{\pi r}{V_{\text{propag.}}}$$

Per la formola (3) risulta che la durata della rotazione vale il doppio del periodo libero:

$$(5) \quad T_{\text{rotaz.}} = \frac{2 \pi r}{V_{\text{propag.}}} = \frac{2 \pi r}{V_{\text{rotazione}}}$$

eguaglianza che ci riconduce alla premessa che è base dell'ipotesi del Darwin:

$$(6) \quad V_{\text{rotaz.}} = V_{\text{propag.}}$$

La (5) è intesa a fornire la primordiale durata di rotazione della terra in funzione della velocità di propagazione e del semiasse equatoriale r .

Per la velocità di propagazione dobbiamo far capo alla sismometria. Sotto agli strati sedimentari, che non contano, la corteccia terrestre è costituita da una grande cappa granitica, spessa circa 40 km, dai geologi detta sial (silicio ed alluminio), nella quale la velocità delle onde longitudinali ha il valore pressochè costante di 5.6 km/sec.

Portata questa velocità di propagazione nella (5), avremo:

$$T_r = \frac{2 \pi r}{5.6}$$

e resta ancora incognito il semiasse equatoriale r .

La sua lunghezza cresceva col rigonfiamento causato dalla rotazione.

(1) Da non prendersi alla lettera perchè in una terra che rota, l'ampiezza di moto dell'oscillazione libera è così infinitamente piccola rispetto al rigonfiamento dovuto alla rotazione che la palla persiste nella sua forma schiacciata.

Accontentandomi dell'ordine di grandezza, mi sono limitato a ritenere che il rapporto tra i quadrati della velocità lineare di rotazione (che è il fattore più importante nell'espressione della forza centrifuga) non sia molto diverso dal rapporto dei relativi schiacciamenti terrestri. Se l'attuale velocità lineare di rotazione (0.414 km/sec a distanza R_0) dà uno schiacciamento $\frac{r-b}{r} = 1/297$; una velocità lineare di rotazione eguale a 5.6 km/sec darà uno schiacciamento:

$$(8) \quad \frac{1}{x} = \frac{5.6^2}{0.414^2} \times \frac{1}{297} = \frac{1}{1.6},$$

dunque:

$$(9) \quad \frac{1}{1.6} = \frac{r-b}{r}.$$

La (9) è soddisfatta per un'infinità di valori di r e b epperò dobbiamo precisare il valore di r che fa al caso nostro.

Un disco omogeneo non può rotare con velocità superiore a quella per cui la forza centrifuga supera la tenacità del materiale. Tutta la parte che rota con velocità superiore alla critica, è proiettata via, ed il disco decurta le proprie dimensioni fino a che il suo raggio vale R_c . La proposizione si applica ad un pianeta rotante, e se si tratta della terra, non del tutto solida, il raggio equatoriale critico essendo solo funzione della velocità lineare e del peso, sarà approssimativamente dato dalla:

$$R_c = \frac{V_{\text{rotazione}}}{g}$$

da cui, e per la (6),

$$(10) \quad V_{\text{rotazione}} = V_{\text{propagazione}} = \sqrt{g R_c} = 5.6.$$

Sappiamo dalla (10) che la velocità critica cresce colla radice quadra del raggio, ma nel contempo diminuisce perchè colla maggior distanza la gravità scema più rapidamente che non aumenta il raggio. Quando $r = kR_0$ (11), g diventa g/k^2 , quindi per la (10),

$$(10^{bis}) \quad V_{\text{rot.}} = V_{\text{prop.}} = 5.6 = \sqrt{\frac{g_0}{k^2} k R_0} = \sqrt{\frac{0.01}{k} \cdot 6370},$$

dalla quale $k = 2$ circa. Allora per la (11) abbiamo $r = 2R_0$ e per la (9) $b = 0.7R_0$ colla conclusione che nel primordiale ellissoide i semiassi in x ed y valevano circa $2R_0$ e quello in z $0.7R_0$.

Sostituendo, al posto di r nella (4) e nella (5), il valor trovato di

2R₀ deduco il periodo libero T₀ e quello di rotazione T_r. Viene

$$T_0 = \frac{2\pi \cdot 6370}{5.6} = \text{due ore}$$

$$T_r = \frac{4\pi \cdot 6370}{5.6} = \text{quattro ore}$$

cifre che corrispondono a quelle che si ottengono coi procedimenti astronomici e geofisici sopraccegnati.

Rimane così provato che con una durata di rotazione di quattro ore, associata ad una risonanza di due ore, la superficie terrestre poteva essere portata alle condizioni critiche di disgregamento.

La decurtazione del pianeta, sotto a tale doppia azione era inevitabile.

La genesi che abbiamo esposta è dovuta a G. H. Darwin. Io non ho fatto che esaltare la parte che nel problema ha preso la scienza che coltiva: la sismometria.

In quello straordinario evento che fu il distacco della luna dalla terra, la forza centrifuga essendo proporzionale alla massa, erano spinte più lontane dall'asse le sostanze più dense. Fu lanciata più distante, ma in piccola quantità, la peridotite che ha la densità tra 3 e 3.9; poi i basalti a densità 2.9; poi i frantumi della cappa granitica a densità 2.7⁽¹⁾.

Di questi ultimi ne furono proiettati tanti, che attualmente sulla terra, e specialmente sotto al Pacifico, lo strato granitico si mostra il meno completo. Tutti poi i frammenti, avendo la velocità di rotazione del pianeta, presero a muovere nello stesso senso e con egual velocità angolare. Col tempo, per la reciproca azione mareografica, il periodo di rotazione del pianeta e di rivoluzione dei frantumi andò allungandosi, e probabilmente al limite detto di Roche (2.4 a 3 raggi planetari) detti frammenti già erano composti in unico satellite, iniziando quell'accordo di moto pel quale la luna volge sempre la stessa faccia alla terra. Sono passate ere astronomiche dacchè i solidi, l'aria, i vapori, i gas a non forte velocità molecolare, non corsero più rischio sulla terra di essere proiettati fuori del loro ambiente: non altrettanto può dirsi per quelli sul satellite. A dispetto del distacco, lo schiacciamento terrestre rimase ancora forte; ma cessata la risonanza, diminuita col tempo la velocità lineare di rotazione fino al suo attuale valore, lo schiacciamento prese a diminuire, riducendosi al valore attuale di 1/297.

Per milioni d'anni continuò un processo che doveva portare i due astri alle attuali distanze, portare la rotazione terrestre sulle 24 ore siderali, e

(1) Non è escluso che varié concentrazioni di sostanze pesanti in superficie ed impregnazioni di gas in profondità possano datare da quell'epoca.

la rivoluzione del satellite ai 27 giorni dell'era presente. Durante i tempi geologici, mentre tutto un complesso di fenomeni geotettonici, bradisismici, intrusivi, sedimentari posavano su le cappe arcaiche altri manti dotati di elasticità minore, la distanza ed il periodo di rotazione e rivoluzione della luna variavano di pochissimo.

Secondo il prof. Mohorovicic⁽¹⁾, nel distacco della luna, $1/3$ del sial terrestre, specie quello che trovavasi al fondo dell'oceano Pacifico, è stato strappato via. Questo sial, sulla superficie selenita quindici volte minore della terrestre, formò un guscio lunare spesso 100 km: i sottostanti 300 km sarebbero costituiti dal sialma; ed i restanti 1370 km dalla peridotite, materiali tutti tolti agli accennati substrati corticali del nostro globo. Quindi una luna tutta solida, con una costituzione non diversa da quella della superficie della nostra terra, con densità media di 3.3 ed un coefficiente medio di rigidità $5.2 \cdot 10^{11}$ corrispondenti alle relative costanti fisiche medie dei gusci terrestri dai quali fu strappata⁽²⁾.

La concordanza tra le misure petrografiche, geodetiche, astronomiche e sismologiche parla per la giustezza della concezione del Darwin, e per la bontà delle nuove idee sugli interni del nostro pianeta e satellite fino ai rispettivi loro centri.

Fisica. — *Spettro Raman dell'ammoniaca in soluzione a concentrazioni diverse.* Nota⁽³⁾ di V. RICCA, presentata dal Socio A. LO SURDO.

Lo spettro Raman dell'ammoniaca è stato già osservato, tanto per la ammoniaca allo stato gassoso⁽⁴⁾⁽⁵⁾, quanto allo stato liquido⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾, quanto allo stato di soluzione acquosa⁽⁸⁾⁽⁹⁾. I risultati ottenuti possono essere riassunti nel seguente specchietto:

(1) S. MOHOROVICIC: *Das Erdinnere*. «Zeitschrift f. angew. Geophysik», I., 330-383, 1925. Anche: *Ueber Nabbeben und über Konstitution des Erd- und Mondinnern*. «Beitr. z. Geophysik», Bd. XVII, Heft 2, 1927.

(2) Risulta anche, e ciò è utile alla cronologia, che il distacco della luna capitò quando già era finito il processo di separazione tra il nucleo metallico terrestre ed il suo involucro corticale siliceo.

(3) Pervenuta all'Accademia il 22 agosto 1931.

(4) WOOD, «Phil. Mag.», 7, 744, 1929.

(5) DICKINSON, DILLON e RASETTI, «Phys. Rev.», 34, 582, 1929.

(6) DAURE, «Trans. Farad. Soc.», 25, 825, 1929.

(7) BHAGAVANTAM, «Ind. J. Phys.», 5, 59, 1930.

(8) CARELLI, BRINGSHEIM e ROSEN, «Z. f. Phys.», 51, 511, 1928.

(9) A. HOLLANDER e J. W. WILLIAMS, «Phys. Rev.», 37, 1367, 1931.

Stato	Citazione	$\Delta\nu_1$	$\Delta\nu_2$	$\Delta\nu_3$	$\Delta\nu_4$	$\Delta\nu_5$
Gas	(2)	—	—	—	3309	—
Gas	(3)	—	—	—	3337	—
Liquido	(4)	1070	1580	3210	3310	3380
Liquido	(5)	1070	—	3256	3304	3380
Liquido	(3)	—	—	3214	3298	—
Soluzione	(6)	—	—	—	3314	3385
Soluzione (16N) . . .	(7)	1703	1615	3219	3311	3390

Ciò che risulta di più importante nello specchietto riportato è che le righe presenti nello spettro della soluzione sono tutte presenti nello spettro dell'ammoniaca liquida; ciò ha una importanza non indifferente per il fatto che in soluzione acquosa dovrebbe trovarsi la molecola NH_4OH .

Tenuto conto di ciò, venne studiato lo spettro Raman per soluzioni diversamente concentrate: dal 7 al 28 %, allo scopo di vedere se non fosse possibile trovare delle righe appartenenti alla molecola intera, e di vedere se anche per le basi avviene qualche cosa di simile di ciò che è stato osservato per primo da Rao sull'acido nitrico e che possa essere attribuito alla dissociazione della molecola.

Per l'osservazione dello spettro venne adoperato uno spettrografo adattato in laboratorio, adoperando il collimatore e la camera fotografica dello spettrografo Hilger D 78, ed il prisma di uno spettrografo Littrow della stessa casa. L'apparecchio così fatto aveva una dispersione presso a poco uguale a quella del D 78, ma presentava una trasparenza notevolmente maggiore per i raggi dell'estremo violetto: era così possibile ottenere, nel caso dell'ammoniaca, lo spettro Raman eccitato dalle righe: k (4046.8 \AA) e q (3650.2 \AA) ⁽¹⁾.

Dall'osservazione dello spettro di una soluzione al 28 % risultarono presenti le righe che possono farsi corrispondere a quelle contrassegnate nello specchietto precedente con le indicazioni: $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_2$, $\Delta\nu_3$, $\Delta\nu_4$, $\Delta\nu_5$, e delle quali: $\Delta\nu_1$, si presentava eccitata dalla riga e (4358.3 \AA), $\Delta\nu_2$ dalla e e dalla k , le altre tre erano eccitate tanto dalla k quanto dalla riga q . Oltre a queste righe però se ne presentava un'altra molto vicina alla $\Delta\nu_4$ (eccitata dalla riga q) e compresa fra $\Delta\nu_4$ e $\Delta\nu_5$.

(1) La sorgente luminosa era costituita da una lampada di quarzo ad arco di mercurio.

Questa riga non è stato possibile classificarla per non aver potuto eseguire delle esperienze con luce filtrata; essa d'altro canto è completamente assente nello spettro eccitato dalla riga k per cui è molto probabile che rappresenti una delle righe note eccitate da qualche riga secondaria. Le intensità relative sono indicate nel seguente specchietto nel quale i numeri corrispondono alle intensità dell'annerimento della lastra in corrispondenza alle righe. L'apprezzamento è fatto ad occhio, attribuendo l'intensità 10 alla riga Δv_4 dello spettro della riga k .

Riga	Riga ecc.	Intensità	Aspetto della riga	Concentrazione
Δv_1	4358.3	1	stretta	28 %
Δv_2	4358.3	2	diffusa	28 %
	4077.8	2	diffusa	28 %
Δv_3	4046.8	2	diffusa	28 %
	3650.2	2	diffusa	28 %
Δv_4	4046.8	10	stretta	28 %
	3650.2	9	larga	28 %
Δv_5	4046.8	5	larga	28 %
	3650.2	7	larga	28 %

Le esperienze eseguite sulle soluzioni al 21 %, 15 %, 7 % di concentrazione con tempi di posa crescenti in ragione inversa alla concentrazione, non hanno permesso di notare alcuna variazione nella composizione dello spettro, nè nelle intensità relative della righe. Si nota in generale una diminuzione di intensità delle righe Raman e la scomparsa di quelle che cadono nella zona delle bande dell'acqua (che per le soluzioni più diluite acquistano una particolare importanza a causa della lunga posa).

Le righe che si riesce ancora ad osservare ad occhio nudo in soluzione al 7 % sono solamente quelle eccitate dalla riga q , e la riga non classificata.

Poichè nelle soluzioni di ammoniaca non è stato possibile trovare traccia dell'ione NH_4 , sono state adoperate soluzioni di NH_4NO_3 e NH_4Cl ; nelle soluzioni di NH_4NO_3 sono comparse solo le righe dovute allo ione NO_3 , nelle soluzioni di NH_4Cl si notano fortemente marcate le bande Raman dell'acqua e uno spettro continuo nella zona compresa fra 4100 e 4900 Å.

Il complesso delle osservazioni precedenti può riassumersi così:

a) Le soluzioni acquose di sali di ammonio non presentano alcuna riga Raman attribuibile all'ione NH_4 .

b) Le soluzioni acquose di ammoniaca danno uno spettro Raman identico a quello fornito dall'ammoniaca liquida.

Tutto ciò autorizza a pensare che l'ammoniaca in soluzione acquosa si trovi in parte allo stato di NH_3 e in parte allo stato di NH_4OH , ossia che la reazione:



sia retta da equilibrio.

La mancanza di mezzi adatti non ha permesso di approfondire l'esame, cosa però che spero poter fare molto presto.

Chimica. — *Viscosità delle miscele di tetracloruro di stagno con idrocarburi aromatici* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ di F. DE CARLI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Nel presente lavoro rendo noti i risultati ottenuti nello studio delle isoterme di viscosità a 20° e a 30° delle miscele di m·xilolo e pseudo-cumolo con cloruro stannico. Le modalità delle esperienze sono state descritte in una Nota ⁽³⁾ precedente. Mi limito perciò a riassumere qui i nuovi risultati ottenuti.

a) m·xilolo-cloruro stannico.

Nella tabella I sono riportati i valori d_{20° e di η a 20° e a 30°.

TABELLA I.

m·xilolo %	d_{20°	Trovato η_{20°	Calcolato η_{20°	Trovato η_{30°	Calcolato η_{30°
—	2.2295	0.01045	—	0.00812	—
19.46	1.6890	0.00915	0.00872	0.00710	0.00706
49.02	1.2794	0.00943	0.00736	0.00636	0.00620
58.25	1.1810	0.00793	0.00709	0.00614	0.00602
67.97	1.0590	0.00767	0.00684	0.00590	0.00586
100.00	0.8622	0.00627	—	0.00549	—

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1931.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XIV, serie 6ª, fasc. 3-4, p. 120, 1931.

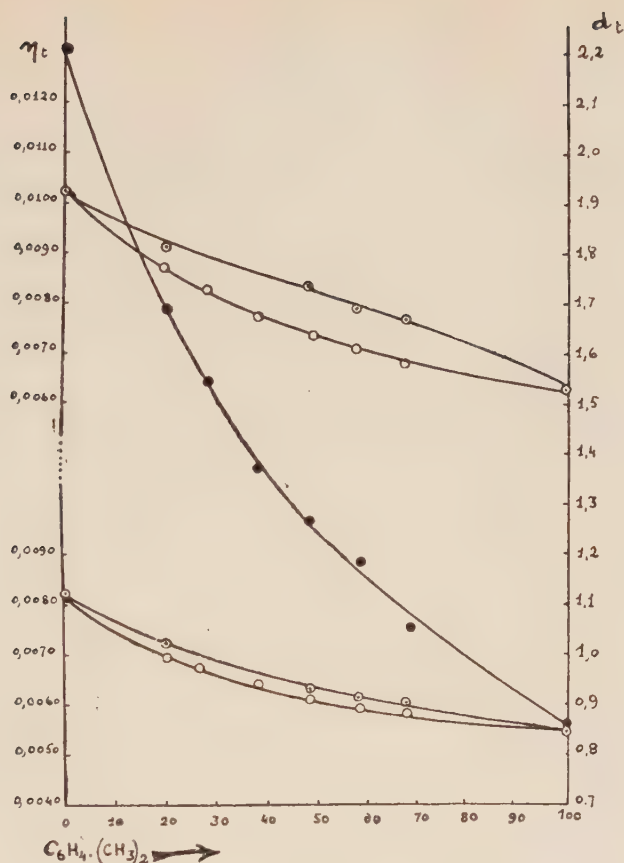


Fig. 1.

In queste soluzioni si osservano fenomeni analoghi a quelli descritti nella Nota precedente. Il notevole aumento di volume conferma l'azione dissociante degli idrocarburi aromatici verso il tetracloruro di stagno.

La curva sperimentale a 20° pur non presentando un massimo ben definito, che generalmente denota l'esistenza di complessi di una certa stabilità, possiede un andamento che mette in rilievo la tendenza alla formazione di associazioni fra le molecole dei componenti. Tali associazioni debbono essere però molto instabili, perchè già a 30° la viscosità assume un andamento molto prossimo al teorico.

Il calcolo delle differenze percentuali porta a stabilire che la maggiore divergenza si verifica nelle miscele contenenti da 40 a 50 % di m. xilolo, corrispondenti a 2 molecole di questo composto per una di tetracloruro (tabella II, fig. 2).

TABELLA II.

m. xilolo o/o	20°		30°	
	Differenza	Differenza o/o	Differenza	Differenza o/o
19.46	+ 0.00043	4.92	+ 0.00004	0.56
49.02	0.00207	28.10	0.00016	2.57
58.25	0.00084	11.85	0.00011	1.83
67.97	0.00082	11.80	0.00037	0.63

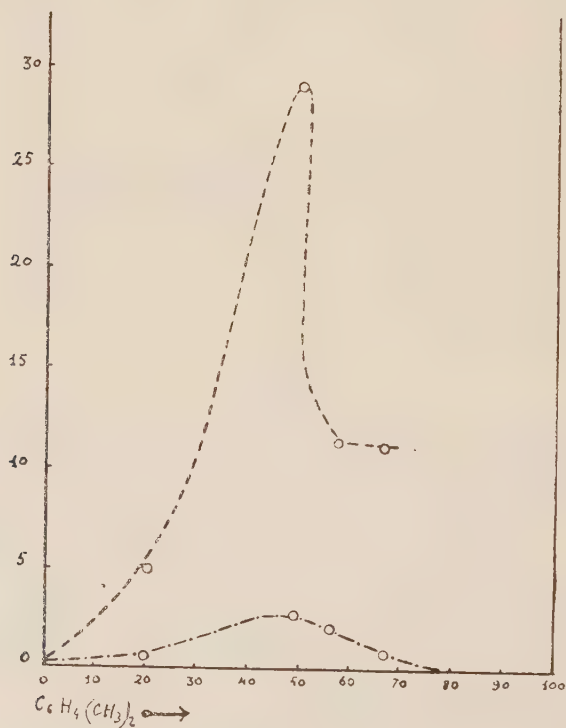


Fig. 2.

b) *Pseudocumolo*.

Nella tabella che segue sono riuniti i valori di η a 20° e 30° e di d_{20} .

TABELLA III.

Pseudo- cumolo %	d_{20°	Trovato η_{20°	Calcolato η_{20°	Trovato η_{30°	Calcolato η_{30°
—	2.2295	0.00104	—	0.00810	—
18.60	1.7231	0.00961	0.01024	0.00812	0.00831
29.13	1.5281	0.00933	0.01028	0.00789	0.00839
38.84	1.3787	0.00886	0.01020	0.00768	0.00849
49.12	1.2638	0.00873	0.01023	0.00758	0.00851
66.04	1.1041	0.00861	0.01019	0.00745	0.00859
79.73	1.0011	0.00878	0.01015	0.00747	0.00864
89.29	0.9401	0.00888	0.01012	0.00766	0.00868
100.00	0.8786	0.01011	—	0.00812	—

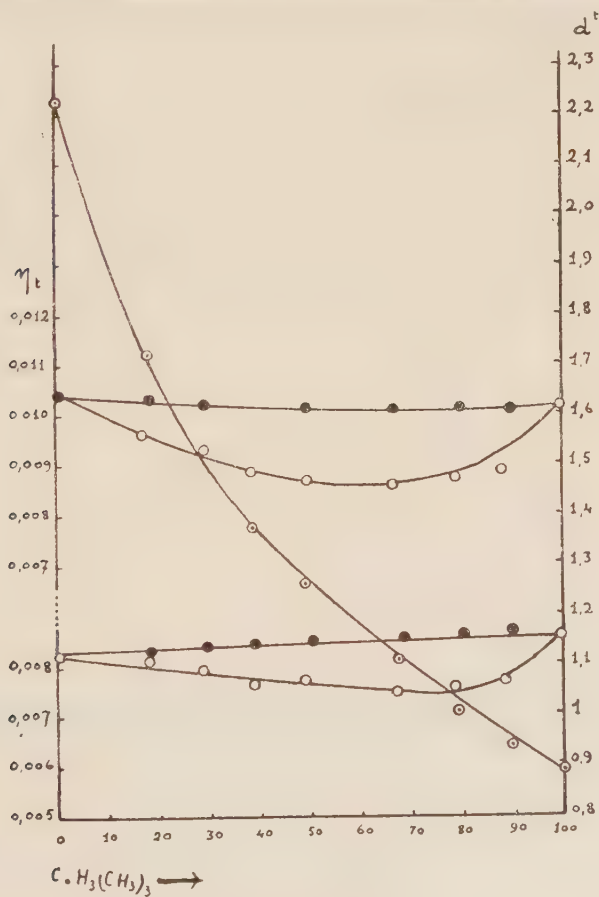


Fig. 3.

TABELLA IV.

Pseudo-cumolo %	20°		30°	
	Differenza	Differenza %	Differenza	Differenza %
18.60	— 0.00073	7.06	— 0.00018	2.16
29.13	0.00095	9.24	0.00050	5.95
38.84	0.00139	13.56	0.00091	10.72
49.12	0.00150	14.67	0.00093	10.92
66.04	0.00158	15.50	0.00113	13.14
79.73	0.00137	13.50	0.00117	13.53
89.29	0.00124	12.27	0.00101	11.63

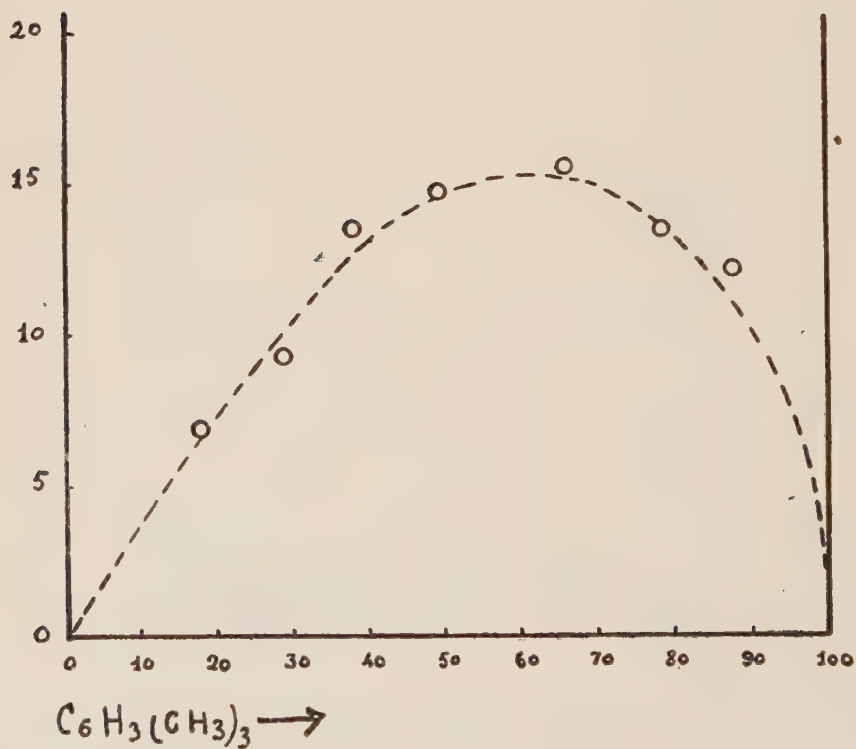


Fig. 4.

In queste soluzioni si osserva un fenomeno già rilevato precedentemente nelle soluzioni di nitrobenzolo in monocloruro di zolfo ⁽¹⁾: la viscosità trovata è cioè inferiore a quella teorica e la divergenza tra i due valori diminuisce col crescere della temperatura. Nel caso sopra ricordato si mise in evidenza con l'analisi termica il composto $C_6H_5NO_2 \cdot S_2Cl_2$ e si verificò poi colla viscosità, che il valore minimo si raggiunge nelle miscele di composizione molto prossima ad esso.

Osservando le due curve sperimentali a 20° e a 30° appare evidente che la differenza con il teorico è minore in questa ultima che nella prima; e calcolando il valore percentuale di tale differenza, si trova che il massimo scarto è limitato alle soluzioni di composizione prossima a $2[C_6H_5(CH_3)_3 \cdot SnCl_4]$.

Nella tabella IV e nel diagramma 4 sono riportati appunto i risultati di questi calcoli.

Ricollegando questi risultati con le considerazioni svolte nella precedente Nota nei riguardi delle ipotesi relative alla costituzione attribuibile a questo genere di complessi, si può concludere affermando che, a temperature prossime all'ordinaria, gli omologhi del benzolo mostrano chiaramente attitudine ad associarsi al cloruro stannico. Dette associazioni sono però rivelabili solo allo stato liquido, e già a 30° si distruggono quasi completamente. Esse si comportano in maniera analoga ai composti degli stessi idrocarburi con l'anidride solforosa.

Resta pertanto confermato che alla maggiore stabilità dei complessi con i derivati degli idrocarburi aromatici, devono contribuire notevolmente i gruppi sostituenti uniti all'anello benzenico.

(1) « Gazz. chim. ital. », 59, 502 (1929).

Chimica (Chimica fisiologica). — *Sul quoziente beri-berico (Qb) nell'alimentazione con riso brillato e grano autoclavato* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. FAMIANI, presentata dal Corresp. S. BAGLIONI.

Con ripetute ricerche sperimentali dirette a indagare il valore fisiologico del fattore B nel Colombo, G. Amantea ⁽³⁾, ⁽⁴⁾, ⁽⁵⁾ ha confermato il fatto fondamentale della indispensabilità di detto fattore pel normale svolgimento dei processi metabolici, ed il concetto della sua natura esogena, precisando che l'animale, il quale va necessariamente incontro ad una quotidiana usura o riduzione del fattore stesso, lo assume continuamente dall'esterno con l'alimento, e di regola, non solo per riparare l'usura suddetta, ma anche per costituirne e mantenerne una certa riserva — limitata da condizioni interne —, e atta a proteggerlo, entro determinati limiti, dagli effetti di una eventuale alimentazione incongrua.

Ma soprattutto G. Amantea ha posto e ben fissato il concetto, che detta usura del fattore B è in diretto rapporto sicuramente coi processi catabolici dell'organismo, in quanto essa si verifica « in misura ben definita e proporzionale all'entità del consumo complessivo », includendo nel significato di *consumo complessivo*, oltre la quantità di alimento effettivamente elaborata dall'animale, anche la quantità di tessuti consumati come naturale conseguenza della ipoalimentazione coincidente con la fase del vomito. Pertanto egli ha sostenuto anche in base ad altre osservazioni personali ⁽⁶⁾, che il fattore B interviene non soltanto nell'elaborazione e nel metabolismo dell'alimento ordinario ingerito, ma anche quando l'animale sia costretto a vivere a spese dei propri tessuti, trovandosi in condizioni di ipoalimentazione, o di inanizione.

Egli ha potuto stabilire che Colombi adulti, normali, alimentati con riso brillato partendo da condizioni di massima riserva in fattore B, non presentano segni di beri-beri prima di avere consumato del riso brillato e dei propri tessuti insieme, una quantità corrispondente almeno al 70 % del proprio peso iniziale, indipendentemente dalla dose quotidiana somministrata: dosi maggiori o minori di quella media da lui di solito usata (30 gr.) acce-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma. All'esecuzione delle presenti esperienze ha collaborato anche l'allievo interno B. Tafuri.

(2) Pervenuta all'Accademia l'8 settembre 1931.

(3) G. AMANTEA, *Ricerche sperimentali sul cosiddetto beri-beri dei Colombi*. « Rivista di Biol. », vol. IV, fasc. 4^o, 1922.

(4) G. AMANTEA, *Sul valore fisiologico del fattore B. I Problemi della Nutrizione*, 1924, A. I.

(5) G. AMANTEA, *Ulteriore contributo alla conoscenza del fattore B*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. I, fasc. 3^o, 1926.

(6) G. AMANTEA, *Avitaminosi e inanizione*. « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. Sper. », vol. I, fasc. 5^o, 1926; *Sull'azione del fattore B nei suoi rapporti coll'inanizione*. Ibidem, vol. II, fasc. 2^o, 1927.

lerano o rispettivamente ritardano la comparsa dei sintomi beri-berici, senza peraltro far variare il risultato finale.

Ed indicando con P il peso corporeo iniziale dell'animale, e con C il consumo complessivo (alimento cioè effettivamente elaborato — calcolato detraendo dalla quantità totale somministrata la quantità vomitata —, più il peso corporeo perduto, dall'inizio dell'alimentazione disadatta alla comparsa dei primi segni beri-berici), ha stabilito che il valore del rapporto $\frac{C}{P}$ può essere assunto come indice indiretto, ma sufficientemente esatto, per la valutazione della riserva, che l'animale possiede in fattore B .

Tale valore ha indicato con Qb (quoziente beri-berico o quoziente pel fattore B), e, nelle sue ricerche su colombi adulti diversi, normali e sorpresi in condizioni di massima riserva in fattore B , ha trovato che esso varia entro limiti oscillanti tra 0.70 e 1; ma che per uno stesso animale, a parità di altre condizioni, il detto valore presenta oscillazioni solo assai ristrette.

Successivamente G. Zanghi⁽¹⁾, tenuto presente che le osservazioni di G. Amantea si riferivano più specialmente ad animali sorpresi in condizioni di massima riserva, o a tale stato condotti con la somministrazione preparatoria di appropriate dosi di lievito di birra, ha ricercato il valore del Qb per colombi sorpresi nelle più svariate condizioni di vita e alimentazione libera, e su 29 animali esplorati con la tecnica di G. Amantea ha trovato, che il valore del Qb oscilla tra 0.43 e 0.86, risultando, in media pari a 0.66.

Risulta dunque da quanto precede, che si può utilizzare il metodo della determinazione del Qb come un ottimo criterio di valutazione — sebbene indiretta — della riserva di un animale in fattore B (o almeno di quella parte di essa, che si usura dall'inizio della alimentazione con alimento privo di fattore B alla comparsa dei primi fenomeni beri-berici).

Ma, a parità di animale, e partendo sempre da condizioni di riserva massima — ciò che è possibile facendo precedere ciascuna esperienza dalla somministrazione, per 3 o 4 giorni, di un alimento molto ricco in fattore B , come ad esempio, somministrando all'animale 2 gr. di lievito di birra oltre la razione ordinaria —, si possono ottenere valori diversi pel Qb , a seconda che si esperimenti con alimenti più o meno poveri, o più o meno ricchi in fattore B : in tal caso Qb diviene anche criterio (indiretto) di misura del contenuto che in fattore B possono avere alimenti diversi.

Partendo appunto da tali fatti, e precisamente valendoci della determinazione del Qb , abbiamo voluto istituire opportune esperienze, dirette a rivedere un argomento già da altri trattato — seguendo la comune tecnica sperimentale secondo noi disadatta, o, per lo meno, tale da esporre facilmente a errori —, ma che a noi interessava rivedere per la connessione con altre ricerche che ci proponiamo.

(1) G. ZANGHI, *Sul quoziente beri-berico e sulla riserva in fattore B nei colombi normali* « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. II, fasc. 2^o, 1927.

Intendiamo riferirci alla questione, relativa al comportamento, nei riguardi del beri-beri sperimentale del colombo, dei seguenti alimenti: riso brillato e lavato, grano autoclavato a secco, grano autoclavato a umido, e grano autoclavato in presenza di alcali.

Sarebbero risultate differenze, ed eventualmente in che senso, nei valori del Q_b , sperimentando comparativamente coi suddetti alimenti a parità di animale e di riserva in fattore B? E, subordinatamente, si sarebbero osservate differenze nei riguardi della sintomalogia beri-berica?

Tale lo scopo delle esperienze, che abbiamo eseguito e che qui brevemente riferiremo.

Abbiamo sperimentato su due colombi, maschi, adulti, in buone condizioni di nutrimento, e tenuti preventivamente in osservazione, ad alimentazione libera, mista di grano e granturco.

Allo scopo di ottenere risultati comparabili siamo partiti da condizioni di riserva presumibilmente massima in fattore B, preparando prima di ciascuna esperienza ogni animale con la somministrazione di 2 gr. pro die di lievito di birra granulare sciolto in acqua, in aggiunta all'alimento ordinario (gr. 30 di granturco, che si imbeccavano); ciò per 4 giorni consecutivi. In quinta giornata si iniziava la somministrazione esclusiva dell'alimento che si voleva provare e che fu sempre somministrato per imbeccamento nella dose di 30 gr., in una sola volta, di 24 ore in 24 ore, lasciando acqua a volontà; detta dose venne raramente diminuita, nei giorni in cui gli animali presentarono rilevante residuo della razione precedente nel gozzo. Così fino alla comparsa dei primi segni beri-berici.

Iniziatasi la fase del vomito, l'alimento vomitato era accuratamente raccolto e pesato per tenerne conto nel calcolo del Q_b .

Per tutta la durata dell'esperimento fu tenuto conto quotidianamente del peso dell'animale, della temperatura rettale, della temperatura ambiente e del consumo dell'acqua.

Appena accertati i primi sintomi, netti, beri-berici si somministrava una dose sicuramente curativa di lievito di birra granulare (gr. 2 stemperato in acqua), si calcolava il Q_b e l'animale veniva lasciato ad alimentazione libera, mista di grano e granturco, per un periodo di tempo variabile, ma che non fu mai minore di 12 giorni. Dopo tale sosta si ricominciava una nuova prova esattamente seguendo la stessa tecnica.

Come è stato accennato, si sperimentò con riso brillato e lavato, grano autoclavato a secco, grano autoclavato a umido, e grano autoclavato in ambiente alcalino.

In tutte le esperienze con alimento autoclavato, questo fu tenuto in autoclave per un'ora a 2, 5 atmosfere; l'ambiente umido e l'ambiente alcalino furono realizzati mettendo in una capsula di porcellana l'alimento rispettivamente con acqua distillata e con soluzione al 20 % di carbonato di sodio

e lasciandovelo per 10' minuti, passati i quali si decantava la maggior parte di liquido e la capsula veniva messa in autoclave, con l'alimento più il residuo del liquido.

I risultati ottenuti sono schematicamente riassunti nella Tabella seguente :

Animale n°	Exp. n°	Alimento usato	Temperatura ambiente durante l'esperienza	Quantità di alimento effettivamente elaborata in grammi	Peso perduto in grammi	Qb	Percentuale peso perduto	Tempo impiegato per arrivare al beri-beri in giorni
I	1	Riso brillato e lavato . .	21°-22° C.	320	90	0.90	21 %	20
	2	Grano autoclavato a secco	25°-29° C.	269	95	0.98	26	23
	3	Grano autoclavato ad umido	19°-21° C.	294	20	0.89	5.7	15
	4	Grano autoclavato in ambiente alcalino.	24°-28° C.	286	68	0.99	19	23
II	1	Riso brillato e lavato . ,	21°-22° C.	442	40	0.98	8.1	18
	2	Grano autoclavato a secco	20° C	451	55	1	11	25
	3	Grano autoclavato ad umido	19°-21° C.	434	40	1.1	9.9	18

L'indole di questi prolungati esperimenti, che esigono assiduità e pazienza, non ha permesso di estenderli finora ad un maggior numero di animali.

Nessuna differenza sostanziale fu osservata, nei riguardi della sintomatologia beri-berica nei vari casi.

Le differenze tra i valori trovati pel Qb restano nei limiti di errore, cui il metodo espone.

Tenendo tutto ciò presente, ci sentiamo comunque autorizzati, in base ai risultati riferiti, a richiamare l'attenzione sui seguenti principali fatti:

1° Il quoziente beri-berico (Qb) non presentò sostanziali variazioni, in opportune esperienze comparative, eseguite sui medesimi animali da esperimento (colombi) con riso brillato e lavato, grano autoclavato a secco, grano autoclavato a umido, e grano autoclavato in presenza di alcali.

2° Nelle stesse esperienze non risultarono differenze apprezzabili per ciò che concerne la sintomatologia beri-berica, presentata dagli animali nelle varie prove.

3° Il grano autoclavato per un'ora a 2,5 atmosfere (a secco, a umido, o in ambiente alcalino) diede effetti corrispondenti a quelli osservati (a parità di animale e di riserva in fattore B) col riso brillato e lavato.

Chimica (Chimica fisiologica). — *Sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B nel colombo*⁽¹⁾.
Nota ⁽²⁾ di G. AMANTEA e V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È ormai indiscutibilmente accertato e noto a tutti coloro, che si sono occupati di indagini sul beri-beri sperimentale dalle prime classiche osservazioni di C. Eykmann e di C. Funk in poi, il fatto, che i fenomeni beri-berici o a tipo polineuritico, presentati dal colombo sottoposto a dieta deficiente o priva del fattore (o vitamina) B, con prontezza del tutto regrediscono, se si interviene in tempo somministrando in quantità sufficiente alimenti o comunque sostanze (lievito di birra, estratti di crusca, ecc.), capaci di esplicare sicura efficacia curativa, appunto perchè contenenti in alta proporzione il suddetto fattore B, esogeno e indispensabile all'animale.

In altri termini, si è concordi nel riconoscere, che, al loro primo manifestarsi, i fenomeni del beri-beri sperimentale, per quanto imponenti, devono essere ancora sostenuti da lesioni, come suole anche dirsi, reversibili.

Ma, da quello che ci risulta, nessuno fino adesso si è proposto di eseguire positive e risolutive indagini, dirette a confermare o ad escludere la possibilità, che le suddette lesioni, sotto l'azione della medesima causa nociva, procedano oltre la fase di reversibilità, fino ad altra di grado più avanzato, e che presumibilmente corrisponde per le fibre nervee a un vero e completo stato degenerativo, tale da resistere per conseguenza anche al più energico trattamento curativo.

Sono state eseguite, è vero, esperienze, che potrebbero considerarsi come tentativi diretti appunto a tale scopo: così, ad es., quelle riferite da R. Reitano⁽³⁾, il quale si è proposto di riportare uno stesso colombo più volte di seguito al beri-beri sperimentale, e precisamente iniziando la nuova prova poco dopo ottenuta la completa guarigione dei disturbi indotti dalla precedente, nell'intento di accertare, se per caso ciascuna volta rimanessero tracce durevoli, da rivelarsi solo per la successiva sommazione di effetti, ovvero — come egli stesso si esprime — se fosse possibile in tal guisa

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Messina e nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1931.

(3) R. REITANO, *Sulla reversibilità delle alterazioni anatomo-patologiche nel cosiddetto beriberi sperimentale dei colombi*. « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. sper. », vol. II, fasc. 7°, p. 753, 1927; ID., *Sulla reversibilità delle alterazioni nel cosiddetto beriberi sperimentale dei colombi*. Nota II; Ibid., vol. III, fasc. 7°, p. 960, 1928.

« fissare negli organi dello stesso animale alterazioni più evidenti e durature di quelle che si osservano nei colombi dopo un unico attacco beri-berico ». Queste esperienze coincidono, nell'impostazione e nei risultati, con numerose altre, che noi stessi — prima e dopo — abbiamo potuto eseguire, ma che non hanno, come le stesse del Reitano, mai permesso di osservare alcun accenno a sommazione di effetti; sicchè a tutte, nel loro complesso, rimane il semplice valore di avere fornito forse la più decisiva conferma del noto fatto della completa reversibilità delle lesioni beri-beriche al loro insorgere. E incidentalmente ricordiamo, che appunto la diretta constatazione di tale fatto fondamentale suggerì a uno di noi (G. Amantea)⁽¹⁾ fin dal 1922 la proposta della tecnica, che è stata poi sempre con vantaggio adottata nel nostro laboratorio, e che ha lo scopo di eliminare il fattore individuale, in ricerche comparative, salvando il colombo all'inizio dei disturbi e ripetendo sul medesimo animale le esperienze.

Comunque a noi interessa qui di richiamare l'attenzione specialmente su una particolare condizione sperimentale, che abbiamo potuto bene identificare, e che permette di ottenere nei colombi appunto disturbi beri-berici durevoli, che persistono per lungo tempo, anche se si sottopongono gli animali a un energico e protratto trattamento con lievito di birra, associato alla alimentazione mista e libera ordinaria.

Queste nostre nuove osservazioni sono in intimo nesso con altre in precedenza comunicate da uno di noi (G. Amantea)⁽²⁾. In quell'occasione, discutendo circa l'azione del fattore B nei suoi rapporti coll'inanizione, fu illustrato il caso di un colombo, il quale, oltre ad essere arrivato ai disturbi beri-berici col peso corporeo invariato (fornendo una nuova prova a favore del concetto — già sostenuto⁽³⁾ — dell'indipendenza dei fenomeni di denutrizione, che sogliono osservarsi, dalla vera e propria azione del fattore B), aveva anche permesso di assistere alla ripresa dei disturbi — che erano scomparsi con una blanda cura — per effetto del solo digiuno (confermando ancora l'altro concetto, prima enunciato⁽⁴⁾, che l'usura del fattore B deve verificarsi anche in coincidenza coi ridotti processi metabolici, che nelle condizioni di digiuno si svolgono a spese dei tessuti).

Ma, per ciò che concerne questo raro caso, se fu riferito che i disturbi beri-berici, ripresentatisi già nella prima giornata di digiuno, si erano visti accentuare con graduale relativa lentezza fino alla sesta giornata, in cui la

(1) G. AMANTEA, *Ricerche sperimentali sul cosiddetto beri-beri dei colombi*. « Rivista di Biologia », vol. IV, fasc. 4^o, 1922,

(2) G. AMANTEA, *Sull'azione del fattore B nei suoi rapporti coll'inanizione*. « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. sper. », vol. II, fasc. 2^o, 1927.

(3) G. AMANTEA, *Avitaminosi e inanizione*. « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. sper. », vol. I, fasc. 5^o, 1926.

(4) G. AMANTEA, loc. cit., *Sul valore fisiologico del fattore B. I Problemi della Nutrizione*, anno I, 1924; ID., *Ulteriore contributo alla conoscenza dell'azione del fattore B*. « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. sper. », vol. I, fasc. 3^o, 1926.

diminuzione del peso corporeo aveva oltrepassato il 20 %, non fu tuttavia riferito il seguito dell'osservazione, che qui appunto assume per noi speciale importanza.

Ebbene, quel colombo fu tenuto ancora a digiuno completo (con sola acqua a volontà) per due giorni, e poi, siccome i disturbi si mostravano ormai stazionarii, senza alcuna apprezzabile tendenza a un'ulteriore accentuazione, esso fu rimesso ad alimentazione ordinaria (mista, libera), aggiungendo la somministrazione quotidiana di 1-2 gr. di lievito di birra granulare « Erba » durante la prima settimana.

Allora assistemmo al regresso di una parte soltanto — e della minor parte — dei netti fenomeni paretici, che, interessando gli arti inferiori, rendevano difficile la deambulazione. I rimanenti, resistendo all'azione del nuovo e appropriato regime, si mantennero fissi e invariabili durante tutto il periodo di ricupero del peso perduto dall'animale nel digiuno, e più oltre ancora; solo fra il terzo e il quarto mese di vita e alimentazione libera si annunciò un deciso miglioramento progressivo, fino alla guarigione, completa al quinto mese.

Fondandoci sulle nostre precedenti ricerche e conclusioni ⁽¹⁾, ritenemmo di poter dare la seguente spiegazione dei fatti osservati e sopra descritti: i primi disturbi indotti dall'alimentazione orizantica avevano ceduto al blando trattamento curativo, perchè sorpresi nella nota fase di reversibilità; ma i medesimi erano ricomparsi, non appena il digiuno successivo, determinando l'usura del piccolo eccesso di fattore B, arrecato dall'alimento curativo, aveva riportato il colombo al grado di squilibrio vitaminico incompatibile collo stato normale; nei giorni seguenti, continuando l'usura del fattore B (di riserva interna) per le esigenze metaboliche, il suddetto stato di squilibrio vitaminico si era accentuato, e corrispondentemente le lesioni beri-beriche, evolvendo verso un grado di maggiore gravità, erano divenute resistenti ai mezzi curativi. Comunque, oltre che il grado di squilibrio interno vitaminico, a noi parve meritevole di attenzione anche la maggior durata dell'azione della causa primaria e determinante dei disturbi beri-berici (deficienza del fattore B), cui l'animale non alimentato potette rimanere esposto relativamente a lungo, soprattutto perchè protetto appunto dallo stesso stato di digiuno contro la più grave complicazione, che di regola minaccia i colombi, nei quali si continui l'alimentazione orizantica dopo la comparsa dei disturbi: intendiamo riferirci al pericolo dell'intossicazione di origine alimentare (digestiva), su cui abbiamo avuto occasione di fermarci più volte altrove ⁽²⁾.

Infatti, per ciò che concerne l'esito, in caso di mancato disadatto o ritardato intervento curativo, generalmente oggi si ammette, senza più oltre discutere, che le condizioni dell'animale in tal caso si aggravano e preci-

(1) G. AMANTEA, loc. cit.

(2) G. AMANTEA, loc. cit.

pitano, sicchè la regola è la morte nel giro di 1-2 giorni. Questo è vero; ma noi riteniamo, che in tal caso il rapido aggravamento e la morte non dipendono tanto dalla deficienza del fattore B, quanto invece da altre cause concomitanti, e particolarmente dalla denutrizione (frequente nei colombi, cui si lascia assumere liberamente il riso e lo rifiutano, o in quelli imbeccati, che lo vomitano in grande quantità), e dall'intossicazione suaccennata (frequente nei colombi, che continuano ad assumere o a ricevere riso ancora dopo l'esplosione dei disturbi beri-berici, e specie quando questi interessano anche la motilità dell'ingluvie).

Per potere convenientemente studiare i reali effetti diretti della privazione del fattore B, in condizioni di massimo rigore sperimentale, occorrerebbe poter proteggere l'animale, almeno a sindrome beri-berica conclamata, contro il pericolo dell'intossicazione, e poterlo insieme sostenere contro gli inconvenienti della denutrizione; ma ciò è difficilissimo ad attuare in modo completo, anzi quasi inattuabile.

Tuttavia il caso riferito ci aveva in effetti indicato una via da seguire, inducendoci a considerare, che, se non è facile ovviare contemporaneamente al doppio ordine di complicazioni possibili (denutrizione e intossicazione), anche il potere difendere l'animale contro il solo pericolo dell'intossicazione — e sia pure per un limitato periodo utile, nonchè sfidando gli stessi effetti del necessario digiuno — può offrire l'opportunità di raccogliere dati nuovi. Difatti, il sospendere al colombo l'alimento (lasciandolo con sola acqua a volontà), non appena comparsi i fenomeni beri-berici netti da alimentazione orizantica, avrebbe potuto servire a prolungargli la sopravvivenza, pur lasciandolo sotto l'azione continua, anzi crescente, della causa principale (deficienza del fattore B), della quale precisamente si vogliono conoscere gli effetti diretti. In tali condizioni sperimentali abbiamo creduto utile di estendere le nostre osservazioni.

È ovvio, che meglio si prestano a tal genere di esperimenti quei colombi, che giungono ai disturbi col peso iniziale solo di poco diminuito, o addirittura invariato, come nel nostro caso precedente. La perdita di peso durante l'alimentazione orizantica per solito non è mai eccessiva, seguendo la tecnica da noi adottata, cioè imbeccando gli animali con quantità di riso quotidianamente proporzionate ai bisogni, nonchè regolate per prevenire dannosi sovraccarichi dell'apparato digerente. Abbiamo pertanto approfittato degli animali, che, così preparati, ci hanno finora offerto le condizioni più adatte nel senso anzidetto, per eseguire le nuove osservazioni.

Ne abbiamo potuto condurre già a termine cinque, su cinque colombi diversi; e in tutti i casi, costantemente, ci è stato possibile ottenere fenomeni beri-berici durevoli, analoghi a quelli, che per la prima volta avevano richiamato la nostra attenzione. In ogni prova fu sospeso all'animale l'alimento, all'esplosione dei disturbi, somministrandogli soltanto acqua a sufficienza; lo stato di digiuno fu mantenuto per 2-5 giorni e non oltre, anche

allo scopo di limitare alquanto la complicazione dovuta all' inanizione; quindi seguì la rialimentazione (con grano, granturco e orzo), aggiungendo per 3-7 giorni a tale dieta gr. 1, 5-2 di lievito di birra di accertata attività. In tutte le esperienze si osservò una parziale guarigione dei disturbi; ma sempre la parte, che rimase e si rivelò resistente al trattamento curativo, fu rilevante. Finora abbiamo visto sempre regredire i disturbi a tipo cerebellare, e permanere paresi a carico degli arti inferiori e delle ali. Queste ultime, in quattro casi, sono lentamente guarite e scomparse dopo 2-4 mesi; ma, in un quinto colombo, che è tuttora in osservazione, persiste ancora da 4 mesi la paralisi quasi completa degli elevatori delle ali.

Ritorniamo sull'argomento, non appena avremo raccolto dati più numerosi.

A noi interessava soprattutto qui segnalare questa nuova condizione sperimentale, e richiamare l'attenzione sui risultati, che se ne possono attendere; non vogliamo perciò dilungarci a specificare tutta la serie di quesiti e di problemi, che si offrono ad essere così studiati.

Un semplice rilievo crediamo utile aggiungere: i disturbi durevoli e resistenti ai mezzi curativi, come si riesce a ottenerli sperimentando nelle condizioni proposte, sono risultati finora spontaneamente guaribili entro limiti di tempo, che possono bene accordarsi coll'ipotesi di processi rigenerativi di fibre nervee, le cui lesioni avevano potuto evolvere verso uno stadio di vera e completa degenerazione, pel prolungarsi dell'azione della causa nociva (squilibrio interno vitaminico, deficienza del fattore B) compatibilmente colla vita dell'animale.

Tenendo ciò presente, e d'altra parte considerando lo stato attuale dell'anatomia patologica del beri-beri sperimentale del colombo, quale risulta dalla recente e interessante pubblicazione di R. Reitano ⁽¹⁾, la quale appunto ci ha deciso ad anticipare la comunicazione delle ricerche suesposte, noi crediamo, che andrebbero vantaggiosamente riveduti dal nuovo punto di vista tutti i dati anatomo-patologici finora acquisiti; ed esprimiamo la convinzione, che da un tale lavoro di utile revisione risulterebbero senza dubbio integrate, su una base più sicura e positiva, le attuali nostre conoscenze sul discusso argomento.

(1) R. REITANO, *Le alterazioni del sistema nervoso centrale e periferico nelle avitaminosi sperimentali*. « Archivio ital. di anat. e istologia patol. », anno II, n. 2, 1931.

Chimica (Chimica fisica). — *Soluzioni solide fra gli alogenuri alcalini* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

La miscibilità degli alogenuri di potassio allo stato solido è stata oggetto di ricerche da parecchio tempo ⁽³⁾. Amadori e Pampanini hanno studiato i sistemi KCl—KBr, KCl—KI, KBr—KI preparando le miscele per cristallizzazione da soluzioni acquose a 25° e determinando la composizione dei cristalli misti mediante metodi analitici. Essi hanno stabilito che mentre per il sistema KCl—KBr si ha una miscibilità completa, gli altri due sistemi presentano una lacuna di miscibilità verso il centro. Mediante l'analisi termica, pure fatta dai suddetti autori, si osserva che il sistema KCl—KBr presenta ancora una miscibilità completa; lo stesso deve dirsi per il sistema KBr—KI mentre per il sistema KCl—KI permane la lacuna di miscibilità, cioè si ha una miscibilità completa solo agli estremi del sistema, cioè per miscele povere di uno dei due componenti.

Fino ad ora non mi risulta sia stato studiato röntgenograficamente il sistema KCl—KI; i sistemi KCl—KBr e KBr—KI sono stati studiati invece da diversi autori ⁽⁴⁾. Per il sistema KCl—KBr i risultati dell'analisi röntgenografica concordano perfettamente con quelli dell'analisi termica e cioè si ha una miscibilità completa. I due componenti possiedono uguale reticolo e la costante reticolare dei cristalli misti si può calcolare bene additivamente da quella dei componenti. Per il sistema KBr—KI che è stato studiato da Havighurst, Mack e Blake preparando le miscele per cristallizzazione da soluzioni acquose ⁽⁵⁾, questi autori hanno avuto risultati diversi da quelli dell'analisi termica. Infatti con questa Amadori, Pampanini, Ruff e Plato ⁽⁶⁾ hanno trovato una miscibilità completa e le curve di solidificazione non presentano nessun arresto al di sotto della temperatura di solidificazione. Con l'analisi röntgenografica invece i suddetti autori hanno stabilito che i cristalli misti si formano solo dalle due parti del sistema, cioè da miscele povere di uno dei due componenti; le fotografie delle miscele di mezzo cioè di quelle che contengono notevoli quantità di entrambi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1931.

(3) RUFF e PLATO, «B. dt. chem. Ges.», 36, 2357 (1903); AMADORI e PAMPANINI, «Rend. Lincei» (5) 20, II, 473 (1911); (5) 20, II, 572 (1911).

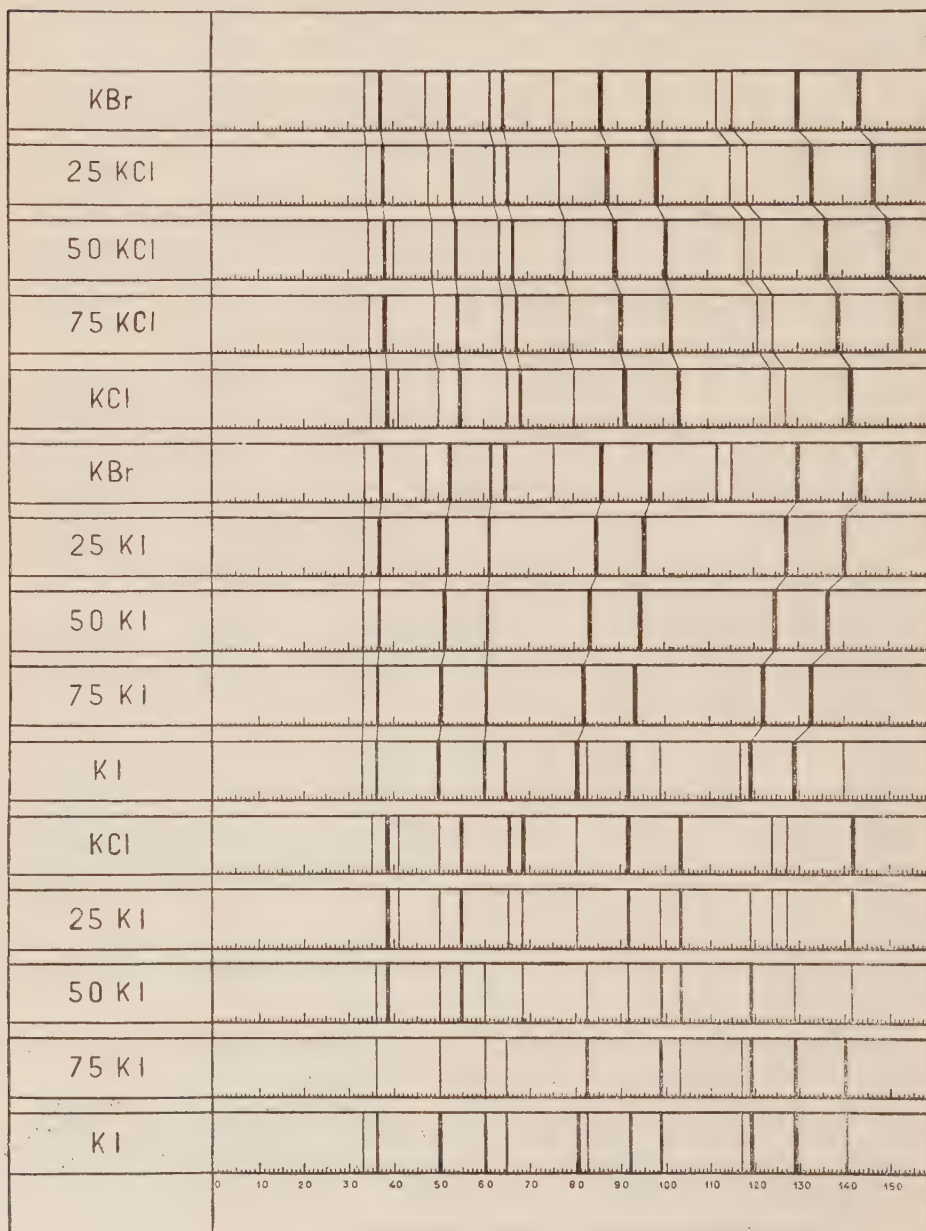
(4) HAVIGHURST, MACK e BLAKE, «Journ. Amer. Chem. Soc.», 47, 29 (1925); L. VEGARD e Th. HAUGE, «Ztschr. Physik.», 42, 1-14; TASHIWO SASAHARA, «Scient. Papers. Inst. Phys. Chem. Res.», 2, 277; TAMMANN, «Ann. der Physik» (4) 79, 81.

(5) Loc. cit.

(6) Loc. cit.

i componenti, mostrano invece nettamente le linee dei due reticoli come fasi separate. Questi risultati concordano quindi con quelli ottenuti da Amadori e Pampanini preparando le miscele per cristallizzazione da soluzioni acquose.

Io ho verificato i risultati sia dell'analisi termica che dell'analisi röntgenografica di questi sistemi e mentre per il sistema KCl—KBr i miei



risultati sono identici a quelli dati da altri autori⁽¹⁾, per il sistema KBr—KI concordano solo quelli dell'analisi termica. Con l'analisi röntgenografica eseguita col metodo di Debye sulle miscele ottenute per fusione, ho trovato risultati concordanti con quelli dell'analisi termica e cioè una miscibilità completa. Poichè Havighurst, Mack e Blake trovano invece che questo sistema presenta al centro una lacuna di miscibilità, io ho ricotto per 20 ore la miscela contenente 50 % molecolare dei due componenti prima a 160° poi a 200° per vedere se mi era possibile provocare lo sdoppiamento dei cristalli misti che, presumibilmente per un fenomeno di tempera, si erano conservati inalterati a temperatura ordinaria e la ho successivamente fotografata. Le fotografie sono risultate identiche a quella ottenuta prima dei suddetti riscaldamenti. Ciò sta a dimostrare che lo sdoppiamento dei cristalli misti, che non si ottiene con l'analisi termica come assicurano i risultati röntgenografici neanche dopo notevole ricottura perchè molto lento quando si operi su masse fuse, si realizza invece con tutta facilità quando le miscele vengano ottenute da soluzioni; nel caso della analisi termica siamo quindi in presenza di un falso equilibrio.

Tammann e Krings⁽²⁾ non hanno osservato differenze coi raggi X fra le soluzioni solide ottenute per fusione e per cristallizzazione da soluzioni; lo stesso è stato osservato da Havighurst, Mack e Blake per il sistema KCl—KBr. Ciò non è da ritenere però come generale, perchè nel caso del sistema KBr—KI si verifica appunto il contrario, come probabilmente si verificherà anche in altri casi.

Per il sistema KCl—KI, da me studiato per il primo röntgenograficamente, i risultati concordano con quelli dell'analisi termica: nella figura 1 sono riportati i fotogrammi delle miscele di questi tre sistemi. In questa figura i tratti verticali rappresentano le linee comparse nei fotogrammi; lo spessore di questi tratti corrisponde all'intensità delle linee osservate; la posizione di queste è segnata dalla scala la cui graduazione corrisponde agli angoli θ dei coni di riflessione.

Riassumendo:

a) Viene studiato röntgenograficamente il sistema KCl—KI. I fotogrammi ottenuti col metodo di Debye mostrano per tutte le miscele le linee dei due componenti le une accanto alle altre, cioè allo stato solido non si ha miscibilità neanche parziale fra il cloruro e l'ioduro di potassio.

b) Vengono verificati i risultati termici e röntgenografici ottenuti da altri autori per i sistemi KCl—KBr e KBr—KI stabilendo che effettivamente in tali condizioni si arriva ad un equilibrio metastabile perchè al vero equilibrio si giunge facilmente solo da soluzioni acquose.

(1) Loc. cit.

(2) « Z. Anorg. Allgem. Chem. », 130, 229 (1923).

Chimica (Chimica fisiologica). — *Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di « Lathyrus sativus L. » nei ratti albinì*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

L'uso continuato di un cibo uniforme ed esclusivo non è capace per sè solo, cioè per effetto della ripetizione persistente, prolungata e monotona dello stesso alimento, di esplicare effetti dannosi più o meno evidenti, a patto che l'alimento stesso sia sicuramente completo dal punto di vista della qualità, e venga assunto nella quantità sufficiente a coprire il fabbisogno energetico.

A questa conclusione ci aveva portato una estesa serie di ricerche⁽³⁾, condotte su animali di diverse specie (onnivori, carnivori, erbivori, granivori), ai quali era stato somministrato per lunghi periodi il latte come alimento unico ed esclusivo, ma indubbiamente completo dal punto di vista qualitativo.

Lo studio degli effetti dell'alimentazione esclusiva assai bene, adunque, si presta ad orientare circa il valore effettivo di un dato alimento, poichè l'eventuale comparsa di fenomeni morbosi durante il periodo di alimentazione esclusiva — qualora la quantità assunta risulti sufficiente — è evidentemente da riferire alla deficienza o assenza in esso di uno o più fattori o costituenti necessari, dei quali si può anche tentare in un secondo tempo l'esatta identificazione.

Seguendo tali concetti direttivi, abbiamo potuto già stabilire che la farina di ceci costituisce indubbiamente un alimento incompleto o qualitativamente deficiente pei ratti in via di accrescimento, determinando un rallentamento dello sviluppo generale, che impegna pressochè tutti gli organi ed apparati⁽⁴⁾.

Mentre sono in corso ricerche dirette a precisare alla deficienza o all'assenza di quali costituenti necessari sono da ascrivere gli effetti dannosi osservati appunto con i ceci, abbiamo parallelamente istituito altre esperienze analoghe con semi di *Lathyrus sativus* L.; ed intendiamo riassumere in questa nostra comunicazione precisamente le prime osservazioni con tale alimentazione esclusiva.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma, diretto dal prof. Amantea.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1931.

(3) V. ZAGAMI, *Sugli effetti dell'alimentazione latteica esclusiva*. « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 1926, 1, 228; « Arch. Scienze Biol. », 1927, 9, 379.

(4) V. ZAGAMI, *Su alcuni effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di leguminose nei ratti albinì*. « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1926, 1, 269; « Arch. Scienze Biol. », 1927, 9, 435.

La scelta dei semi di *Lathyrus sativus* L. ci offriva anche la possibilità di tener presente ed indagare quanta importanza essi effettivamente abbiano per la comparsa dei cosiddetti fenomeni di latirismo; di quelli, cioè, da molto tempo conosciuti ed ascritti all'uso continuato, se non esclusivo, dei semi di diverse specie di *Lathyrus*, e caratterizzati da debolezza, paralisi, e deformazione delle gambe, e culminanti in fenomeni di paraplegia spasmodica.

Pei semi di *Lathyrus sativus* ricordiamo tra le ricerche precedenti, quelle di Liotta⁽¹⁾, il quale studiò in due ratti albinì adulti il ricambio azotato durante un periodo di sei settimane di alimentazione esclusiva coi semi suddetti, giungendo ad affermare che «l'alimentazione esclusiva, prolungata per più settimane di farina intera di *Lathyrus sativus* non è causa di speciali alterazioni morbose negli animali adulti (ratti albinì). L'immagazzinamento di azoto che si verifica con l'uso di detta leguminosa, decorre quasi parallelamente al peso del corpo e costituisce, quindi, un indice pressochè sicuro per affermare che il *Lathyrus* contiene delle proteine di alto valore nutritivo».

Successivamente Visco⁽²⁾ con un'altra serie di osservazioni accertava che i ratti adulti, alimentati per quattro mesi esclusivamente con semi di *Lathyrus sativus*, conservano il loro peso e non presentano fatti morbosi di nessun genere; i ratti in periodo di sviluppo crescono più lentamente e meno di quelli alimentati con pane e latte.

Abbiamo adoperato per le presenti ricerche sedici ratti albinì provenienti da due diverse nidiatae. Ciascuna nidiata (all'età di 30 giorni di vita extra-uterina la prima, e all'età di 28 giorni la seconda, cioè circa una settimana dopo lo slattamento nei due casi) è stata divisa in due gruppi — ogni gruppo comprendendo sia maschi che femmine —: il primo è stato alimentato esclusivamente con semi di *Lathyrus sativus* L. — tritati fino allo stato quasi di farina — che si aveva cura di mantenere sempre a disposizione degli animali in quantità esuberante; il secondo (controllo) è stato invece tenuto ad alimentazione variamente mista (alimenti animali e vegetali). All'uno e all'altro gruppo si è tenuta sempre a disposizione acqua.

La farina di semi di *Lathyrus* è risultata sempre assunta in quantità sufficiente a coprire il fabbisogno energetico.

Si tenne conto durante il periodo di esperimento, prolungato per taluni soggetti sino a 150 giorni, del comportamento generale e della vivacità degli animali, della eventuale comparsa di fenomeni morbosi che potessero mettersi in relazione con quelli descritti sotto il nome di «latirismo», delle

(1) D. LIOTTA, *Il ricambio azotato nell'alimentazione esclusiva con semi di «Lathyrus sativus»*. «Arch. Farmacol. e Sc. affini», 1922, 34, 1.

(2) S. VISCO, *Osservazioni sull'alimentazione esclusiva e prolungata dei ratti con semi di «Lathyrus sativus»*. «Arch. Farmacol. e Sc. Affini», 1924, 23, 269.

variazioni del peso del corpo, delle modificazioni dell'ostio vaginale e dell'attività sessuale e procreativa (nelle femmine), della discesa, sviluppo ed attività dei testicoli (nei maschi). Al 60° giorno di esperimento (88-90° giorno di vita) si eseguirono radiografie sia degli animali tenuti ad alimentazione latirica esclusiva, sia dei controlli.

Allo scopo di accertare se gli effetti dannosi dell'alimentazione latirica esclusiva fossero risentiti solo o più marcatamente nel primo periodo di sviluppo, anzichè in un periodo più inoltrato, abbiamo sottoposto a tale alimentazione anche ratti dell'età di 90 giorni tenuti precedentemente ad alimentazione variamente mista.

Dalle nostre esperienze è risultato che fin dall'inizio dell'alimentazione latirica esclusiva i giovani ratti, sia maschi che femmine, presentarono un netto rallentamento dell'accrescimento, rimanendo il loro peso corporeo notevolmente indietro rispetto a quello dei controlli tenuti ad alimentazione variamente mista. Già dopo solo 30 giorni di esperimento, di fronte ad aumenti percentuali medi pari al 101 % del peso iniziale pei maschi e al 107 % per le femmine ad alimentazione latirica, si trovarono aumenti percentuali medi pari al 265 % pei maschi e al 187 % per le femmine di controllo. Dopo 60 giorni di esperimento le differenze risultavano ancora più marcate: di fronte ad aumenti pari al 171 % pei maschi e pari al 162 % per le femmine del primo gruppo, si trovarono aumenti pari al 440 % pei maschi e pari al 290 % per le femmine del secondo gruppo. Dopo 150 giorni di esperimento, infine, le differenze erano ancora del seguente tenore: 273 % pei maschi e 187 % per le femmine del primo gruppo; 690 % pei maschi e 450 % per le femmine del secondo gruppo.

È risultato, inoltre, nettamente evidente un più lento sviluppo dello apparato genitale dei ratti del primo gruppo in confronto a quello del secondo gruppo. Mentre nelle femmine di controllo la schiusura dell'ostio vaginale è avvenuta in generale verso il 53° giorno di vita e verso 87-90° giorno di vita si è verificato il primo parto, nelle femmine del primo gruppo invece la schiusura dell'ostio vaginale si è verificata tra il 107° e il 135° giorno di vita. Anche la discesa dei testicoli nei maschi del primo gruppo è avvenuta in epoca più ritardata e lo sviluppo in modo meno pronunciato che nei controlli. La funzione riproduttiva negli animali del primo gruppo si è mantenuta negativa per tutto il periodo di osservazione.

Le radiografie eseguite al 60° giorno di esperimento hanno dimostrato evidente anormale accrescimento e deficiente calcificazione dello apparecchio scheletrico. Mentre le immagini relative ai ratti di controllo hanno mostrato normale conformazione e normale calcificazione dello scheletro, quelle invece relative ai ratti ad alimentazione latirica esclusiva hanno dimostrato uno stato di calcificazione meno accentuato, le estremità diafisarie relativamente rigonfie, specie quelle in corrispondenza dell'articolazione femoro-

tibio-rotulea, ipertrofia della zona di accrescimento cartilaginosa, specie a livello della testa tibiale, vertebre coccigee piccole, a contorni poco marcati.

È risultato infine dalle nostre esperienze, che con l'alimentazione latirica esclusiva, pur essendo possibile la vita per un periodo di almeno 150 giorni, da noi accertato, tuttavia la resistenza rimane minorata: due ratti, infatti, a tale alimentazione esclusiva morirono rispettivamente al 40° e al 49° giorno di esperimento. Non si notarono fenomeni morbosi che potessero mettersi in relazione con quelli del cosiddetto « latirismo »; appariva invece solamente torpore, perdita della vivacità ed agilità degli animali, tanto più marcata quanto da più tempo perdurava l'alimentazione latirica esclusiva; il pelo si conservava morbido e la forma degli animali appariva notevolmente tozza.

Le esperienze condotte sui ratti messi ad alimentazione latirica esclusiva al 90° giorno di vita ci hanno dimostrato che in tal periodo di sviluppo gli effetti sono meno dannosi che nel primo periodo. Dopo 60 giorni di alimentazione latirica esclusiva tali ratti presentavano un'aumento medio percentuale del peso del corpo pari al 528 % mentre quello dei controlli era pari al 690 %.

I dati raccolti sperimentando con i semi di *Lathyrus savitus* L. ci permettono, adunque, di poter ritenere che essi, come avevamo visto pei ceci, costituiscono senza dubbio un alimento incompleto o qualitativamente deficiente pei ratti in via di sviluppo. Pur non avendo osservato fenomeni nervosi o motori che possano mettersi in relazione con quelli descritti sotto il nome di « latirismo », i giovani ratti alimentati esclusivamente con tali semi presentano minorata resistenza, torpore, marcato rallentamento dell'accrescimento che impegna tutti gli organi ed apparati con evidenti e notevoli deficienze particolarmente di quello genitale e di quello scheletrico.

Geologia. — *Convogliamento e ricorrugamento dell'« Erciniano » nell'orogenesi alpina.* Nota ⁽¹⁾ di G. B. CACCIAMALI, presentata del Corrisp. G. ROVERETO.

I. - LE NOSTRE DINARIDI.

È noto che nella costituzione delle nostre Dinaridi (prealpi meridionali, prealpi italiane) entrano due ben distinte serie stratigrafiche, la metamorfica e la normale; questa, incomparabilmente più estesa, e sovrapposta in discordanza a quella, vi rappresenta il corrugamento terziario (alpino); quella, comparente solo in finestre dovute a lacerazione della serie normale, vi rappresenta il corrugamento carbonifero (erciniano). La serie normale per lo più va dal permiano, e talvolta anche dal carbonifero superiore, al mio-

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1931.

cene, e verrà indicata col nome di soprastruttura; la serie metamorfica è necessariamente paleozoica prepermiana, e verrà indicata col nome di sottostruttura; è detta anche degli schisti cristallini, presentandosi quasi sempre con questi (non così però nelle finestre del silurico-devonico fossilifero delle Dinaridi carniche). Fra i più importanti lembi di tali schisti cristallini ricordiamo, per la catena orobica, quello di Introbio (V. Sàssina), quello di Fiumenero (V. Seriana) e quello di Cedègolo (V. Camònica), e per le Dinaridi più tardive quello dell'alta V. Trompia, quello di V. Rendena, quello della V. Sugana e quello del Recoarese.

Sull'impostamento dei detti due elementi strutturali delle nostre Dinaridi (potendo gli stessi essere autoctoni oppure di trasporto), abbiamo tre ipotesi, le quali si sono andate effettivamente succedendo nella mente dei geologi; esse sono: 1^a Sottostruttura in posto fin dall'origine sua, e deposizione su di essa, pure per locale sedimentazione, della soprastruttura; 2^a Sottostruttura come nell'ipotesi precedente, e soprastruttura sedimentatasi altrove, indi trasportata in massa con scorrimento sulla sottostruttura; 3^a Soprastruttura sedimentatasi altrove sulla sottostruttura, ed entrambe trasportate in massa sul posto attuale. Questa terza ipotesi è la sola oggi accettabile; il fatto che i lembi del cristallino apparenti nelle nostre Dinaridi si presentano chiaramente come noccioli di anticlinali della serie normale dimostra che tali lembi hanno partecipato al corrugamento alpino; siccome poi gli schisti cristallini dovevano essere stati già corrugati nel diastrofismo erciniano, così i detti noccioli anticlinali rappresentano un ricorrugamento degli schisti stessi avvenuto nel diastrofismo alpino; ed infine siccome è per altra via dimostrato che le masse rocciose delle Dinaridi sono masse trasportate, così dobbiamo concludere per il convogliamento della serie sottostrutturale nel viaggio di quella soprastrutturale.

II. — LE ALPI PROPRIAMENTE DETTE.

Quando si dice sistema alpino, corrugamento alpino, ecc. si allude all'insieme delle Alpi p. d. e delle Dinaridi; le Alpi p. d. sono costituite da tre distinte unità tectoniche: a nord le Elvetidi, di mezzo le Pennidi ed a sud le Austridi; a quest'ultime seguono le Dinaridi. Caratteristiche delle Dinaridi sono pieghe stratigrafiche rovesciate a sud e parzialmente ricoprentisi l'una l'altra sì da dare al paese una struttura embricata; caratteristiche invece delle Alpi p. d. sono grandi pieghe stratigrafiche rovesciate a nord e sovrascorse l'una sull'altra anche per un centinaio di chilometri, sì da costituire un impilamento di falde di ricoprimento; di regola quindi le pieghe delle Elvetidi sono coperte da quelle delle Pennidi, e queste lo sono dalle pieghe delle Austridi.

Le stesse due serie stratigrafiche, metamorfica e normale, che abbi-
vismo costituire le Dinaridi, entrano anche nella costituzione di ciascuna delle

ora nominate tre unità tectoniche alpine, la serie metamorfica (sottostruttura) rappresentando il fondo originario sul quale, nell'immenso mare Tetide, si andò sedimentando, soprattutto durante il mesozoico, la serie normale (soprastruttura). Siccome poi il corrugamento alpino tenne dietro immediatamente a quello erciniano, così detta serie normale, contemporaneamente al proprio costituirsi, veniva sospinta verso nord e corrugata; insieme ad essa venne sospinta verso nord e ricorrugata la preformata basale serie metamorfica. Questo complesso viaggiante, o *Sial*, doveva naturalmente scorrere sul pastoso profondo *Sima*, e le rughe sue dovevano in parte anche emergere dalla superficie del mare sotto forma di ghirlande insulari, onde si spiega la presenza e di parziali discordanze (per transgressioni) e di rocce clastiche nella serie superiore o normale. E mentre il *Sima* potè iniettare nel *Sial* rocce ignee basiche, gli urti tra le pieghe del *Sial* poterono, trasformando l'energia meccanica in energia termica, generare in esse rocce ignee acide.

Torniamo alle tre unità alpine: le Elvetidi hanno radici esterne all'arco delle Alpi; le Pennidi e le Austridi hanno radici interne; le Elvetidi rappresentano sedimenti del litorale nord della Tetide, e sono quelle che hanno compiuto viaggio minore, sì che la sottostruttura loro (massicci erciniani dall'Argentera, al Pelvoux, al M. Bianco, al Gottardo) si può considerare autoctona, e le falde della loro soprastruttura para-autoctone; le Pennidi, l'unità più potente, rappresentano i sedimenti della maggior estensione della Tetide; le loro falde più importanti sono: quella detta del Gran S. Bernardo (sottostruttura) o della zona del Brianzone (soprastruttura), e quella detta del Dente Bianco (sottostruttura) o della zona del Piemonte (soprastruttura); le Austridi, colle Dinaridi, rappresentano infine i sedimenti del litorale sud della Tetide, quelli cioè che hanno compiuto viaggio più lungo.

Qui cade in acconcio ricordare che, come nella sottostruttura delle Dinaridi carniche abbiamo rocce non metamorfosate, così nella soprastruttura della suddetta zona piemontese (zona giura-liassica dei calceschisti) abbiamo rocce metamorfosate, ond'è che alle denominazioni di serie metamorfica e serie normale preferisco quelle di sottostruttura e soprastruttura.

Ricollocare su di un'unica superficie suborizzontale la duplice serie che l'orogenesi ha ripetutamente ripiegato e sovrapposto significherebbe svolgere le nostre falde alpine e ridistenderne le due serie stratigrafiche sull'originario fondo della Tetide; ne sortirebbe una distesa da N. a S. di almeno 2000 Km., distesa che la strizione ha ridotto a circa 150 Km., tale essendo appunto press'a poco la larghezza attuale delle Alpi (da Bregenz, p. es., all'Adamello), distesa costituita da un'unica sottostruttura e da un'unica soprastruttura, l'una e l'altra aventi *facies* diverse, oltrechè nel senso laterale, nel senso meridiano; si spiegano quindi le *facies* sempre più meridionali che troviamo procedendo dagli elementi che viaggiarono di meno a quelli che viaggiarono di più, dalle Elvetidi cioè alle Dinaridi.

III. — LE AUSTRIDI IN PARTICOLARE.

Nelle Austridi si distinguono un gruppo inferiore (Grisonidi) ed un gruppo superiore (Tirolidi); a contatto delle Dinaridi si trovano naturalmente le radici delle Tirolidi, cui fan seguito a nord quelle delle Grisonidi; ancor più a nord seguono le rispettive coltri, quelle delle Tirolidi coprenti quelle delle Grisonidi. Siccome poi, per quanto è stato detto sopra, solo gradatamente ogni *facies* passa alle *facies* contigue, così è evidente per esempio che sottostruttura e soprastruttura delle Dinaridi ci offrano maggior somiglianza rispettivamente colla sottostruttura e la soprastruttura delle Tirolidi che non cogli stessi elementi delle Grisonidi; la sottostruttura infatti che ci presentano le Tirolidi (radici nella zona degli schisti dei laghi o degli schisti di Edolo) poco distinguesi dalla sottostruttura delle Dinaridi; e così dicasi della soprastruttura, la quale però nelle radici delle Tirolidi è, per le pressioni subite, quasi obliterata, ossia ridotta a scarsissimi lembi distesi qua e là sul limite alpino-dinarico, come a Lesa sulla sponda destra del Verbano ed a sud di Luino sulla sinistra, poi a Manno, indi al Palone di Torsolazzo ed a sera di M. Aviolo (V. Camonica), ed infine a Brunico, poi lungo il versante destro della Rienza e indi (zona tipica) tra la Drava e la Gail.

Analogamente è ridotta a scarsissimi lembi la soprastruttura delle radici delle Grisonidi, lembi situati tra i detti schisti dei laghi o di Edolo e la sottostruttura delle radici delle Grisonidi stesse (zona d'Ivrea o degli schisti del Tonale); così a S. Jorio ed a Domaso, poi sulla destra dell'Adda a Dubino e Dazio, indi a M. Padrio in V. Camonica, a S. Pancrazio in V. d'Ultimo, ed infine alla forcella di Ciarnil a nord di Dobblacco.

Il raddrizzamento delle radici Pennidi, Grisonidi e Tirolidi e l'obliterazione della soprastruttura nelle radici delle Grisonidi e delle Tirolidi sono conseguenza del formidabile urto delle sopravvenienti Dinaridi, urto la cui energia meccanica si trasformò qua e là in energia termica, determinando la formazione di rocce ignee sialiche, generalmente acide granitoidi, quali si trovano appunto lungo la così detta linea periadriatica che si inizia coll'Adamello. Per profonde fratture determinatesi nel basso Veneto, si fecero viceversa strada rocce ignee simiche, generalmente basiche basaltiche.

Siamo così tornati alle nostre Prealpi; tale denominazione, giustissima dal punto di vista puramente orografico, è affatto impropria dal punto di vista geologico, perocchè geneticamente le Dinaridi sono postalpine e non prealpine, rappresentano cioè le ultime onde rocciose arrivate; in altri termini, anzichè un'avanterra (*Vorland*) od un avanpaese (*Avant pays*), le Dinaridi sono una retroterra (*Hinterland*) od un retropaese (*Arrière pays*).

Biologia. — *Influenza di terre radioattive italiane sullo sviluppo dei bachi da seta.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

I moderni studi nel campo della radiologia hanno posto in evidenza come la radioattività sia largamente diffusa in natura, e come i raggi α , β , γ del radio abbiano una parte preponderante nei processi vitali di tutti gli organismi.

Noi stessi abbiamo esposto in una Nota precedente ⁽²⁾ l'azione favorevole esercitata dal radio, sulla germinazione dei semi e lo sviluppo delle piante.

Recentemente lo Stoklasa ⁽³⁾ ha posto in evidenza con una serie di esperienze interessanti, l'azione esercitata da acque radioattive di note sorgenti Germaniche, nella germinazione dei semi e sullo sviluppo delle piante.

Noi abbiamo voluto sperimentare l'azione esercitata da terre radioattive italiane, sullo sviluppo dei bachi da seta.

La terra radioattiva usata, era ridotta in polvere finissima ed aveva una radioattività corrispondente a:

Gr. 4.2×10^{-9} di radio elemento per 1 gr. di terra ⁽⁴⁾.

PARTE SPERIMENTALE.

Abbiamo eseguito una serie di prove sui bachi da seta *giallo Ascoli*. Un gruppo venne tenuto come confronto, mentre l'altro venne suddiviso in diversi sottogruppi che vennero posti in bacinelle sul cui fondo era disposto uno strato di 2 cm. di terra radioattiva divisa dai bachi a mezzo di un foglio di carta consistente.

Lo sviluppo dei bachi da seta venne seguito controllando il loro peso, seguendo le mute, e ponendo in evidenza l'anticipo dell'imboscatura, e il rendimento in peso nel raccolto dei bozzoli.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

(2) *Azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi*, G. MEZZADROLI-E. VARETON, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. XII, serie 6^a, fasc. 1-2; Roma luglio 1930.

(3) *Die Assimilation des Kohlendioxides unter dem Einflusse der Radioaktivität im Laufe der vegetativen Entwicklung der chlorophyllhaltigen Zelle*, JULIUS STOKLASA, «Biochem. Zeitschr.», B. 224, H. 1, 3, 1930; *Die physiologischen Wirkungen der α -, β - und γ -Strahlen des Radiums auf die Dynamik und Energetik der Kohlensäureassimilation*, JULIUS STOKLASA, «Zeitschr.», B. 218, H. 4, 6, 1930.

(4) La radioattività venne gentilmente dosata dal prof. Bonino dell'Istituto di Chimica Fisica, dell'Università di Bologna e ci è grato porgergli qui i più vivi ringraziamenti.

Il ciclo della vita dei bachi di confronto e di quelli cresciuti sotto l'influenza della terra radioattiva, è messo chiaramente in evidenza dai dati che riportiamo:

Bachi giallo Ascoli al 20° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi sotto l'azione della terra radioattiva
Peso medio	372.5 mgr.	495 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi cresciuti sotto l'azione della terra radioattiva italiana 32.8 %.

Bachi giallo Ascoli al 27° giorno di vita	Bachi prova di confronto	Bachi sotto l'azione della terra radioattiva
Peso medio	2665 mgr.	3880 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi cresciuti sotto l'azione della terra radioattiva italiana 45.6 %.

IMBOSCATURA.

L'imboscatura avviene per i bachi cresciuti sotto l'azione della terra radioattiva un giorno prima di quelli confronto.

BOZZOLI.

I bozzoli vennero raccolti e pesati:

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi confronto gr. 187
 Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi cresciuti sotto l'influenza
 della terra radioattiva gr. 198

Percentuale in più nel peso dei bozzoli provenienti dai bachi cresciuti sotto l'influenza della terra radioattiva 5.8 %.

Conclusione e riassunto:

Fu sperimentata l'azione fisiologica, esercitata da terre radioattive italiane sullo sviluppo dei bachi da seta, fatti crescere sotto la loro continua influenza. Si osservò così:

1. Le terre radioattive esercitano una azione favorevole sullo sviluppo dei bachi da seta, esaltando la cresciuta dei bachi e il rendimento in peso dei bozzoli raccolti.

2. I bachi cresciuti sotto l'azione della terra radioattiva hanno un peso che supera del 32-45 % quello dei bachi confronto della stessa età.

3. L'imboscamento ha luogo per i bachi cresciuti sotto l'influenza delle terre radioattive circa un giorno prima di quelli di confronto.

4. Il rendimento in peso dei bozzoli raccolti, supera nel caso dei bozzoli provenienti da bachi irradiati del 5.8 % quello dei bachi confronto.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Fusione di otocisti nei trapianti xenoplastici tra Anuri e Urodeli*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di CELSO GUARESCHI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

In una serie di Note pubblicate negli anni 1929, 1930 e 1931, Cotronei⁽³⁾, Cotronei e Spirito⁽⁴⁾ e Spirito⁽⁵⁾, hanno indagato il comportamento di vari organi embrionali (occhio, prosencefalo, organo olfattorio) trapiantati xenoplasticamente dagli Anuri negli Urodeli. Di tali organi essi hanno ottenuto costantemente il differenziamento, seguito dalla distruzione del pezzo trapiantato dopo la fine del riassorbimento del vitello da parte dell'ospite.

Ad estensione di queste ricerche ho voluto, per consiglio del prof. Cotronei, studiare il comportamento, nelle medesime condizioni sperimentali, di un altro organo del cui sviluppo mi sono già ampiamente occupato: l'orecchio interno.

I concetti di Cotronei mirano a dimostrare che durante i processi di autodifferenziamento si svolgono tra organi simili (indagati per ora: organi di senso e nervosi) anche di animali appartenenti ad ordini diversi (Anuri e Urodeli) i processi di affinità cellulare (chemiotropismi) che culminano nelle fusioni, o, anche, in processi regolativi. Soltanto più tardi, dopo il differenziamento, si possono stabilire processi di repulsioni biochimiche.

Le presenti mie ricerche vogliono constatare come si comporta l'abbozzo dell'orecchio interno sia per i processi di fusione, sia per le comunicazioni di carattere nervoso. Questi concetti derivano da quanto, fin dal 1921⁽⁶⁾ scriveva il Cotronei: «Una parte assai interessante delle ricerche del Born è quella che riguarda l'affinità che organi simili hanno l'uno per

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1931.

(3) «Mon. Zool. It.», fasc. 1, 1930.

(4) Questi «Rendiconti», 1929 e 1930.

(5) «Boll. Soc. Biol. Sper.», vol. VI, p. 284, 1930.

(6) «Arch. Zool. It.», vol. 10, 1922.

l'altro, anche quando si tratta di innesti fra specie differenti: l'unione fra organi simili viene costituita da tessuto specifico e non da tessuto connettivo». E tali parole riportava nel lavoro che serve da impostazione a tutte le ricerche che si sono svolte e si vanno svolgendo nel nostro Istituto ⁽¹⁾, a conferma delle quali sono tutti i casi di fusione di abbozzi oculari e nervosi (Cotronei e Spirito) e di organi olfattori (Spirito) di specie appartenenti ad ordini diversi che sono stati descritti nelle Note successive.

Il materiale da me usato è costituito da embrioni di *Rana agilis*, *Rana esculenta* e *Hyla arborea*, per gli Anuri, e di *Triton cristatus*, *Triton taeniatus* e *Axolotl*, per gli Urodeli: la fusione l'ho ottenuta solo trapiantando l'abbozzo dell'otocisti (allo stadio di vescicola otica già distaccata dall'ectoderma) di *R. esculenta* su di un embrione di *Axolotl*; sono sicuro però che, insistendo, sarà possibile ottenere fusioni anche fra le altre forme. Debbo avvertire che simili operazioni sono tutt'altro che di facile riuscita; è necessario però ricordare che io ho già potuto dimostrare ⁽²⁾ come la fusione delle otocisti sia, anche in trapianti omeoplastici, piuttosto difficile. Ho ottenuto, malgrado queste difficoltà, un bellissimo caso di fusione di due otocisti, le cui cavità sono in comunicazione tra loro, poichè uno dei canali semicirculari dell'otocisti trapiantata possiede uno sbocco nell'otocisti da cui deriva, ed uno in quella normale dell'ospite che si trova accanto. Il caso da me descritto è simile in tutto a quelli da me ottenuti nei trapianti omeoplastici (tanto negli Anuri che negli Urodeli) e che ho chiamati « casi di fusione parziale » ⁽²⁾.

Coi problemi della capacità di fusione da parte di organi simili (nervosi e di senso) di animali appartenenti ad ordini diversi si ricollegano quelli delle comunicazioni nervose che si possono stabilire fra tali organi trapiantati e i centri nervosi dell'ospite, già messi in luce da Cotronei e Spirito. Nel caso dell'orecchio ci troviamo qui di fronte ad una difficoltà: trattandosi di epiteli di senso secondari è necessario, per poter essere certi dell'avvenuta connessione nervosa, poter seguire il nervo fino alle sue ultime terminazioni nell'epitelio stesso, cosa del tutto impossibile se non si usano dei metodi speciali per le terminazioni nervose, che io non ho ancora avuto occasione di adoperare.

Nei casi finora ottenuti ho notato, con una certa sicurezza, solo connessioni fra i gangli, sia dell'ospite che del donatore, coi centri nervosi dell'ospite e anche con pezzetti di encefalo di *Rana* trapiantati. Ricerche successive e metodi speciali spero che daranno risultati più sicuri su tale argomento.

(1) « Mon. Zool. It. », loc. cit.

(2) Questi « Rend. », 1929, 1930, 1931; « Mon. Zool. It. » (Atti Soc. It. Anat.), 1930; « Arch. f. Entw. Mech. », 1930, Bd. 122.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta (processi distruttivi e potenza di ricupero).* ⁽¹⁾ Nota II ⁽²⁾ di TEODORO PERRI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

Le ricerche che ho iniziato l'anno scorso ⁽³⁾ sui processi distruttivi dell'abbozzo oculare di *Triton cristatus* e di *Triton taeniatus* in embrioni di *Rana esculenta*, come risultano dalle prime esperienze di Cotronei e Spirito ⁽⁴⁾, le ho quest'anno molto estese e metodicamente condotte allo scopo di verificare l'ipotesi di lavoro del mio Maestro prof. Cotronei, circa l'antagonismo esistente fra il metabolismo del vitello dell'ospite (nel mio caso la *Rana esculenta*) e di quello dell'occhio trapiantato (nel mio caso di *Triton*).

Riassumo brevemente i punti essenziali di queste ricerche, che il prof. Cotronei ha voluto affidarmi. Per la relativa documentazione rimando al lavoro in esteso, ormai pronto.

I. — ANALISI DEI PROCESSI DISTRUTTIVI DELLA VESCICOLA OTTICA PRIMARIA E SECONDARIA DI TRITON CRISTATUS E TAENIATUS TRAPIANTATA SU EMBRIONI DI RANA ESCULENTA. — Ho ripetuto innanzi tutto le esperienze dell'anno scorso sui processi distruttivi. Sono ormai un centinaio di casi, tutti controllati istologicamente, i quali dimostrano in modo assolutamente indubbio che l'abbozzo oculare di *Triton* trapiantato in embrioni di *Rana esculenta* va in rapidissima distruzione, e ciò avviene solo in rapporto con le nuove condizioni biochimiche.

La vescicola ottica secondaria di *Triton*, precisamente quando il *Triton* incomincia a nuotare, è stata trapiantata in embrioni di *Rana esculenta* sia in posizione cefalica che ventrale: ciò indifferentemente, essendo i risultati quasi del tutto indipendenti dalla sede d'impianto.

Nelle esperienze di aprile (temp. 15-17°) ⁽⁵⁾ l'abbozzo si conserva bene per tre giorni: la forma è conservata, frequenti le mitosi; cristallino presente e spesso in uno stadio più avanzato della retina, il che vuol dire che il cristallino ha continuato a svilupparsi, la sua capsula segue le sorti della retina. Dopo quattro giorni di permanenza in *Rana esculenta* i segni di disfacimento sono più accentuati; dopo una maggiore permanenza lo sono ancora di più e dell'abbozzo possono rimanere solo poche cellule, le quali però possono mostrarsi in buone condizioni.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1931.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XII, 1930, pp. 66-68.

(4) Questi « Rendiconti », vol. X, 1929; voll. XI-XII, 1930.

(5) Temperatura dell'acqua ambiente, misurata alle 10 di mattina.

Nei mesi successivi (maggio, giugno e luglio) i tempi si riducono, in rapporto all'aumentata temperatura (in luglio sui 28°). In luglio anche dopo sedici ore e mezzo, trovo quasi sempre evidenti segni di citolisi. Nei mesi di maggio e giugno trovo fatti intermedi, sempre in rapporto con la temperatura ambiente.

Quando l'abbozzo di *Triton* è trapiantato in uno stadio molto giovane (vescicola ottica primaria o inizio della secondaria) i processi distruttivi sono notevolmente più rapidi.

Il disfacimento è graduale: dapprima cessano le mitosi, che in questo stadio sono l'esponente della vitalità dell'organo; e poi iniziano i veri processi distruttivi. Per il cristallino si ha dapprima l'allontanamento delle fibre, indi vacuolizzazione e disgregamento. In una stessa esperienza le diverse parti della retina possono mostrare vari gradi di questo disfacimento.

A tal riguardo sono tipici due casi in cui alcune zone della retina sono in perfette condizioni, ed altre invece mostrano un chiaro disfacimento. Osservando abbozzi oculari di *Triton*, in condizioni normali, ho notato che nella retina l'assorbimento del vitello non avviene contemporaneamente in tutte le zone. La vescicola ottica in uno stadio assai precoce contiene abundantissimo tuorlo ed è più facile a disgregarsi. Le fibre del cristallino assorbono il vitello più rapidamente che la retina, e sono più resistenti di questa; la capsula invece l'assorbe all'incirca come la retina e ne segue le sorti. Si vede da ciò quali intimi rapporti esistano fra lo stadio delle varie parti dell'occhio, in rapporto con l'assorbimento del vitello, ed il grado di disfacimento.

Il prof. Cotronei mi ha pure incaricato di vedere se nella distruzione dell'abbozzo di *Triton* avesse importanza la circolazione sanguigna, nel senso che il cuore spingerebbe in tutto il corpo, e quindi anche nell'abbozzo trapiantato, le sostanze citolitiche. Ho eseguito alcune esperienze al riguardo, le quali però non mi forniscono dati sicuri per decidere. E questo è certamente dovuto alla rapidità dei processi distruttivi. Ricordo che in questo Istituto Spirito⁽¹⁾ nelle sue ricerche su « innesti di più estese parti embrionali tra Anuri e Urodeli » ha visto che si ha rapida distruzione delle parti anteriori più o meno cospicue di embrioni di Urodeli quando vengano innestate su *Rana esculenta* mutilata della regione anteriore alle branchie; se questa regione invece manca si ha differenziamento degli organi. Spirito precisa: « mi sembra di grande interesse aver potuto delimitare in una regione, compresa tra due piani paralleli passanti anteriormente e posteriormente agli abbozzi branchiali, la ragione di questa differenza di comportamento ». Il prof. Cotronei interpreta questo fatto come dovuto alla funzione del cuore, nel senso sopra detto⁽²⁾.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XII, 1930.

(2) Le nuove ricerche di Spirito, di quest'anno, di imminente pubblicazione, danno una dimostrazione esauriente dell'esattezza di tale interpretazione.

II. — TRAPIANTO DELL'OCCHIO DI TRITON TAENIATUS QUANDO HA TERMINATO DI ASSORBIRE IL SUO PROPRIO VITELLO. — Questo gruppo di esperienze serve a studiare di proposito se questi rapporti tra presenza di tuorlo e grado di disfacimento siano occasionali ovvero se ci sia un rapporto causale. Ho trapiantato su embrioni di *Rana esculenta* l'occhio di *Triton taeniatus*, quando supponevo avesse assorbito tutto il suo proprio vitello (cioè dell'occhio)⁽¹⁾. Di un Triton un occhio l'ho trapiantato sull'embrione di *Rana esculenta* e l'altro, insieme al rimanente del *Triton*, l'ho subito fissato in Bouin: così, per ogni singola esperienza, conosco con esattezza lo stadio dell'occhio al momento del trapianto.

Posso così riassumere i risultati di questo gruppo di ricerche: l'abbozzo oculare trapiantato, quando ha terminato di assorbire il suo vitello, può per un certo tempo procedere nel suo sviluppo, ma poi fatalmente va soggetto a processi distruttivi, preceduti da processi che possono essere considerati come di atrofia (impiccolimento dell'organo). Questo avanzamento di tutto l'occhio l'ho trovato con molta chiarezza in sei casi su tredici: in questi casi l'occhio è stato da quaranta fino a settanta ore in *Rana esculenta*. Rimanendovi per un tempo maggiore, l'occhio si disgrega e quindi non fa più vedere se ci sia stato già qualche ulteriore avanzamento. Queste esperienze le ho eseguite in luglio, cioè quando la vescicola ottica secondaria (con presenza di tuorlo) resiste solo fino a un massimo di sedici ore e mezzo in *Rana esculenta*, e questo solo in rarissimi casi.

Altre ricerche eseguite quest'anno, da Cotronei e Guareschi⁽²⁾, dimostrano che la vescicola ottica primaria di *Triton cristatus* trapiantata su *Rana esculenta* già larva, e che quindi ha terminato di assorbire tutto il suo vitello, mostra una resistenza assai maggiore che non nell'embrione di *Rana esculenta*, poi anch'essa fatalmente si distrugge. Queste ultime ricerche, e quelle da me ora esposte, concorrono a dimostrare l'esattezza della veduta di Cotronei secondo cui bisogna dare importanza alla incompatibilità che si stabilisce fra il metabolismo del tuorlo dell'abbozzo trapiantato e quello dell'ospite. In altri casi invece queste incompatibilità si stabiliscono solo con l'ambiente umorale dell'ospite, i cui tessuti siano già differenziati.

III. — PROCESSI DI AVANZAMENTO. — Le ricerche di quest'anno mi permettono di giungere ad una conclusione molto esatta: ciascuna parte dell'occhio può andare avanti quando è terminato il rispettivo vitello. Tale avanzamento è spesso notevole. Il cristallino che termina più presto il suo tuorlo mostra più facilmente processi di avanzamento.

IV. — ESPERIENZE DI RICUPERO PER SAGGIARE E CONTROLLARE L'ENTITÀ DEI PROCESSI DISTRUTTIVI. — Sono quelle stesse dell'anno scorso. L'abbozzo

(1) Parlando di vitello mi riferisco a quello che trovasi nell'interno delle cellule.

(2) In questo stesso fascicolo.

riprende o no secondo il grado di disfacimento in cui si trova al momento del riporto in *Triton*. Le esperienze le ho fatte in maggio. Dopo permanenza di un giorno in *Rana esculenta*, l'abbozzo oculare riprende e si differenzia perfettamente; talora presenta delle irregolarità che d'altronde si osservano spesso anche nei trapianti omoplastici e che sono forse in rapporto con il trauma operatorio. Per maggiore permanenza, il ricupero è incostante.

Il cristallino si riprende molto più facilmente in rapporto con la maggiore resistenza che esso presenta verso i fattori disgregativi. La sua capsula segue anche qui le sorti della retina.

V. — TRAPIANTI A ZIG-ZAG (ALLA EHRLICH). — Sono state fatte allo scopo di vedere se si riesca ad annullare o diminuire gli effetti del contrasto metabolico del vitello dell'ospite con quello dell'occhio trapiantato.

Ho eseguito poche esperienze in luglio. Ho avuto un caso positivo. Trattasi di una vescicola ottica secondaria giovane di *Triton taeniatus* rimasta per dodici ore in *Rana esculenta*, poi per le successive ventitrè ore in *Triton*, poi per altre otto ore su *Rana* e poi definitivamente in *Triton*. L'occhio, che ha una grandezza normale, mostra tutte le sue parti perfettamente differenziate; la sua forma è irregolare.

Non è possibile da questo solo caso positivo trarre qualsiasi deduzione. Occorre uno studio metodico ed esteso, che spero di eseguire l'anno prossimo. Per ora ho voluto solo annunciare tale nuova serie di esperienze.

Concludendo: La vescicola ottica secondaria di *Triton* trapiantata su embrioni di *Rana esculenta* va sempre distrutta, e senza eccezione. La vescicola ottica primaria è soggetta a più rapida distruzione. Se tutto l'abbozzo o parte di esso ha terminato di assorbire il suo vitello allora mostra una resistenza di gran lunga superiore, e contemporaneamente può procedere nel suo sviluppo. La vescicola ottica secondaria di *Triton* rimasta per un certo tempo su *Rana esculenta* può essere salvata riportandola in *Triton*. In trapianti a zig-zag ho avuto un caso positivo.

Biologia (Patologia vegetale). — *Alcuni casi di « cancrena pedale » da « Sclerotium » osservati in Italia.* Nota⁽¹⁾ di M. CURZI, presentata dal Corrisp. L. PETRI.

Nell'ultimo ventennio, molti ed importanti studi sono stati pubblicati intorno ad alcune malattie causate da *Sclerotium* su numerosissime piante, specialmente orticole ed ornamentali. E sono stati gli autori Nord-Americani che hanno trattato queste speciali malattie, note sotto le denominazioni di « *Sclerotium rot* », di « *Sclerotium wilt* » oppure anche di « *Sclerotium blight* ». Esse si manifestano usualmente con una cancrena del colletto delle piante, caratterizzata da necrosi e distruzione della corteccia e da una vegetazione micelica bianca, bene appariscente alla superficie degli organi colpiti, spesso cosparsa anche di caratteristici corpi scleroziali globosi e castanei, di qualche millimetro di diametro.

Queste malattie sono molto diffuse e dannose specialmente nei paesi caldi degli Stati Uniti di America, nelle Indie orientali, nel Giappone e sono state fino a qualche anno fa attribuite ad una sola specie di *Sclerotium* descritto dal Saccardo nel 1911 sotto il nome di *Sclerotium Rolfsii* Sacc., su materiale ricevuto dal Nuovo Continente⁽²⁾.

Non tutte le descrizioni dei vari autori, che si sono occupati in seguito di questo fungo, concordano però perfettamente con la diagnosi del Saccardo; e ciò lascia dubitare che, pur tenendo conto delle possibili variazioni e degli stipiti che la specie può presentare nelle diverse condizioni ambientali e parassitarie, più specie di *Sclerotium*, appartenenti al ciclo evolutivo di alcuni basidiomiceti inferiori, possono produrre le medesime infezioni, a meno che non si tratti di un basidiomicete unico e tanto polimorfo da manifestarsi nella forma vegetativa in stipiti diversi e tali da apparire come specie distinte. Questa ultima ipotesi mi sembra però alquanto inverosimile e ritengo piuttosto che non debbano riferirsi a una sola entità specifica gli *Sclerotium* parassiti riportati finora nei diversi continenti sotto il nome di *Sclerotium Rolfsii*. E infatti la Westerdijk, direttrice del « Centraalbureau voor Schimmelcultures » di Baarn (Olanda), mi informa che i vari stipiti di questo fungo conservati nel suo laboratorio, sono stati riveduti recentemente dal Whetzel e trovati quasi tutti corrispondenti allo *Sclerotium Del-*

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

(2) SACCARDO P. A., *Notae Mycologicae*. « Annales Mycol. »; Bd. IX, pp. 249-237, 1911.

phinii Welch, la cui specificità distinta è stata esaurientemente illustrata in un recente lavoro dallo Stevens⁽¹⁾.

In Europa le cancrene pedali da *Sclerotium* sono state appena segnalate in alcune località dell'Europa centrale come prodotte dallo *Sclerotium Rolfsii*, ma non siamo sicuri se si tratta veramente di questo parassita, che troviamo semplicemente elencato in alcune rassegne fitopatologiche.

Data l'importanza di queste malattie e la loro diffusione, mi affretto a riferire su alcuni stipti di *Sclerotium* isolati da me in Italia in questi ultimi tempi, i quali per i loro caratteri non dovrebbero differire dallo *Sclerotium Rolfsii*.

Gli stipti isolati sono stati due.

Il primo l'ho osservato nell'estate 1929 su *Aster chinensis* coltivato nel R. Orto Botanico dell'Università di Pisa. Le piante di una piccola piantagione di astri erano tutte affette da un marciume che dalle radici risaliva al colletto e oltre questo, lungo il fusto, per qualche centimetro al disopra della superficie del suolo; la corteccia era totalmente necrosata, disfatta e invasa da ife miceliche, ialine, piuttosto grosse, le quali formavano tutto un unico tallo col micelio bianco che si estendeva al disopra dell'epidermide in gran parte disorganizzata. Tale feltro osservato al microscopio, risultava costituito di ife ialine settate, le quali spesso presentavano in prossimità dei setti e talora anche delle ramificazioni le unioni a fibbia caratteristiche dei basidiomiceti.

Le ife talora erano fasciculate in cordoni nivei percorrenti per lo più longitudinalmente la zona di infezione, e qua e là formavano alcuni gomitol candidi corrispondenti allo sviluppo iniziale degli sclerozi.

Il fungo venne subito isolato e coltivato in substrati nutritivi differenti sui quali ha sempre sviluppato un micelio aereo abbondante e fiocoso, e numerosi sclerozi, globosi, spesso sferici, di circa 0,5-1,5 mm. di diametro. Questi sclerozi si iniziavano da piccoli gomitol bianchi, identici a quelli osservati su gli steli delle piante, i quali ben presto finivano per formare un corpo globoso a parete liscia, prima cremeo e poi subito castaneo più o meno intenso.

Questo fungo dal Settembre 1929 è stato fino ad oggi mantenuto vivo nelle colture artificiali e soltanto recentemente mi sono messo a studiarlo accuratamente per ben determinarlo e conoscerlo nel suo ciclo biologico. Esso ha tutti i caratteri morfologici dello *Sclerotium Rolfsii* e corrisponde non solo alla diagnosi del Saccardo, ma anche alla gran parte delle descrizioni dettagliate degli autori americani che si sono occupati di questa specie.

In determinate condizioni colturali ho osservato in questo fungo lo stadio perfetto riferibile al genere *Corticium* (*Hypochnus*), fornito di

(1) STEVENS F. L., *A comparative study of Sclerotium Rolfsii and Sclerotium Delphinii*. «Mycologia»; vol. XXIII, n. 3, pp. 204-222, 15 fig., 1931.

ife basidiali densamente intricate e ramificate, portanti all'estremità dei basidii clavati di $4-5 = 10-15 \mu$, con 2-4 sterigmi $4-5 \mu$ lunghi e con basidiospore ialine, lisce ed ovali, misuranti $2,50-3,75 = 5-7 \mu$.



Fig. 1. — I due *Sclerotium* su agar farina di mais dopo 15 giorni: a sinistra, lo stipite isolato dall'astro; a destra, lo stipite isolato dalla patata (grandezza naturale).

La fruttificazione basidiofora nello *Sclerotium Rolfsii* non è stata mai osservata dagli autori americani, e degli altri soltanto alcuni giapponesi hanno riportato di aver riscontrato i basidi maturi nell'ospite (1) e nelle

(1) SAWADA K., *Descriptive catalogue of the Formosan fungi*. Part. I - Agr. Exp. Station Formosa; «Spec. Bull.», 19, pp. 438-442, 446-469, 1919. (In giapponese).

(2) NAKATA K., *Studies on Sclerotium Rolfsii* Sacc. Part. 3. Perfect form of the fungus and its generic relationships to *Hypochnus centrifugus* (Lév.) Tul., H. Solani Prill. et Delaer. and H. Cucumeris Fr. with its specific relationships to *Sclerotium coffeicolum*

colture⁽¹⁾, che hanno riferito al *Corticium* (*Hypochnus*) *centrifugum* (Lév.) Bres.; ma le colture di Nakata e di Goto — come la Westerdijk mi informa — più che corrispondere allo *Sclerotium Rolfsii*, corrispondono allo *Sclerotium Delphinii* e per questo credo di essere stato il primo ad ottenere lo stadio perfetto della specie saccardiana.

Il secondo stipite di *Sclerotium* isolato in Italia, l'ho riscontrato alla fine del Maggio scorso a produrre una cancrena pedale negli steli di alcune piante di *Solanum tuberosum* coltivate presso Roma, nel Campo sperimentale della Stazione di Patologia vegetale.

La malattia era nell'aspetto quasi identica a quella degli astri, però il feltro micelico al disopra degli steli malati non appariva bianco fioccoso, ma piuttosto strisciante e sericeo con sopra alcuni sclerozi in diverso grado di maturazione.

In confronto dello stipite precedente questo presenta nelle colture artificiali uno sviluppo più rapido e le colonie talora dendritiche; il micelio aereo o manca oppure è abbondante, ma è sempre lasso; gli sclerozi sono un po' più grandi e variabili nelle dimensioni, e hanno talora alla superficie delle macchie scure un po' depresse.

Questo ceppo ha pure diversi caratteri dello *Sclerotium Rolfsii*, ma non tutti.

Presenta infatti il micelio sericeo non fioccoso, le colonie spesso dendritiche e gli sclerozi con la superficie non sempre uniforme nel colore e nella linea di contorno, quasi come nello *Sclerotium Delphinii*, senza però confondersi con questo. Esso presenta in fondo alcune caratteristiche principali di questa ultima specie, le quali però sono molto attenuate e forse non costanti, giacchè è poco tempo che lo coltivo. Potrebbe considerarsi come uno stipite intermedio fra le due specie di *Sclerotium* oggi ben conosciute, ma mi sembra più prossimo allo *Sclerotium Rolfsii* nella cui orbita specifica credo che debba per ora rientrare.

Anche in alcune colture di questo secondo stipite di *Sclerotium* isolato dalla patata sono riuscito ad ottenere placche imeniali di *Corticium*, con organi fruttiferi ben sviluppati e maturi quasi identici a quelli dello stipite isolato dall'astro. Tali organi sono lievemente più grandi, ma le piccole differenze micrometriche che distinguono i basidi e le spore dei due stipiti debbono probabilmente dipendere dal substrato diverso in cui le ife basidiofore sono venute a svilupparsi.

Stahel. «Bull. Sci. Fak. Ter. Kjûshû Imp. Univ.»; 2 (1), pp. 7-19, 1926 (In giapponese con riassunto in inglese).

(1) Goro K., *On the perfect stage of Sclerotium Rolfsii Sacc. produced on culture media. Preliminary report.* «Journ. Soc. Trop. Agric.»; 2, pp. 160-175, 5 fig., 1930 (In inglese con riassunto in giapponese).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1931 (Anno IX).

(Ogni Memoria e Nota porta a piè di pagina la data di arrivo)

Matematica. — *Sopra uno speciale operatore lineare.* Nota II ⁽¹⁾
del Socio S. PINCHERLE.

1. Nella presente Nota si conservano le notazioni e le ipotesi poste in quella già pubblicata sotto lo stesso titolo in questi « Rendiconti » ⁽²⁾.

Nello spazio lineare ivi indicato con (S), di base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$, è definito l'operatore Q mediante le posizioni:

$$(1) \quad Q(\varepsilon_0) = 0, Q(\varepsilon_1) = k_1 \varepsilon_0, \dots, Q(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_{n-1}, \dots$$

Gli operatori permutabili con Q, i quali costituiscono un gruppo, vengono indicati colla lettera P, affetta o no da indici; si è visto (I, 7) come ad ogni successione $(a) \equiv a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ di numeri corrisponda un operatore P_a la cui matrice viene data dalle relazioni

$$(2) \quad P_a(\varepsilon_n) = a_0 \varepsilon_n + a_1 \frac{k_n}{k_1} \varepsilon_{n-1} + a_2 \frac{k_n k_{n-1}}{k_1 k_2} \varepsilon_{n-2} + \dots + a_{n-1} \frac{k_n}{k_1} \varepsilon_{n-1} + a_n \varepsilon_0, \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1931.

(2) Presentata nella seduta del 26 aprile 1931. Questa Nota verrà citata qui da I, seguito dal numero del paragrafo.

2. L'operatore P_a , applicato alla base $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ dello spazio (S), genera dunque il sistema di vettori

$$(2') \quad \begin{cases} \alpha_0 = a_0 \varepsilon_0 \\ \alpha_1 = a_0 \varepsilon_1 + a_1 \varepsilon_0 \\ \alpha_2 = a_0 \varepsilon_2 + a_1 \frac{k_2}{k_1} \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_0 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Questi vettori soddisfano alla relazione

$$(3) \quad Q(\alpha_n) = k_n \alpha_{n-1};$$

infatti, dall'essere $QP_a = P_a Q$, segue

$$QP_a(\varepsilon_n) = Q(\alpha_n) = P_a Q(\varepsilon_n) = k_n P(\varepsilon_{n-1}) = k_n \alpha_{n-1}.$$

La proprietà (3) si può riguardare come una estensione della

$$\frac{d}{dx} \alpha_n(x) = n \alpha_{n-1}(x),$$

che definisce i noti polinomi di Appell; essa si riduce infatti a questa (I, 12) nel caso che verrà detto *Caso elementare*, in cui la base di (S) è $1, x, x^2, \dots$, in cui è $k_n = n$ e in cui l'operazione Q è, in conseguenza, la solita derivazione. Per questo motivo, i vettori (2') si potranno dire gli *appelliani* dell'operatore P_a .

3. La successione $(a) \equiv a_0, a_1, a_2, \dots$ si dirà *corrispondente* all'operatore P_a ; ad ogni tale successione corrisponde un operatore determinato e le (2') ne danno gli appelliani, come, viceversa, di ogni operatore P la matrice (formula (8) di I, 7) fa conoscere la successione corrispondente.

Data la successione (a) , si può rappresentare P_a mediante uno sviluppo (virtuale) in serie di potenze dell'operatore fondamentale Q ; precisamente, lo sviluppo è dato da

$$(4) \quad P_a = a_0 + \frac{a_1}{k_1} Q + \frac{a_2}{k_1 k_2} Q^2 + \dots + \frac{a_m}{k_1 k_2 \dots k_m} Q^m + \dots;$$

infatti, applicando lo sviluppo (4) ad $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ e notando che, in conseguenza delle (1), è

$$(5) \quad Q^m(\varepsilon_n) = \begin{cases} 0 & \text{per } n < m, \\ k_n k_{n-1} \cdots k_{n-m+1} & \text{per } n \geq m, \end{cases}$$

si ritrovano appunto le (2'), che definiscono P_a .

4. Si è trovato (I, 4) che il vettore espresso da

$$(6) \quad \varphi_h = \sum \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} \varepsilon_n$$

è elemento invariante (autoelemento) per l'operatore Q ; che cioè esso soddisfa alla relazione

$$(7) \quad Q(\varphi_h) = h \varphi_h.$$

Poichè dalla (7) risulta

$$Q^m(\varphi_h) = h^m \varphi_h,$$

l'effetto dell'operatore P_a su φ_h , mediante applicazione della (4), sarà espresso da

$$(8) \quad P_a(\varphi_h) = \left(a_0 + \frac{a_1 h}{k_1} + \frac{a_2 h^2}{k_1 k_2} + \cdots + \frac{a_n h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} + \cdots \right) \varphi_h,$$

espressione che avrà significato qualora h appartenga al cerchio di convergenza della serie

$$a(z) = \sum \frac{a_n z^n}{k_1 k_2 \cdots k_n}.$$

Prescindendo, in questo lavoro, dalle considerazioni di convergenza, scriveremo dunque

$$(8') \quad P_a(\varphi_h) = a(h) \varphi_h.$$

La funzione $a(h)$ verrà detta *funzione caratteristica* dell'operatore P_a ⁽¹⁾. Riprendendo l'espressione (6) di φ_h e tenendo conto delle (2), si ottiene

$$P_a(\varphi_h) = \sum \frac{h^n}{k_1 k_2 \cdots k_n} \alpha_n;$$

(1) Nel caso elementare, in cui gli α_n sono i polinomi di Appell, la $a(h)$ è detta da questo autore («Ann. Ec. normale», s. 3, t. IX, 1885, p. 121) *funzione generatrice* dei polinomi stessi.

ora questo non è altro che il prodotto, eseguito colla solita regola della moltiplicazione delle serie, delle due serie di potenze di h , la φ_h e la $a(h)$, come si può riprovare direttamente senza difficoltà.

5. Abbiassi ora un secondo operatore P_b del gruppo delle P ; sia $b \equiv b_0, b_1, b_2, \dots$ la successione corrispondente e sia $b(\chi)$ la funzione caratteristica; sarà, essendo β_n i rispettivi appelliani:

$$P_b(\varphi_h) = b(h)\varphi_h = \sum \frac{h^n}{k_1 k_2 \dots k_n} \beta_n.$$

Formiamo ora $P_a P_b$ ed applichiamo a φ_h ; verrà

$$(9) \quad P_a P_b(\varphi_h) = b(h) P_a(\varphi_h) = b(h) a(h) \varphi_h;$$

da ciò risulta che la funzione caratteristica $c(h)$ del prodotto $P_a P_b$ è il prodotto delle funzioni caratteristiche di P_a e P_b . Eseguendo effettivamente il prodotto $a(h) b(h)$, si trova

$$(10) \quad c(h) = a(h) b(h) = \sum \frac{c_n h^n}{k_1 k_2 \dots k_n},$$

dove

$$(10') \quad c_n = a_0 b_n + \frac{k_n}{k_1} a_1 b_{n-1} + \frac{k_n k_{n-1}}{k_1 k_2} a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0,$$

da cui si vede come la successione corrispondente a $P_a P_b$ sia composta con quelle corrispondenti a P_a, P_b in modo simmetrico rispetto alle a_n e b_n ; ciò mostra ancora come l'insieme degli operatori P costituisca un gruppo permutabile.

È manifesta l'analogia degli sviluppi precedenti con quelli esponenziali e binomiali, cui si riducono nel caso detto elementare (n. 2). Detti γ_n gli appelliani relativi a $P_a P_b$, si ha

$$\gamma_n = P_a P_b(\varepsilon_n) = P_a(\beta_n) = P_b(\alpha_n);$$

essi si ottengono quindi sia sostituendo nelle α_n , le β_i al posto delle ε_i , sia sostituendo nelle β_n , le α_i al posto delle ε_i .

6. Quando nell'espressione (4) di un operatore permutabile con Q mancano i termini da un posto in poi, l'operatore verrà detto *forma lineare* rispetto a Q , di un *ordine* dato dal massimo esponente da cui è affetto Q . Così, se è $a_m \neq 0, a_{m+1}, a_{m+2} = \dots = 0$, l'operatore

$$(11) \quad F = a_0 + \frac{a_1}{k_1} Q + \frac{a_2}{k_1 k_2} Q^2 + \dots + \frac{a_m}{k_1 k_2 \dots k_m} Q^m$$

sarà una forma lineare di ordine m . Senza ledere la generalità, si può fare uguale ad 1 il coefficiente di Q_m .

La funzione caratteristica di F è il polinomio razionale in χ

$$a(\chi) = a_0 + \frac{a_1}{k_1} \chi + \frac{a_2}{k_1 k_2} \chi^2 + \dots + \chi^m;$$

essendo $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ le radici dell'equazione (equazione caratteristica):

$$(12) \quad a(\chi) = 0,$$

la F si decomporrà in

$$(13) \quad F = (Q - \chi_1)(Q - \chi_2) \dots (Q - \chi_m).$$

7. L'operatore F è degenere, in quanto ammette uno spazio lineare di vettori radici, ad m dimensioni. Ammettiamo infatti che $\omega = \sum g_n \varepsilon_n$ sia un vettore radice di F ; formando

$$F(\omega) = \sum g_n F(\varepsilon_n) = \sum g_n \alpha_n = 0,$$

sostituendo per le α_n le loro espressioni (2') che sono ora polinomi di non più di $m + 1$ termini, ordinando per le ε_n ed uguagliando a zero i coefficienti, si ha un sistema ricorrente lineare di ordine m , la cui soluzione generale contiene m costanti arbitrarie, che possono essere g_0, g_1, \dots, g_{m-1} .

È facile determinare vettori base di questo spazio di radici nel caso che le radici dell'equazione caratteristica siano distinte. Infatti sono radici di F le m radici degli operatori binomi $Q - \chi_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), cioè $\varphi_{\chi_1}, \varphi_{\chi_2}, \dots, \varphi_{\chi_m}$, indipendenti linearmente; l'accennato spazio di radici di F ha dunque l'espressione

$$(14) \quad c_1 \varphi_{\chi_1} + c_2 \varphi_{\chi_2} + \dots + c_m \varphi_{\chi_m}.$$

8. Importa appena rilevare l'analogia di questa risoluzione con quella nota dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, cui si riduce nel caso detto *elementare* (n. 2); rimane solo da esaminare il caso, alquanto meno ovvio, in cui l'equazione (12) ammette radici multiple, cioè in cui nella forma (13) appaiono fattori $(Q - k)^r$.

Consideriamo dapprima l'equazione

$$(15) \quad (Q - h)^2 = 0.$$

Una sua prima soluzione è data da φ_h ; una seconda, linearmente indipendente da questa, sarà la soluzione di

$$(16) \quad (Q - h)(\psi) = \varphi_h.$$

Per ottenere questa soluzione, si riprenda l'operatore U introdotto in I, 8, e definito, all'infuori di un operatore addittivo arbitrario del gruppo P , dalla condizione

$$(17) \quad QU - UQ = 1.$$

Alla matrice (I, 8, formula (11)) di un simile operatore si può sostituire una più semplice, differente da quella per l'aggiunta dell'operatore unità, e data da

$$(18) \quad U(\epsilon_0) = \frac{1}{k_1} \epsilon_1, U(\epsilon_1) = \frac{2}{k_2} \epsilon_2, \dots U(\epsilon_n) = \frac{n+1}{k_{n+1}} \epsilon_{n+1}, \dots$$

Applicando allora la (17) al vettore φ_h , si ottiene

$$QU(\varphi_h) - hU(\varphi_h) = \varphi_h;$$

si è trovato così che $\psi = U(\varphi_h)$ è soluzione della (16).

In modo analogo si hanno le radici di $(Q - h)^3$; esse sono infatti le soluzioni di

$$Q - h = 0, \quad Q - h = \varphi_h, \quad Q - h = U(\varphi_h);$$

per le due prime, le soluzioni sono trovate; per la terza, si ricordi che è (I, formula (17))

$$QU^2 - U^2Q = 2U,$$

onde

$$\frac{1}{2}(QU^2(\varphi_h) - hU^2(\varphi_h)) = U(\varphi_h),$$

e quindi $\frac{1}{2}U^2(\varphi_h)$ è soluzione della terza delle (18); le radici di $(Q - h)^3$ linearmente indipendenti sono dunque φ_h , $U(\varphi_h)$ ed $U^2(\varphi_h)$.

L'estensione del procedimento per la determinazione delle radici di $(Q - h)^m$ è immediata.

9. Una circostanza interessante è rivelata dalla costruzione effettiva di $U(\varphi_h)$, assumendosi per U la determinazione data dalle (18). Applicando infatti la U alla espressione (6) di φ_h , si ottiene

$$(19) \quad U(\varphi_h) = \frac{1}{k_1} \varepsilon_1 + \frac{2h}{k_1 k_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{(n+1)h^n}{k_1 k_2 \dots k_{n+1}} \varepsilon_{n+1} + \dots,$$

si deduce cioè $U(\varphi_h)$ derivando rispetto ad h l'espressione di φ_h . Si vede facilmente come $U^2(\varphi_h)$, $U^3(\varphi_h)$, ... si ottengono da φ_h formandone le derivate successive rispetto ad h . Viene così esteso il risultato ben noto della teoria delle equazioni differenziali a coefficienti costanti, al quale ci riporta il caso che (n. 2) abbiamo detto *elementare*.

10. La seguente osservazione non è senza analogia colla precedente. All'espressione già ottenuta (I, 11, form. (17)) dello scarto di U^m rispetto a Q si collega l'espressione dello scarto di U rispetto a Q^m :

$$(20) \quad Q^m U - U Q^m = m Q^{m-1}.$$

In base a questa, è facile avere l'espressione dello scarto di U rispetto ad un operatore P permutabile con Q ; assumendo infatti per P l'espressione (4), si ha dalla (20)

$$PU - UP = \sum_1^{\infty} \frac{n a_n}{k_1 k_2 \dots k_n} Q^{n-1};$$

lo scarto richiesto si ottiene dunque derivando formalmente l'espressione (4) di P , trattando cioè in questa il simbolo Q come se fosse una ordinaria variabile.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les développées des courbes dans l'espace hilbertien.* Nota ⁽¹⁾ di E. PINTE, presentata dal Corrisp. G. VITALI.

Je me propose dans cette Note d'esquisser la théorie des développées des courbes dans l'espace hilbertien. Après avoir démontré qu'il existe une développable de normales déterminée par chacune des normales en un point fixe de la courbe, comme dans l'espace ordinaire, j'indiquerai quelques propriétés des développées.

J'adopterai les présupposés de M. G. Vitali ⁽²⁾ ainsi que ses notations, et je prendrai pour définition de la développée celle proposée par M. G. Aliprandi ⁽³⁾.

1° *Existence.* — Soit $f = f(t, s)$ l'équation d'une courbe C dans l'espace hilbertien, f étant une fonction de t à carré sommable sur un ensemble G et s la longueur de l'arc de C .

Une courbe C' sera une développée de C , si P et P' désignant deux points correspondants de C et de C' , la droite PP' est normale à C et tangente à C' .

Indiquons par $\varphi(t, s)$ une déterminante de C'

$$\varphi = f + \rho Y$$

où ρ est une fonction de s et Y un paramètre normal orthogonal à C . PP' étant tangent à C' on a

$$(1) \quad (f + \rho Y)' = \lambda Y$$

λ fonction de s à déterminer: l'accent indique ici et plus loin une dérivation par rapport à s , ou

$$f' + (\rho' - \lambda) Y + \rho Y' = 0$$

d'où l'on déduit

$$\rho' - \lambda = 0.$$

Reste

$$f' + \rho Y' = 0$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1931.

(2) *Geometria nello spazio hilbertiano.*

(3) «Bollettino della Unione matematica italiana», 15 giugno 1928.

ou en posant $-\frac{1}{\rho} = b$

$$(2) \quad Y' = bf'$$

d'où

$$(3) \quad Y = Y_0 + \int_{s_0}^s bf' ds$$

en posant

$$Y_0 = Y(t, s_0) \quad f'_0 = f'(t, s_0)$$

avec les conditions

$$(4) \quad \int_G Y^2 dt = 1 \quad (5) \quad \int_G Yf' dt = 0$$

et l'hypothèse

$$(6) \quad \int_G Y_0^2 dt = 1 \quad (6 \text{ bis}) \quad \int_G Y_0 f'_0 dt = 0.$$

Substituons (3) dans (4) en tenant compte de (6)

$$\int_G Y^2 dt = \int_G Y_0^2 dt + \int_G \left(2 Y_0 + \int_{s_0}^s bf' ds \right) \int_{s_0}^s bf' ds dt = 1$$

ou

$$(7) \quad \int_G \left(2 Y_0 + \int_{s_0}^s bf' ds \right) \int_{s_0}^s bf' ds dt = 0.$$

Supposons applicable la dérivation sous le signe \int par rapport à s .

$$(8) \quad \int_G \left(Y_0 + \int_{s_0}^s bf' ds \right) f' dt = 0$$

car b fonction de s sort du signe \int .

Y_0 étant connu, $g(s) = - \int_G Y_0 f' dt$ est aussi une fonction connue de s .

(8) peut s'écrire

$$(9) \quad \int_G f' \int_{s_0}^s bf' ds dt = g(s)$$

équation intégrale qui détermine b . Une dérivation par rapport à s donne

$$(10) \quad b + \int_G f'' \int_{s_0}^s b f' ds dt = g'(s) = - \int_G Y_0 f'' dt$$

qui vu l'hypothèse $g(s_0) = 0$ d'après (6 bis) n'est pas plus générale que (9). Cette équation intégrale a une solution unique.

Si on l'écrit

$$(11) \quad b = g'(s) + k \int_G f'' \int_{s_0}^s b f' ds dt$$

et si on y substitue

$$(12) \quad b = b_0 + k h_1 + k^2 h_2 + \dots + k^n h_n + \dots$$

il vient par identification des coefficients

$$(13) \quad b_0 = g'(s) \quad b_1 = \int_G f'' \int_{s_0}^s b_0 f' ds dt \dots h_n = \int_G f'' \int_{s_0}^s h_{n-1} f' ds dt.$$

La série (12) converge uniformément si g', f' et f'' restent bornés car si

$$|g'(s)| < a, \quad |f'| < b, \quad |f''| < c \quad (a, b, c \text{ constantes positives})$$

sur la portion de C considérée; soit $|k| = K$ et soit G la mesure de l'ensemble G . L'équation

$$(14) \quad H a + K b c \int_G \int_{s_0}^s H ds dt$$

fournit une majorante

$$H = a \left\{ 1 + K G b c (s - s_0) + \frac{[K G b c (s - s_0)]^2}{1.2} + \dots + \frac{[K G b c (s - s_0)]^n}{n!} + \dots \right\} = a e^{K G b c (s - s_0)}$$

(11) admet donc une solution donnée par (12) (13).

Cette solution est unique. Car soit $h(s) + l(s)$ une autre solution. $l(s)$ vérifie donc

$$l(s) + k \int_G f'' \int_{s_0}^s l(s) f' ds dt = 0$$

équation qui n'admet pas d'autre solution bornée que zéro.

Car soit $|l(s)| < d$ sur la portion de C considérée

$$l(s) = -k \int_G f'' \int_{s_0}^s l(s) f' ds dt$$

entraîne

$$|l(s)| < KGbcd |s - s_0| \quad |l(s)| < \frac{[KGbc(s - s_0)]^2}{1.2} d$$

et généralement

$$|l(s)| < \frac{[KGbc |s - s_0|]^n}{n!} d$$

on en conclut $l(s) = 0$.

2° *Propriétés.* — a) Considérons au même point P plusieurs normales $Y_1 \dots Y_p$ engendrant des développables; si ces normales sont dans un même plan, leurs points de contact sont alignés; et si ces normales sont dans un même E_n (espace euclidien à n dimensions) leurs points de contact sont dans un même E_{n-1} .

Regardons maintenant comme transformées l'une de l'autre le long de C les normales engendrant une même développable. Appelons (T) cette transformation.

b) Si on considère encore plusieurs normales $Y_1 \dots Y_p$ au même point la propriété d'appartenir à un même plan et plus généralement à un même E_n est conservée.

Il s'en suit qu'un plan normal et conservé et enveloppe une développable (surface polaire) lieu de ∞^1 développées qui sont des géodésiques de cette développable.

De même un E_n normal est conservé et enveloppe une V_n lieu de ∞^{n-1} développées qui sont des géodésiques de cette V_n .

Réciproquement si ∞^1 plans normaux enveloppent une développable, ce sont les transformées (T) d'un même plan normal.

Plus généralement si ∞^1 espaces euclidiens E_n normaux à C admettent une enveloppe à n dimensions, ce sont les transformées (T) d'un même E_n normal.

c) La transformation (T) conserve l'angle de 2 normales au même point.

Si on considère un E_m et un E_n normaux à C au même point, la transformation (T) conserve leurs droites formant les angles extrema ainsi que ces angles.

d) Soit $\psi(t)$ la fonction déterminant le point courant de l'espace hilbertien. L'équation

$$(15) \quad \int_G (\psi - f) f' dt = 0$$

définit l'hyperplan lieu de toutes les normales en un point P à C .

La position limite de son intersection avec l'hyperplan normal infiniment voisin est déterminée par

$$(16) \quad \int_G (\psi - f) f'' dt - 1 = 0$$

ou en posant $\psi = f + \rho Y$

$$\rho \int_G Y f'' dt - 1 = 0$$

c'est l'équation déterminant le point de contact sur chaque normale

$$\frac{1}{\rho} = -h = \int_G Y f'' dt$$

qu'on tire de (2): formule déjà donnée par M. G. Aliprandi (loc. cit.). Le système (15) (16) détermine un hyperbiplan engendrant une hyperdéveloppable: lieu de toutes les développées.

Matematica. — *Sull'espressione generale dei funzionali analitici lineari.* Nota⁽¹⁾ di L. FANTAPPIÈ, presentata dal Socio F. SEVERI.

1. In una Nota del Caccioppoli, apparsa in questi « Rendiconti »⁽²⁾, si espone una nuova dimostrazione di una formula integrale, da me data per l'espressione generale di un funzionale analitico lineare.

Desidero far osservare che, pur prescindendo da qualche inesattezza in cui egli è caduto, e di cui dirò, la dimostrazione del Caccioppoli non può sostituire la mia, perchè essa è fondata sopra una definizione dei funzionali lineari, che comprende proprietà ch'io non suppongo, ma deduco.

Infatti, in una Memoria dei Lincei (da lui citata)⁽³⁾, io definisco un *funzionale analitico localmente* $F[y(t)]$ con la condizione semplicissima che

a) la funzione $f(\alpha) = F_t[y(t, \alpha)]$ sia sempre analitica, se la $y(t, \alpha)$ è funzione analitica anche di α , oltre che di t (per maggiori precisazioni, vedi F. A., cap. I, n. 10 e 11).

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1931.

(2) R. CACCIOPPOLI, *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche*, « Rend. Lincei », serie 6^a, vol. XIII, fasc. 4, 1^o sem., 1931.

(3) L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Mem. Lincei », serie 6^a, vol. III, fasc. 11, 1928-1930. Questa Memoria sarà indicata più brevemente, nel seguito, con F. A.

Definisco poi i funzionali analitici *lineari* con la sola condizione (proprietà distributiva rispetto alla somma)

$$b) \quad F[y_1(t) + y_2(t)] = F[y_1(t)] + F[y_2(t)].$$

Da queste due proprietà *a)* e *b)*, caratteristiche dei funzionali lineari analitici localmente, seguono le seguenti altre proprietà:

$$1) \quad F[\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 F[y_1(t)] + \alpha_2 F[y_2(t)]$$

per α_1 e α_2 costanti complesse qualunque (per la dimostrazione, vedi F. A., cap. II, n. 22, formula [18]);

2) il campo di definizione H di un tale funzionale lineare $F[y(t)]$ è dato da tutte e sole le funzioni analitiche $y(t)$, regolari nei punti di un certo insieme chiuso A , opportunamente definito (per la dimostrazione, vedi F. A., cap. II, n. 27);

3) il valore di F per una qualunque funzione $y(t)$ di questo campo H è dato dalla formula integrale in questione, cioè da

$$(I) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C v(t) y(t) dt$$

ove

$$v(\alpha) = F_t \left[\frac{1}{t - \alpha} \right]$$

è la funzione « indicatrice » di F , definita per tutti i valori che non appartengono all'insieme chiuso A , di cui è parola in 2), mentre C è una opportuna curva chiusa orientata del piano-sfera complesso (curva « separatrice »), che lascia da una parte l'insieme A , e tutto un dominio D , in cui la $y(t)$ si mantiene regolare (per la dimostrazione, vedi F. A., cap. II, n. 33, formula [116]).

Dalla formula integrale (I) segue poi immediatamente che

4) se una successione $y_n(t)$ di funzioni regolari in D tende uniformemente, in questo campo, a una funzione $y(t)$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F[y_n(t)] = F[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)] = F[y(t)]$$

(la dimostrazione è data in F. A., cap. II, n. 36, per le serie, a cui possono sempre ridursi le successioni).

Ora il Caccioppoli, nella sua Nota, sostituisce alla definizione di funzionale analitico lineare, da me data con le due proprietà *a)* e *b)*, una nuova definizione. Egli considera infatti quei funzionali F , i quali, per ipotesi, già soddisfanno alle proprietà 1), 2), 4), che io invece deduco dalle *a)* e *b)*; e muovendo dalle 1), 2), 4) egli dimostra poi la proprietà 3) sul fonda-

mento di una nota formula di Riesz, la cui dimostrazione richiederebbe peraltro la conoscenza della teoria dei funzionali nel campo reale, teoria che può apparire estranea a queste considerazioni, le quali si svolgono nel campo analitico complesso.

2. Si può osservare inoltre che, quando una funzione $y(t, \alpha)$ è olomorfa per t in D (contenente A) e α mobile su un cammino regolare L , l'integrale

$$\int_L y(t, \alpha) d\alpha = y(t)$$

può considerarsi come limite di una conveniente successione di sommatorii $y_n(t) = \sum y(t, \bar{\alpha}_r) \Delta \alpha_r$, che tenda a $y(t)$ uniformemente, qualunque sia t in D . Quindi, una volta ammessa, per definizione, la proprietà 4), si ha

$$\begin{aligned} \int_L F[y(t, \alpha)] d\alpha &= \lim \sum F[y(t, \bar{\alpha}_r)] \Delta \alpha_r = \lim F \left[\sum y(t, \bar{\alpha}_r) \Delta \alpha_r \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F[y_n(t)] = F \left[\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \right] = F \left[\int_L y(t, \alpha) d\alpha \right] \end{aligned}$$

cioè dalla 4) segue immediatamente la permutabilità dell'operatore funzionale F con l'operatore funzionale \int .

Ma allora, partendo sempre dalle 1), 2), 4) come fa il Caccioppoli, si può ulteriormente accorciare la già breve dimostrazione che egli dà della formula (I), senza nemmeno invocare la formula di Riesz. Se infatti una funzione $y(t)$, per cui si vuol calcolare il funzionale lineare F , è olomorfa in D , contorno C incluso, potremo sempre trovare un dominio \bar{D} , un poco più ampio, contenente D nel suo interno, ove la $y(t)$ sia ancora olomorfa, e se indichiamo con \bar{C} il suo contorno (regolare), percorso in modo da lasciare i punti interni di \bar{D} alla destra, la $y(t)$ sarà data, in ogni punto t , interno a \bar{D} , quindi, in particolare, in ogni punto di D , dalla formula di Cauchy

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{y(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha.$$

Ma poichè la funzione integranda è olomorfa per t in D e α su \bar{C} , per la permutabilità di F con l' \int , si ha subito la (I), cioè

$$\begin{aligned} F[y(t)] &= \frac{1}{2\pi i} F \left[\int_{\bar{C}} \frac{y(\alpha)}{t - \alpha} d\alpha \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} F \left[\frac{y(\alpha)}{t - \alpha} \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} v(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Quindi, una volta ammessa, *per definizione*, la proprietà 4), e la conseguente permutabilità di F con f , la formula (I) si ricava in modo banale dallo scambio di questi due operatori, come del resto è indicato anche nella mia Memoria (vedi F. A., cap. II, n. 33, fine); *mentre invece questa permutabilità (o la proprietà 4) da cui deriva) non è stata dimostrata, per una via indipendente, partendo dalle due proprietà a) e b), che io assumo come definizione dei funzionali lineari analitici localmente* (nella mia Memoria F. A., cap. II, n. 24 si richiama anzi esplicitamente l'attenzione del lettore su questo fatto).

La dimostrazione data dal Caccioppoli della formula (I) non è dunque affatto confrontabile con la mia, poichè, come ho detto, è ottenuta con un cambiamento radicale della definizione dei funzionali che si considerano, e cioè introducendo nella definizione stessa proprio quella proprietà 4), che è pressochè equivalente alla formula da dimostrare.

Nella definizione del Caccioppoli si introducono altresì vari altri risultati delle mie ricerche, come quelli sulla natura del campo H , ove è definito un funzionale lineare (proprietà 2)), e sul comportamento delle funzioni all'infinito, che sembra piuttosto strano di assumere *a priori* in una definizione, senza una giustificazione plausibile.

3. Questo per quanto riguarda la sostanza del lavoro del Caccioppoli. Quanto alla sua asserzione, contenuta nella nota a piè di pagina 263, che io limiti le mie considerazioni alle sole funzioni monodrome, essa appare veramente curiosa, poichè nella mia Memoria si trova un intero capitolo (F. A., cap. V), in cui lo studio dei funzionali lineari viene esteso a funzioni e funzionali *polidromi*. Più precisamente, nel n. 79 di quel capitolo, pag. 149 e seg., si tratta appunto dell'applicazione dei funzionali lineari *alle funzioni polidrome* ⁽¹⁾.

Infine, nella Nota del Caccioppoli, partendo da una funzione $\varphi(\xi)$ continua sul contorno C di un dominio D , si definisce in corrispondenza una funzione $f(z)$, olomorfa entro D , con la formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

e si afferma che, quando $f(z)$ risulta olomorfa anche sulla frontiera C di D , si ha, su C , $f(\xi) = \varphi(\xi)$. Ora ciò non è esatto; basta infatti prendere per $\varphi(\xi)$ i valori assunti su C da una funzione analitica $\varphi(z)$, olo-

(1) Alle restanti asserzioni, contenute nella stessa nota a piè di pagina, non posso rispondere perchè non risulta chiaro in qual modo l'A. interpreti le mie definizioni, soprattutto nei riguardi dell'inversione dell'operazione funzionale considerata con l'operazione di limite.

morfa su C , che abbia però un punto singolare entro D , perchè la funzione $f(\zeta)$ corrispondente risulti olomorfa entro D e sulla frontiera C , ma, ciò nonostante, su C sia sempre $f(\xi) = \varphi(\xi)$, tranne al più un numero finito di punti (gli eventuali zeri, su C , della parte principale $p(\zeta)$ di $\varphi(\zeta)$ nell'intorno del punto singolare interno a D , essendo $f(\zeta) = \varphi(\zeta) - p(\zeta)$).

Matematica. — *Sur les fonctions n -metaharmoniques de p variables.* Nota ⁽¹⁾ di M. GHERMANESCO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Soit u une fonction réelle, n -metaharmonique du point $P(x_1, x_2, \dots, x_p)$, définie dans un domaine quelconque D , de l'espace à p dimensions, c'est à dire, satisfaisant à l'équation suivante aux dérivées partielles

$$(1) \quad \Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \lambda_2 \Delta^{n-2} u + \dots + \lambda_n u = 0$$

les λ étant des constantes arbitraires et où l'on a mis

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$$

avec

$$\Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1}) \dots \Delta^1 = \Delta.$$

Je me propose de retrouver par une méthode qui n'emploie pas la formule de Green, les principaux résultats trouvés par M. J. Pierre Robert ⁽²⁾, les compléter et ensuite, étendre aux fonctions n -metaharmoniques les résultats que M. Miron Nicolesco vient d'établir pour les fonctions metaharmoniques ⁽³⁾ et harmoniques d'ordre p ⁽⁴⁾.

2. J'emploierai, pour la démonstration, la même formule dont s'est servi M. M. Nicolesco ⁽⁵⁾, c'est à dire la formule suivante, due à M. N. Cioranescu ⁽⁶⁾, qui donne la valeur moyenne d'une fonction $u(P)$, admettant

(1) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1931.

(2) J. PIERRE-ROBERT, « Comptes-rendus », Paris 1930, tome 191, p. 193 et 1931, tome 192, pp. 326 et 1146-1148.

(3) M. NICOLESCO, *Sulle funzioni metaharmoniche in n variabili*, « Rendiconti Accad. Lincei », vol. XII, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 11, pp. 553-558.

(4) M. NICOLESCO, *Extension du théorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre p* , « C. R. », Paris 191, pp. 515-517.

(5) Loc. cit., n. 2.

(6) N. CIORANESCU, *Sur quelques valeurs moyennes des fonctions et leurs applications*, « Bull. Mathématique de la Société Roumaine des Sciences », vol. 31, pp. 175-181.

La formule (2) ou (3) est applicable, car la fonction $u(P)$ admet des dérivées partielles jusqu'au $2n^e$ ordre; elle en admettra de tous les ordres, par la suite de l'équation (1).

A cet effet, donnons à m dans (5) toutes les valeurs $m = 0, 1, 2, \dots$, multiplions les relations (5) ainsi obtenues (la première colonne) respectivement par

$$\frac{\rho^m}{m! \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{p}{2} + m - 1 \right)} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

et ajoutons; en désignant par μ_i la fonction

$$(6) \quad \mu_i = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\rho \alpha_i)^m}{m! \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{p}{2} + m - 1 \right)}$$

on aura la relation

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \mu & u & \Delta u & \Delta^2 u & \dots & \Delta^{n-1} u \\ \mu_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \mu_2 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la relation que nous voulions obtenir et qui est bien une généralisation de la formule classique de Gauss. En y faisant $n = 1$, il reste

$$\mu = \mu_1 \cdot u$$

qui n'est autre chose que la relation (4), trouvée par M. M. Nicolesco ⁽¹⁾ dans le cas des fonctions metaharmoniques. La relation (7) en toute sa généralité n'est autre que la formule établie ⁽²⁾ par M. J. Pierre Robert sous la forme générale

$$(7') \quad \mu = \Phi_1(\rho) u(p) + \Phi_2(\rho) \Delta u(p) + \dots + \Phi_n(\rho) \Delta^{n-1} u(p)$$

(1) Loc. cit., p. 1.

(2) « C.-R. », t. 192, p. 326 et suiv.

mais on voit que notre relation a l'avantage de montrer plus clairement la structure intime qui lie la moyenne μ à la fonction u et aux laplaciens $\Delta u, \dots \Delta^{n-1} u$.

3. On s'assure aisément que les fonctions μ_i , définies par (6) vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \quad \Delta \mu_i = \alpha_i \mu_i$$

ou, en considérant les μ_i comme fonctions de ρ

$$(9) \quad \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{-\frac{p}{2}+2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{\frac{p}{2}-1} \mu_i \right) \right] = \alpha_i \mu_i.$$

4. L'équation (8) permet encore de montrer que les fonctions Φ_i sont aussi n -metaharmoniques, c'est à dire, vérifient la même équation (1).

Considérons, par exemple, la fonction $\Phi_1(\rho)$.

$$\Phi_1(\rho) = \begin{vmatrix} \mu_1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \mu_2 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mu_n & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

on trouve facilement, en tenant compte de (8)

$$\Delta^k \Phi_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1^k \mu_1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \alpha_2^k \mu_2 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_n^k \mu_n & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$, en multipliant les $\Delta^k \Phi_1$ ainsi obtenus, respectivement par $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1$ et en ajoutant, on obtient dans le premier membre, le premier membre de (1) où l'on a remplacé u par Φ_1 ; le deuxième peut s'écrire sous la forme d'un déterminant dont les éléments de la première colonne sont nuls, en vertu de l'équation (4).

5. Les fonctions Φ_i sont liées, comme l'a montré M. J. Pierre Robert par la relation

$$(10) \quad \Phi_i = \Delta \Phi_{i+1} + \lambda_{n-i} \Phi_n$$

mais qui doit être complétée par la suivante

$$(11) \quad \Delta \Phi_n = -\lambda_n \Phi_n.$$

L'élimination des fonctions Φ_i dans (10) et (11) à l'exception d'une seule, permet aussi de retrouver le résultat établi au § 4, savoir que les fonctions Φ_i sont n -metaharmoniques.

6. Dans le même ordre d'idées, on peut établir aisément un théorème qui est le réciproque de celui exprimé par la relation (7).

Si la fonction $u(P)$ bornée et intégrable dans D et sur toute hypersphère γ contenue, satisfait à la relation suivante

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \mu & u & \Delta u & \Delta^2 u & \dots & \Delta^{n-1} u \\ \varphi_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \varphi_2 & a_{21} & a_{22} & & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \varphi_n & a_{n1} & a_{n2} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

dans laquelle μ est la moyenne de la fonction u sur la surface de l'hypersphère de centre P et de rayon R , contenue dans D , $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des séries de puissances de $R^2 = 4\rho$, à rayons de convergence non nuls et les a_{ik} sont de constantes, à déterminant non nul, alors la fonction u est n -metaharmonique dans D .

Dans les conditions de l'énoncé, on démontre aisément que la fonction $u(P)$ admet des dérivées partielles de tout ordre et par suite, on peut lui appliquer la formule (2) ou (3).

En posant

$$\varphi_i = \sum_{k=0}^{\infty} A_{ik} \rho^k$$

et en remplaçant dans (12) μ par (2) et les φ_i par ces expressions, on décompose le déterminant (12) en une série en ρ , dont les coefficients des puissances de ρ sont des déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} B_m \Delta^m u & u & \Delta u & \dots & \Delta^{n-1} u \\ A_{1m} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_{2m} & a_{21} & & \dots & \\ \vdots & & & & \\ A_{nm} & a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

avec

$$B_m m! \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{p}{2} + m - 1 \right) = 1$$

déterminants qui sont tous nuls car la relation (12) a lieu quel que soit p dans D , ce qui montre bien qu'entre $u, \Delta u, \dots$ il y a une relation de la forme (5) qui, par identification, remonte à (1).

On peut établir de la même manière un théorème encore plus général, en remplaçant dans (12) les $u, \Delta u, \dots, \Delta^{n-1} u$, par des fonctions v_1, v_2, \dots, v_n du point $P(x_1, x_2, \dots, x_p)$. On en conclut encore que u est une fonction n -metaharmonique et que l'on a

$$v_i = p_i \Delta^{i-1} u$$

p_i étant des constantes, de même que

$$\varphi_i = k_i \mu_i$$

k_i étant également des constantes.

7. En suivant point par point la démonstration donnée par M. M. Nicolesco ⁽¹⁾ on établit un théorème sur l'unicité du prolongement des fonctions n -metaharmoniques, savoir

Si une fonction $u(P)$ est n -metaharmonique dans un domaine D de l'espace à p dimensions et si elle peut être prolongée en dehors de D , le prolongement est unique.

8. Désignons par μ^1, μ^2, \dots les moyennes successives de la fonction u , liées par la relation

$$(a) \quad \mu^i = \frac{p}{R^p} \int_0^R \mu^{i-1} R^{p-1} dR$$

(1) Loc. cit., pp. 557-558.

avec $\mu^0 = \mu$, donnée par (2). Soient, de même

$$(b) \quad \Phi_k^i = \frac{p}{R^p} \int_0^R \Phi_k^{i-1} R^{p-1} dR$$

avec $\Phi_k^0 = \Phi_k$. On a, d'après (7')

$$\mu^i = \Phi_1^i u(P) + \Phi_2^i \Delta u(P) + \dots + \Phi_n^i \Delta^{n-1} u(P).$$

En écrivant toutes les relations obtenues en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ et en y éliminant $\Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^{n-1} u$, on trouve la relation

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_n \\ \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & \dots & \Phi_n^1 \\ \Phi_2^1 & & \dots & \\ \vdots & & & \\ \Phi_1^{n-1} & \dots & \Phi_n^{n-1} \end{vmatrix} u(P) = \begin{vmatrix} \mu & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots & \Phi_n \\ \mu^1 & \Phi_2^1 & \Phi_3^1 & & \\ \mu^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu^{n-1} & \Phi_2^{n-1} & \Phi_3^{n-1} & \dots & \Phi_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

qui est une nouvelle généralisation du théorème de Gauss, en même temps que la généralisation d'un théorème analogue, établi par M. M. Nicolesco pour les fonctions harmoniques d'ordre n ⁽¹⁾.

9. Réciproquement, si la fonction $u(P)$, sommable dans D , satisfait à une relation (13), quel que soit le point P et le rayon R dans D , alors elle est n -metaharmonique dans D .

On écrit (13) sous la forme d'un seul déterminant, que l'on développe suivant les puissances de R^2 , dont les coefficients, égaux à zéro, conduisent à des relations telles que (5) et, par conséquent, à (1).

Le théorème 9 est en somme une extension pour les fonctions n -metaharmoniques, d'un théorème de E. E. Levi ⁽²⁾.

10. Enfin, par des procédés absolument analogues, on peut établir le théorème suivant, qui est l'extension d'un théorème de M. P. Montel ⁽³⁾, aux fonctions n -metaharmoniques de p variables:

(1) Loc. cit., p. 1.

(2) E. E. LEVI, *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*, « Rendiconti Lincei », 18, 1909, pp. 10-15.

(3) P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions*, « Thèse », Paris 1907.

Soit

$$u_1(P), u_2(P) \cdots u_n(P)$$

une suite de fonctions n -metaharmoniques, bornées dans D . Si cette suite est convergente dans D , elle convergera uniformément à l'intérieur de D , vers une fonction $u(P)$, n -metaharmonique. De plus, toute dérivée partielle de $u_n(P)$ convergera uniformément vers la dérivée du même ordre de $u(P)$.

Il suffit même, comme l'a remarqué M. P. Montel dans le travail cité, que la convergence ait lieu pour une infinité de points formant un ensemble partout dense dans D , pour que le théorème subsiste entièrement.

Matematica (Calcolo delle probabilità). — *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali*. Nota ⁽¹⁾ di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Scopo della presente Nota è di risolvere alcune questioni che avevo poste in una Nota precedente ⁽²⁾, e che si riferivano allo stesso argomento: quello di studiare i legami tra le proprietà fisiche di una legge istantanea d'incrementi aleatori ⁽³⁾ e la forma analitica della corrispondente funzione caratteristica. Osserviamo, per giustificare l'importanza della presente ricerca, che la conoscenza di detta forma analitica e del suo significato fisico è necessaria per proseguire nella risoluzione dei problemi pratici sull'argomento, che ho finora soltanto impostati ⁽⁴⁾.

Avevo dimostrato nella Nota precedente che le funzioni caratteristiche di legge istantanea (formalmente: le funzioni $\psi(t)$ tali che $\psi^\lambda(t)$ è, per ogni $\lambda > 0$, una funzione caratteristica ⁽⁵⁾), sono tutte e sole le funzioni del tipo J:

$$e^{p[\chi(t)-1]} \quad \text{con } p > 0, \quad \chi(t) \text{ funzione caratteristica,}$$

o del tipo J', delle funzioni limiti di funzioni del tipo precedente (considerando la convergenza uniforme in ogni intervallo finito). Dopo avere

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 agosto 1931.

(2) *Le funzioni caratteristiche di legge istantanea*, « Rend. Lincei », 1930, 2° sem.

(3) V. *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, « Rend. Lincei », 1929, 2° sem.; cfr. anche: *Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge d'incrementi aleatori e Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio*, id. id.

(4) Cfr. *Le leggi differenziali e la rinunzia al determinismo*, « Rend. Sem. Mat. di Roma », Conferenza del 5 aprile 1930.

(5) Se $\Phi(\xi)$ è funzione reale mai decrescente, $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, si dice funzione caratteristica corrispondente la $\psi(t) = \int e^{it\xi} d\Phi(\xi)$ (integrale di SIELTJES); una funzione $\psi(t)$ si dice che è una funzione caratteristica se è ottenibile nel modo indicato da una Φ del tipo precedente.

anche dato un criterio per distinguere, fra le funzioni del tipo J' , quelle del tipo (più particolare) J , terminavo accennando tre questioni che rimanevano aperte per esaurire lo studio del problema. Nella presente Nota vengono risolte due di queste tre questioni, e completata inoltre la precedente ricerca. Precisiamo brevemente i risultati. Considerata all'uopo la distribuzione di masse per un asse ξ individuata dalla funzione caratteristica $\psi^\lambda(t)$, sia $\Phi_\lambda(t)$ la funzione di ripartizione (= massa tra $-\infty$ e ξ , con che $\psi^\lambda(t) = \int e^{i\xi t} d\Phi_\lambda(\xi)$), e indichiamo con $\alpha(\lambda) = \Phi_\lambda(+0) - \Phi_\lambda(-0)$ la massa concentrata nell'origine. Avevo dimostrato che condizione caratteristica perchè una funzione J' sia una funzione J è che esista un $p > 0$ tale che $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$; dimostro ora che la semplice condizione $\alpha(\lambda) > 0$ (per ogni $\lambda > 0$) equivale alla precedente, e che, considerando la funzione caratteristica, ciò equivale a supporre $|\log \psi(t)|$ funzione limitata, ossia $|\psi(t)|$

limitata tra estremi positivi, od ancora $\frac{1}{t} \log \psi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Venendo alle due questioni nuove: quella di caratterizzare le funzioni (ovviamente del tipo J') prodotto di una funzione del tipo J per e^{ikt} (con k reale e $\neq 0$) è risolta dalla condizione $\frac{1}{t} \log \psi(t) \rightarrow ik$, e quella di caratterizzare le funzioni che individuano una distribuzione di masse con delle masse concentrate (in punti o valori eccezionali di ξ) è risolta riconoscendo che esse si identificano effettivamente colle precedenti, come avevo affermato presumibile.

1. Sia $\psi(t)$ una funzione del tipo J :

$$\psi(t) = e^{p[\chi(t)-1]} \quad \text{con} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} \chi(t) dt = 0,$$

come è sempre lecito supporre. Si sa allora che $\alpha(\lambda) \geq e^{-p\lambda}$, e $\alpha'(0) = -p$. Abbiamo $|\log \psi(t)| = p |\chi(t) - 1| \leq 2p$ poichè, per ogni funzione caratteristica, è sempre $|\chi(t)| \leq 1$. Se $\psi(t)$ è del tipo J , è quindi $|\log \psi(t)|$ limitata, e il massimo è $\leq 2p$. Supponiamo inversamente $|\log \psi(t)| < k$, e quindi $|\log \psi^\lambda(t)| < k\lambda$. Avendosi ⁽¹⁾ $|\log(1+x)| \geq \log(1+|x|)$, scende ancora $|\psi^\lambda(t) - 1| < e^{k\lambda} - 1$, e quindi

(1) Considerando infatti $u = \log \chi$ come vettore del piano complesso funzione del punto χ , si ha $d u^2 = 2u \times du$, $du = d \log \chi = \frac{d\chi}{\chi}$. Ponendo $\chi = Re^{i\varphi} = 1 + \rho e^{i\theta}$, ed eseguendo la derivazione lungo il cerchio $\rho = \text{cost.}$ si ha $d\chi = i\rho e^{i\theta} d\theta = i(\chi - 1) d\theta$, e $\frac{du}{d\theta} = i \frac{\chi - 1}{\chi} = i \left(1 - \frac{1}{R} e^{-i\varphi} \right) = -\frac{1}{R} \sin \varphi + i \left(1 - \frac{1}{R} \cos \varphi \right)$ mentre $u = \log R + i\varphi$.

Eseguito il prodotto scalare $R \frac{du^2}{d\theta} = -\log R \sin \varphi + \varphi (R - \cos \varphi)$; si tratta di dimo-

$$1 - \alpha(\lambda) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} [1 - \psi^\lambda(t)] dt \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} |1 - \psi^\lambda(t)| dt \leq \\ \leq (e^{k\lambda} - 1) \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} dt = e^{k\lambda} - 1.$$

La condizione $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$ è soddisfatta; osservando che basta naturalmente supporla verificata in un intorno a destra di $\lambda = 0$, si può addirittura concludere che $p = \alpha'(0) \leq k$. E concludiamo: condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione J' sia una funzione J è che $|\log \psi(t)|$ sia limitata; il massimo di $|\log \psi(t)|$ è poi compreso tra p e $2p$.

La condizione equivale anche a $\frac{1}{t} \log \psi(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Tale asserzione cadrebbe in difetto nel solo caso che, per qualche valore di t , $|\log \psi(t)|$ diventasse infinito, e vedremo che ciò è impossibile. Non può infatti $|\psi(t)|$ diventare infinito, essendo per ogni funzione caratteristica $|\psi(t)| \leq 1$, e non può nemmeno annullarsi, trattandosi di una funzione caratteristica di legge istantanea. Supponendo infatti $\psi(t) = 0$, sarebbe $\psi^\lambda(t) = 0$ per ogni $\lambda > 0$, mentre che, per $\lambda \rightarrow 0$, $\psi^\lambda(t)$ deve tendere uniformemente ad 1 in ogni intervallo limitato ⁽¹⁾.

2. Sia ora $\psi(t)$ prodotto di e^{ikt} per una funzione $\bar{\psi}(t)$ del tipo J; per $t \rightarrow \infty$ avremo $\frac{1}{t} \log \psi(t) = \frac{1}{t} ikt + \frac{1}{t} \log \bar{\psi}(t) \rightarrow ik$. E inversamente, se $\frac{1}{t} \log \psi(t) \rightarrow ik$, posto $\bar{\psi}(t) = \psi(t) e^{-ikt}$ si ha che $\frac{1}{t} \log \bar{\psi}(t) \rightarrow 0$, $\bar{\psi}$ è una funzione J, e ψ è il prodotto di e^{ikt} per una funzione J. La seconda questione è pertanto immediatamente risolta.

3. Passiamo infine a dimostrare che le funzioni caratteristiche di legge istantanea $\psi(t)$ che ammettono dei valori eccezionali sono tutte e sole le

strare che tale derivata è sempre positiva per $0 < \varphi < \pi$. Distinguiamo tre casi: $R < \cos \varphi$, $\cos \varphi < R < 1$, $R > 1$. Nel 2° caso i due termini sono positivi; nel 1° caso è negativo il II termine, ma prevale il segno positivo del I:

$$-\varphi (R - \cos \varphi) < \operatorname{tg} \varphi (\cos \varphi - R) < (1 - R) \operatorname{sen} \varphi < -\log R \operatorname{sen} \varphi;$$

nel 3° caso è negativo il I termine, ma prevale il segno positivo del II:

$$\varphi (R - \cos \varphi) > \operatorname{sen} \varphi (R - \cos \varphi) > (R - 1) \operatorname{sen} \varphi > \log R \operatorname{sen} \varphi.$$

Non so se questa disuguaglianza sia nota, e se esistano dimostrazioni più elementari.

(1) Ciò sembra evidente per il significato della questione nella teoria delle funzioni a incremento aleatorio, ma sarebbe bene dimostrarlo. Una dimostrazione immediata si ha supponendo finito lo scostamento quadratico medio

Non volendo usare di questa proprietà, non ancora dimostrata, il criterio che daremo al n. 2 va completato aggiungendo che $|\log \bar{\psi}(t)|$ deve risultare limitato.

funzioni del tipo $e^{ikt} J$. Che una funzione caratteristica del tipo $e^{ikt} J$ ammetta sempre almeno il valore eccezionale $\xi = k$ è ovvio; meno agevole è dimostrare inversamente che se una funzione caratteristica di legge istantanea $\psi(t)$ ammette un valore eccezionale, essa è del tipo predetto.

Dobbiamo richiamare qualche proprietà. Se ψ_1 e ψ_2 sono funzioni caratteristiche, la funzione caratteristica $\psi_1 \psi_2$ ammette dei valori eccezionali se e soltanto se tanto ψ_1 che ψ_2 ne ammettono; in tal caso i valori eccezionali di $\psi_1 \psi_2$ sono i valori del tipo $\xi_1 + \xi_2$ ove ξ_1 è valore eccezionale per ψ_1 e ξ_2 per ψ_2 . La massa concentrata in un valore eccezionale ξ di $\psi_1 \psi_2$ è $\sum_b p_b q_b$ ove p_b è la massa concentrata nel valore eccezionale ξ_b relativo a ψ_1 e q_b quella di $\xi - \xi_b$ relativa a ψ_2 ($q_b = 0$ se $\xi - \xi_b$ non è valore eccezionale per ψ_2). Ne scende che la massima massa concentrata relativa a $\psi_1 \psi_2$ è non maggiore della massima massa concentrata di ψ_1 nè di quella di ψ_2 , e che, essendo P e Q la somma delle masse concentrate relative a ψ_1 e ψ_2 è PQ la somma delle masse concentrate relative a $\psi_1 \psi_2$. Nel nostro caso, in cui si considerano le potenze ψ^λ , si ha in particolare che il totale delle masse concentrate relative a ψ^λ è della forma e^{-s^λ} con s costante; appare poi ⁽¹⁾ che di valori eccezionali ce n'è o nessuno, o uno solo, o un'infinità numerabile (mentre per altre funzioni caratteristiche, non di legge istantanea, se ne potrebbe anche avere un numero finito qualunque).

Cominciamo dal caso che ψ sia funzione pari, $\psi(-t) = \psi(t)$, ossia che la distribuzione di masse che essa individua sia simmetrica:

$$\Phi(-\xi) = 1 - \Phi(\xi);$$

allora anche ψ^λ è pari, ossia $\Phi_\lambda(\xi)$ legge simmetrica, qualunque sia λ . Tra i valori eccezionali figura certamente, qualunque sia λ , l'origine $\xi = 0$, perchè se ξ_0 è valore eccezionale di $\psi^{\frac{1}{2}\lambda}$, lo è anche $-\xi_0$, per l'ipotesi della simmetria, e per $\psi^\lambda = \psi^{\frac{1}{2}\lambda} \cdot \psi^{\frac{1}{2}\lambda}$ si ha così il valore eccezionale $\xi_0 - \xi_0 = 0$. È anzi nell'origine che si ha la massima massa concentrata: dette p_b le masse concentrate nei singoli valori eccezionali ξ_b relativi a $\psi^{\frac{1}{2}\lambda}$, tale massa, che già abbiamo indicato $\alpha(\lambda)$, è $\sum_b p_b^2$, manifestamente non minore di qualunque altra somma di prodotti $\sum_b p_b p_{r_b}$; poichè la massima massa concentrata diminuisce moltiplicando fra loro delle funzioni caratteristiche, scende poi che $\alpha(\lambda)$ è funzione non crescente.

Sia ora ξ_b un valore eccezionale per ψ^{λ_0} ; esso è ovviamente valore eccezionale anche per ogni ψ^λ con $\lambda > \lambda_0$ (essendo zero un valore eccezionale per $\psi^{\lambda-\lambda_0}$). I valori eccezionali di ψ^λ fanno quindi parte di un'infinità nu-

(1) Cfr. Nota cit. *Sulla probabilità* ecc., p. 328, nota in calce.

merabile di valori $\xi_0 = 0, \pm \xi_1, \pm \xi_2, \dots, \pm \xi_n, \dots$ indipendenti da λ , ed è quindi

$$\psi^\lambda(t) = \alpha(\lambda) + \sum_h^\infty p_h(\lambda) [e^{i\xi_h t} + e^{-i\xi_h t}] \quad \text{ove } p_h(\lambda) \text{ è la massa concentrata in } \xi_h \text{ (e in } -\xi_h) \text{ relativa a } \psi^\lambda.$$

Ci proponiamo ora di dimostrare che per $\lambda \rightarrow 0$ è $\alpha(\lambda) \rightarrow 1$. Essendo $\alpha(\lambda) + 2 \sum_h p_h(\lambda) = e^{-\varepsilon \lambda}$ la somma delle masse concentrate, ciò equivale a dimostrare che $\sum_h p_h(\lambda) \rightarrow 0$. Ogni singola $p_h(\lambda)$ tende certamente a zero, perchè la massa concentrata in un punto assegnato ξ_h , considerata come funzionale di $\Phi, 0$, il che non cambia nulla, di ψ , è semicontinua superiormente; ciò significa che se una funzione caratteristica variabile converge verso una funzione caratteristica fissa, questa determina in ξ_h una massa concentrata non minore del limite della massa concentrata nello stesso punto relativa alla funzione variabile. Nel nostro caso, dato che, per $\lambda \rightarrow 0$, $\psi^\lambda \rightarrow 1$, e la funzione caratteristica $\equiv 1$ non ha altri valori eccezionali che l'origine ove è concentrata tutta la massa, si ha $p_h(\lambda) \rightarrow 0$. Però le $p_h(\lambda)$ sono un'infinità numerabile, e per poter concludere che è anche $\sum p_h(\lambda) \rightarrow 0$ occorre una nuova osservazione. Fissiamo un ε piccolo a piacere, e un valore arbitrario di λ , ad es. $\lambda = 1$; essendo $\sum_h p_h(1)$ convergente, esisterà un N tale che $\sum_{N+1}^\infty p_h(1) < \varepsilon \cdot \alpha(1)$. Per ogni $\lambda < 1$ avremo

$p_h(1) \geq p_h(\lambda) \alpha(1 - \lambda) \geq p_h(\lambda) \alpha(1)$ e quindi $\sum_{N+1}^\infty p_h(\lambda) < \varepsilon$. Ma $\sum_1^N p_h(\lambda) \rightarrow 0$, e quindi, pur di prendere λ sufficientemente piccolo, sarà $\sum_1^N p_h(\lambda) < \varepsilon$, $\sum_1^\infty p_h(\lambda) < 2\varepsilon$. Quindi $\sum_h p_h(\lambda) \rightarrow 0$, $\alpha(\lambda) \rightarrow 1$, c. v. d.

Rimane a provare che $\alpha(\lambda)$ tende a 1 in modo che esiste p tale che $\alpha(\lambda) \geq 1 - p\lambda$; avremo allora dimostrato (limitatamente al caso simmetrico) che la condizione $\alpha(\lambda) > 0$ equivale alla condizione $\alpha(\lambda) \geq 1 - p\lambda$ con $p > 0$. La composizione dei valori eccezionali di ψ^λ e ψ^μ dà per la massa relativa a $\psi^{\lambda+\mu}$ concentrata nell'origine il valore

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda + \mu) &= \alpha(\lambda) \alpha(\mu) + 2 \sum_h p_h(\lambda) p_h(\mu) \leq \alpha(\lambda) \alpha(\mu) + \\ &+ 2 [\sum_h p_h(\lambda)] [\sum_h p_h(\mu)] \leq \alpha(\lambda) \alpha(\mu) + \frac{1}{2} [1 - \alpha(\lambda)] [1 - \alpha(\mu)]. \end{aligned}$$

L'equazione funzionale

$$\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) \varphi(\mu) + \frac{1}{2} [1 - \varphi(\lambda)] [1 - \varphi(\mu)],$$

potendosi anche scrivere

$$\left\{ \frac{3}{2} \varphi(\lambda + \mu) - \frac{1}{2} \right\} = \left\{ \frac{3}{2} \varphi(\lambda) - \frac{1}{2} \right\} \left\{ \frac{3}{2} \varphi(\mu) - \frac{1}{2} \right\}$$

si riduce così a una forma nota che dà

$$\frac{3}{2} \varphi(\lambda) + \frac{1}{2} = e^{-c\lambda} \quad , \quad \varphi(\lambda) = \frac{1}{3} \{ 1 - 2e^{-c\lambda} \} .$$

L'analogia disuguaglianza per α assicura che, preso λ_0 in modo che $\alpha(\lambda_0) > \frac{1}{3}$ (ciò che è possibile poichè sappiamo che $\alpha(\lambda) \rightarrow 1$), e determinato c dalla relazione $\alpha(\lambda_0) = \frac{1}{3} (1 + 2e^{-c\lambda_0})$, deve avervi in particolare, per ogni λ del tipo $2^{-n}\lambda_0$, $\alpha(\lambda) \geq \frac{1}{3} \{ 1 - 2e^{-c\lambda} \} > 1 - \frac{2}{3} c\lambda$. La disuguaglianza $\alpha(\lambda + \mu) \geq \alpha(\lambda) \alpha(\mu)$ rende poi manifesto che se la disuguaglianza $\alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$ sussiste per un insieme di valori con limite inferiore nullo (come avviene nella precedente dimostrazione), essa vale per ogni λ . Si osservi che tale dimostrazione rende inutile la precedente quando si sappia che è, per almeno un valore λ , $\alpha(\lambda) > \frac{1}{3}$: allora essa mostra infatti che $\alpha(\lambda) \rightarrow 1$. Ma essa non basta invece ad escludere che possa essere sempre $0 < \alpha(\lambda) < \frac{1}{3}$.

4. Con ciò la trattazione del caso simmetrico è esaurita, stabilendo effettivamente i risultati enunciati; estendiamo ora le precedenti conclusioni al caso generale. Essendo $\psi^\lambda(t)$ una funzione caratteristica di legge istantanea dotata di valori eccezionali, lo è certamente anche $\psi^\lambda(t) \psi^\lambda(-t)$ che è funzione pari, e che determina quindi una distribuzione di masse che ha nell'origine una massa concentrata $\alpha(\lambda)$, tendente a 1 per $\lambda \rightarrow 0$. Sia λ_0 tale che $\alpha(\lambda_0) > a \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$; anche la massima massa concentrata di ψ^{λ_0} dev'essere allora $> a$, e sia essa concentrata nel punto $\xi = \xi_0$. Anche $\psi^{\frac{1}{2}\lambda_0}$ deve avere una massa concentrata $> a$, e si vede facilmente che essa non può che essere concentrata nel punto $\xi_1 = \frac{1}{2} \xi_0$. Infatti nel punto $2\xi_1$ la legge ψ^{λ_0} ha una massa concentrata $> a^2$, e avendosi $a^2 + a = 1$, si avrebbe concentrata nei due punti, supposti distinti, una massa > 1 , il che è assurdo.

Così procedendo si vede che per $\lambda = 2^{-n}\lambda_0$ la massa concentrata nel punto $\xi = \frac{\lambda}{\lambda_0} \xi_0$ è $> a$, e ciò vale anche per qualunque altro $\lambda < \lambda_0$.

Vale ad es. per $\lambda = \frac{3}{4}\lambda_0$, avendosi in $\frac{3}{4}\xi_0 = \frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{4}\xi_0$ una massa $> a^2$, e dovendosi avere d'altra parte almeno una massa concentrata $> a$, che non può essere altrove. Collo stesso ragionamento la proprietà si estende ad ogni $\lambda = m 2^{-n}\lambda_0 < \lambda_0$, e quindi a ogni $\lambda < \lambda_0$ per la semicontinuità superiore di cui gode tale massa come funzionale di $\bar{\psi}^\lambda(t)$ (definito qui appresso), e quindi anche come funzione di λ ⁽¹⁾.

Si ha, concludendo, una retta $\xi = \frac{\lambda}{\lambda_0}\xi_0$ di valori eccezionali per $\psi^\lambda(t)$,

e ci si riduce, considerando $\bar{\psi}^\lambda(t) = \psi^\lambda(t) \cdot e^{-i\frac{\lambda}{\lambda_0}\xi_0 t}$, al caso in cui si tratti della retta $\xi = 0$. Inoltre la massa $\bar{\alpha}(\lambda)$ concentrata in $\xi = 0$ relativa a $\psi^\lambda(t)$ è, per $\lambda < \lambda_0$, non minore dell'analogha massa $\alpha(\lambda)$ relativa alla funzione pari $\bar{\psi}(t)\bar{\psi}(-t) = \psi(t)\psi(-t)$, ed è quindi $\bar{\alpha}(\lambda) > \alpha(\lambda) > 1 - p\lambda$, $\bar{\alpha}(\lambda) > 1 - p\lambda$, c. d. d.

Meccanica. — *Onde elastiche nei mezzi anisotropi.* Nota ⁽²⁾ di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In questa Nota studio la propagazione di onde nei mezzi elastici anisotropi dotati di tre piani ortogonali di simmetria. L'equazione differenziale delle varietà caratteristiche (superficie d'onda) del sistema di equazioni alle derivate parziali che reggono i fenomeni di moto elastico coincide con quella cui si perviene nella ricerca degli assi dell'ellissoide di propagazione, salva l'interpretazione delle quantità che intervengono nelle formole. Dall'ellissoide ricordato prende le mosse il Beltrami ⁽³⁾ nella sua notevole Memoria sulla teoria delle onde (1886) per la determinazione delle velocità e direzioni di propagazione delle possibili onde piane propagantisi nel mezzo elastico considerato.

Qui, applicando i criteri adottati in Note precedenti ⁽⁴⁾, riesce possibile

(1) Dal ragionamento precedente segue: condizione caratteristica delle funzioni J è che sia, per almeno un λ , $\alpha(\lambda) > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \cong 0.618$. Tale limite numerico si può verosimilmente migliorare, e credo si potrebbe ridurre ad $e^{-1} = 0.368$; questo è infatti il massimo valore di una massa concentrata diversa dalla principale nel caso che mi sembra debba essere il più sfavorevole in proposito ($\max p_1(\lambda)$: cfr. la nota cit. *Sulla probabilità ecc.*, p. 328).

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1931.

(3) Cfr. E. BELTRAMI, « Opere », t. IV, pp. 224-235.

(4) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (6), vol. XIII, 1° sem., 1931, pp. 688-691; *Propagazione di onde nei mezzi elastici isotropi anche non omogenei*, ibidem, pp. 856-860.

trattare la questione delle propagazioni ondose nei mezzi elastici nella impostazione più generale.

2. Le equazioni differenziali generali del moto elastico si ottengono, come è noto, da quelle di un sistema qualunque (continuo) ammettendo che gli sforzi (componenti normali e tangenziali) siano le derivate di una funzione W (energia elastica) rapporto alle caratteristiche della deformazione.

Indicando con u, v, w le componenti dello spostamento che subisce il generico punto (x, y, z) del mezzo, all'istante t , per effetto delle forze deformatrici, la deformazione è caratterizzata dalle sei funzioni

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \epsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \\ \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} .\end{aligned}$$

Nei limiti di validità della legge di Hooke e nel caso di un mezzo anisotropo dotato di tre piani ortogonali di simmetria, la W è espressa dalla forma quadratica delle ϵ, γ

$$\begin{aligned}W &= 1/2 (A\epsilon_1^2 + B\epsilon_2^2 + C\epsilon_3^2 + 2A'\epsilon_2\epsilon_3 + 2B'\epsilon_3\epsilon_1 + 2C'\epsilon_1\epsilon_2 + \\ &\quad + A''\gamma_1^2 + B''\gamma_2^2 + C''\gamma_3^2) .\end{aligned}$$

I nove coefficienti A, B, \dots, C'' sono funzioni delle quattro coordinate x, y, z, t , se il mezzo non è omogeneo, costanti nel caso contrario.

Indicando inoltre con ρ la densità ed X, Y, Z le componenti della forza unitaria di massa cui è sottoposta ogni particella del mezzo, le equazioni differenziali del moto elastico sono

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_1} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \gamma_2} + \rho \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \gamma_3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_2} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} + \rho \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_3} + \rho \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) &= 0 . \end{aligned} \right.$$

Effettuando le derivazioni indicate ai primi membri e trascurando i termini nelle derivate prime delle u, v, w e in X, Y, Z (che non interessano per il seguito), si perviene al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C'' \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B'' \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (C' + C'') \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (B' + B'') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots = 0 \\ C'' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A'' \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (C' + C'') \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (A' + A'') \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \dots = 0 \\ B'' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A'' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + (B' + B'') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + (A' + A'') \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dots = 0. \end{array} \right.$$

3. *Il problema di Cauchy per le equazioni (1).* — Il sistema (1) nelle funzioni incognite u, v, w delle quattro variabili x, y, ζ, t è normale rispetto alla t , sicchè, è applicabile il teorema di Cauchy-Kowalevsky a norma del quale le u, v, w vengono caratterizzate assegnando per $t = t_0$ i loro valori e quelli delle loro derivate prime rispetto a t in funzione di x, y, ζ . Più generalmente, si può chiedere se sia possibile determinare ancora le funzioni incognite quando siano noti i loro valori e quelli di tutte le loro derivate prime in ogni punto di una ipersuperficie

$$(\Sigma) \quad \zeta(x, y, \zeta, t) = \zeta_0 \quad (\zeta_0 \text{ costante})$$

del cronotopo.

Si osservi che basterebbe assegnare su (Σ) i valori di $u, v, w, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$.

A tale scopo associamo alla ζ altre tre combinazioni indipendenti $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ delle x, y, ζ, t , con che le u, v, w si potranno considerare funzioni delle $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

Le formole di trasformazione per le derivate seconde sono del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \zeta} = p_2 p_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots$$

avendo posto

$$p_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta}.$$

Il sistema trasformato di (1) è

$$\left\{ \begin{array}{l} (Ap_1^2 + C''p_2^2 + B''p_3^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (C' + C'') p_1 p_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (B' + B'') p_1 p_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \dots = 0 \\ (C' + C'') \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (C''p_1^2 + Bp_2^2 + A''p_3^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (A' + A'') p_2 p_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \dots = 0 \\ (B' + B'') \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (A' + A'') p_2 p_3 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (B''p_1^2 + A''p_2^2 + Cp_3^2 - \rho p_0^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \dots = 0. \end{array} \right.$$

Questo sistema è normale rispetto alla variabile ζ se la ipersuperficie (Σ) non soddisfa all'equazione (alle derivate parziali)

$$(2) \quad \Omega(p_0, p_1, p_2, p_3) = 0;$$

che si ottiene annullando il determinante dei coefficienti di $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$ in (1'). In tal caso la determinazione delle u, v, w , almeno in un intorno di (Σ) , è possibile a norma del teorema di Cauchy-Kowalevsky. Invece se la funzione $\zeta(x, y, z, t)$ è un integrale della (2), il problema di caratterizzare le u, v, w riesce impossibile o indeterminato ed in tal caso, come è noto, la (Σ) , che ora indicheremo con (σ) , dicesi una varietà caratteristica del sistema (1).

4. *Discussione dell'equazione $\Omega = 0$.* — Lungo la varietà (σ) possono raccordarsi due moti elastici soddisfacenti alle (1) con discontinuità almeno del 2° ordine. Fisicamente, la (σ) costituisce un'onda elastica.

È interessante osservare che l'equazione (2) è analoga a quella cui si perviene quando si vogliono ricercare gli assi dell'ellissoide (di propagazione)

$$(3) \quad E(x, y, z) - 1 \equiv (Ap_1^2 + C''p_2^2 + B''p_3^2)x^2 + (C''p_1^2 + Bp_2^2 + A''p_3^2)y^2 + \\ + (B''p_1^2 + A''p_2^2 + Cp_3^2)z^2 + 2(A' + A'')p_2p_3yz + \\ + 2(B' + B'')p_3p_1zx + 2(C' + C'')p_1p_2xy - 1 = 0.$$

Dalla considerazione di questo ellissoide parte il Beltrami nella Memoria citata al n. 1; in questa Memoria si suppone che le onde siano piane; p_1, p_2, p_3 designano i coseni di direzione della normale ai piani di queste onde.

Ammettiamo, con Neumann e Beltrami, che i coefficienti d'elasticità A, B, \dots, C'' soddisfino le condizioni

$$(I) \quad \begin{cases} (A' + A'')^2 = (B - A'')(C - A'') \\ (B' + B'')^2 = (C - B'')(A - B'') \\ (C' + C'')^2 = (A - C'')(B - C'') \end{cases}$$

$$(II) \quad (A - C'')(B - A'')(C - B'') = (A - B'')(B - C'')(C - A''),$$

che sono identicamente soddisfatte se il mezzo è isotropo.

Se si sviluppa il determinante Ω si ottiene l'equazione di 3° grado in ρp_0^2

$$(2') \quad (\rho p_0^2)^3 - \sigma_1(\rho p_0^2)^2 + \sigma_2 \cdot \rho p_0^2 - \sigma_3 = 0,$$

essendo σ_k la somma dei minori principali di ordine k estratti dal determinante che si ottiene da Ω sopprimendo l'addendo $-\rho p_0^2$ negli elementi principali.

Tenendo conto delle condizioni (I) e (II), si riconosce che la (2') ammette la radice

$$(4) \quad \rho p_0^2 = A p_1^2 + B p_2^2 + C p_3^2.$$

Le altre due radici soddisfano dunque un'equazione di 2° grado che è stata egualmente formata dal Beltrami (loc. cit.). Ma qui interessa osservare che, se ci si limita a considerare la radice ora trovata, le caratteristiche dell'equazione di 1° ordine (4) costituiscono i raggi corrispondenti all'onda che soddisfa la (4) stessa.

Le caratteristiche della (4) si dicono le bicaratteristiche del sistema (1) (Hadamard).

L'equazione (4) risolta rispetto a p_0 sotto la forma

$$p_0 + H = 0$$

dà

$$H = - \sqrt{\frac{1}{\rho} (A p_1^2 + B p_2^2 + C p_3^2)}$$

e questa costituisce la funzione hamiltoniana delle bicaratteristiche che sono le curve integrali del sistema differenziale (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3}, \\ \frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dp_3}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Se il mezzo è omogeneo, le A, B, C sono costanti, le p_1, p_2, p_3 risultano costanti lungo una bicaratteristica e le prime tre equazioni hamiltoniane dànno

$$(5) \quad x = x_0 + t \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)_0, \quad y = y_0 + t \left(\frac{\partial H}{\partial p_2} \right)_0, \quad z = z_0 + t \left(\frac{\partial H}{\partial p_3} \right)_0.$$

In tal caso i raggi sono rettilinei.

Poichè la funzione H è omogenea di 1° grado (nel senso di Eulero), le derivate parziali sono omogenee di grado zero e quindi dipendono solo dai rapporti $\frac{p_1}{p_3}, \frac{p_2}{p_3}$. Eliminando questi rapporti dalle (5), si perviene alla equazione della superficie d'onda (σ)

$$\zeta(x, y, z, t) - \zeta_0 = 0.$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Conferenze raccolte dal dott. G. LAMPARIELLO, Bologna, Zanichelli (in corso di stampa).

5. Le considerazioni precedenti mostrano quanto sia efficace il punto di vista, già adottato da F. Neumann nelle sue *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität*, di dedurre le leggi del Fresnel dalle equazioni fondamentali dell'elasticità.

Come si vede una più approfondita discussione delle circostanze nelle quali è applicabile il teorema di esistenza di Cauchy-Kowalevsky ha permesso di stabilire, con un'estrema semplicità, l'equazione differenziale cui debbono soddisfare le onde elastiche, liberandosi dall'ipotesi molto restrittiva delle onde piane e dell'omogeneità del mezzo.

Meccanica. — *Influenze adiabatiche delle maree nel moto kepleriano di due corpi celesti giroscopici.* Nota II ⁽¹⁾ di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. In una Memoria celebre sir G. Darwin studiò per primo in modo sistematico gli effetti delle maree sul moto dei pianeti.

Tra i risultati più cospicui cui egli è pervenuto è ben noto, anche per la successiva illustrazione energetica data da Kelvin, quello concernente l'asintotico tendere all'eguaglianza dei periodi di rivoluzione e rotazione di due corpi gravitanti e rotanti.

Al risultato semplice ed evidente non si perviene però attraverso procedimenti cui possano assegnarsi gli stessi attributi; ma allora non sarebbe stato possibile battere più facili cammini.

Dato il carattere della perturbazione prodotta da una marea, sia essa *solida* o prodotta da oceani, carattere tipico delle influenze cosiddette adiabatiche, appare manifesto che la teoria degli invarianti per rispetto a quelle influenze debba consentire un'agilità insospettata nella trattazione delle questioni soprannominate.

Ciò ebbe a rilevare in una comunicazione al Congresso dei Matematici a Bologna, il prof. T. Levi-Civita, a corollario ed illustrazione applicativa della teoria degli invarianti adiabatici ch'egli, un anno prima, aveva estesa e sistemata.

La Nota di cui si tratta, pur conseguendo sulle ricerche del Darwin maggior generalità per quanto concerne la schematizzazione del problema, mantiene ancora l'ipotesi di assi di rotazione normali al piano dell'orbita. Sostanzialmente però, offre lo spunto per la caratterizzazione degli effetti (a lunga scadenza) nel moto kepleriano di due giroscopi dotati di moto libero, relativo al baricentro, il più generale, cosiddetto di *precessione regolare*, indipendentemente da alcuna ipotesi sull'orientazione degli assi rispetto alla traiettoria.

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1931.

Afferrando l'idea e convenientemente sviluppandola arriveremo, come tosto vedremo, al risultato suggestivo che, per effetto delle maree il piano dell'orbita si pone normale e gli assi delle rotazioni, in cui le precessioni degenerano, paralleli all'invariante momento vettoriale totale delle quantità di moto del sistema.

§ 2. Breve richiamo alle ricerche di Levi-Civita. Problema dei due corpi. Problema dei due corpi gravitanti e rotanti.

Siano P, P' i due corpi supposti per intanto praticamente puntiformi; G il baricentro (che può considerarsi fisso), r la loro distanza, $M = m + m'$ la somma delle corrispondenti masse m ed m' .

Il moto avvenendo in un piano in virtù dell'integrale (baricentrale vettoriale) dei momenti, ove con λ si indichi l'anomalia di PP' contata a partire da una retta fissa, si avranno per P e P' le forze vive assolute

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{m'}{M} \right)^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2) \quad , \quad T' = \frac{1}{2} m' \left(\frac{m}{M} \right)^2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2),$$

donde pel sistema la forza viva totale

$$T + T' = \frac{1}{2} \frac{m m'}{M} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2).$$

Designando infine con f la costante di attrazione universale si avrà per la funzione delle forze l'espressione

$$U = f \frac{m m'}{r}.$$

Moltiplicando quindi, com'è legittimo, $T + T'$ ed U per il fattore $\frac{M}{m m'}$, assumendo così come forza viva la espressione unitaria

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2)$$

e come funzione delle forze

$$U = \frac{f M}{r},$$

l'energia totale

$$H = T - U$$

diviene, ove al posto di \dot{r} e $\dot{\lambda}$ si introducano le variabili coniugate

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \quad , \quad p_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}},$$

$$(1) \quad H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \frac{fM}{r}$$

essendosi posto, poichè λ è *ignorabile*,

$$(2) \quad p_\lambda = \text{cost.} = c.$$

È questa per cose note la funzione Hamiltoniana H da cui si desume senz'altro il sistema canonico, ormai relativo ad un solo grado di libertà, che regge il moto del sistema.

Nel piano p_r, r (*spazio ridotto*) la $H = E$ definisce una curva σ di cui l'area (*volume ridotto*) racchiusa, precisamente

$$W = \int p_r dr,$$

è, pel teorema di Gibbs-Hertz, un invariante adiabatico. Per calcolarlo in modo esplicito basta risolvere la (1) per rispetto a p_r . Si perviene così ad un integrale di tipo noto il quale dà senza difficoltà, rilevando che $E = -f \frac{mm'}{2a}$, a designando il semiasse maggiore,

$$(3) \quad \frac{W}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2E}} - c.$$

§ 3. Corpi giroscopici gravitanti e rotanti. Loro invarianti adiabatici.

Consideriamo ora il caso in cui i due corpi sieno due giroscopi dotati di moto libero generale per rispetto al loro baricentro, abbastanza distanti perchè l'attrazione si espliciti ancora come se le masse m ed m' fossero concentrate nei rispettivi baricentri P, P' , abbastanza estesi e rapidamente rotanti perchè non siano trascurabili le forze vive Δ, Δ' dovute al moto intorno al baricentro per rispetto a quella spettante al moto traslatorio baricentrale.

Preso riferimento a due sistemi Λ e Λ' col centro in P, P' , in coordinate euleriane $\varphi, \psi, \theta; \varphi', \psi', \theta'$ ove con $A = B, C; A' = B', C'$ si indichino i momenti principali d'inerzia (che immaginiamo debitamente moltiplicati per il fattore $\frac{M}{mm'}$, con che Δ e Δ' risultano le energie ridotte nello stesso rapporto adottato per la $T + T'$), soddisfacenti le eguaglianze soprascritte per la premessa struttura giroscopica, si ha notoriamente, introducendo i momenti $p_\varphi, p_\psi, p_\theta$,

$$\Delta = \frac{p_\varphi^2}{2C} + \frac{\sigma^2 + p_\theta^2}{2A}$$

con

$$\sigma = \frac{p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \theta}{\sin \theta},$$

ed analoga espressione per Δ' pel tramite di $p'_{\varphi}, p'_{\psi}, p'_{\theta}$.

Le coordinate $\varphi, \psi; \varphi', \psi'$ essendo evidentemente *ignorabili* si avranno gli integrali ben noti

$$(4) \quad p_{\varphi} = c_1, \quad p_{\psi} = c_2; \quad p'_{\varphi} = c'_1, \quad p'_{\psi} = c'_2.$$

La funzione caratteristica del sistema

$$H = (T - U) + \Delta + \Delta'$$

involgente le 8 variabili $r, \lambda; \varphi, \psi, \theta; \varphi', \psi', \theta'$; e rispettive 8 coniugate, per essere *ignorabili* le $\lambda; \varphi, \psi; \varphi', \psi'$; si riduce, in virtù degli integrali (2) e (4) alla *H ridotta* in tre variabili e corrispondenti coniugate,

$$H = \left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2} \right) - \frac{f m m'}{r} + \sum \left(\frac{p_{\varphi}^2}{2C} + \frac{\sigma^2 + p_{\theta}^2}{2A} \right)_{p_{\varphi}=c_1, p_{\psi}=c_2} = E$$

con ovvio significato del segno Σ .

Ciò posto, rileviamo che, se l'asse ζ della terna di riferimento Λ di un giroscopio si fa coincidere col vettore momento della quantità di moto \mathbf{K} , si ha $p_{\psi} = K$, $p_{\varphi} = K \cos \theta$, ($\theta = \text{cost.}$ designando l'angolo di *precessione*), ed ancora $p_{\theta} = 0$.

Orientando quindi i riferimenti Λ e Λ' nel modo suddetto restano nella *H* eliminate ulteriori 4 variabili, con che il calcolo del volume racchiuso nello spazio delle fasi, e quindi dell'invariante adiabatico del sistema, è ricondotto, salvo debite osservazioni, al caso del precedente §, premessa, naturalmente, la materiale sostituzione di *E* con

$$E' = E - \Delta - \Delta'.$$

Concludiamo quindi che il volume

$$(3a) \quad \frac{W}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2(E - \Delta - \Delta')}} - c$$

costituisce un invariante adiabatico.

§ 4. *Lenta ed incessante azione dissipativa delle maree. Minimo condizionato dell'energia totale. Il risultato enunciato a § 1 come conseguenza di quel minimo.*

Passando alle nostre previsioni asintotiche sull'effetto delle maree, cominciamo subito con l'osservare che le lente azioni dissipative che le accompagnano avranno per inevitabile effetto quello di far decrescere lentissimamente e senza compenso l'energia totale E del sistema, invariante rimanendo, trattandosi di azioni interne, il momento totale \mathbf{K} delle quantità di moto.

Dovrà quindi la E suddetta, considerata come funzione dei vettori $\mathbf{K}, \mathbf{K}', n\mathbf{c}$ (n designando il vettore normale al piano dell'orbita) tendere ad un valore minimo compatibilmente però, e questo è il punto essenziale: a) con l'invariante adiabatico prima definito; b) con la conservazione del momento totale \mathbf{K}

$$(5) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K} + \mathbf{K}' + n\mathbf{c}.$$

Nello stato finale, potendo i vettori $\mathbf{K}, \mathbf{K}', n\mathbf{c}$ variare *a priori* in modo qualunque, sicchè non c'è da considerare l'eventualità di estremi di frontiera, si avrà in ogni modo

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0$$

a designando uno qualunque dei parametri da cui si fanno dipendere \mathbf{K}, \mathbf{K}' ed $n\mathbf{c}$.

Avendosi intanto dalla (3 a)

$$\frac{\partial W}{\partial a} + \frac{\partial W}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial a} = 0,$$

si desume

$$(6) \quad \frac{\partial W}{\partial a} = 0$$

con l'avvertenza di derivare compatibilmente con le condizioni a) e b).

Passando ai calcoli, designamo con α, α', β gli angoli che \mathbf{K}, \mathbf{K}' ed n formano con \mathbf{K} .

Si avrà evidentemente

$$(5a) \quad K = p_{\psi} \cos \alpha + p'_{\psi} \cos \alpha' + c \cos \beta$$

con le condizioni

$$(5b) \quad p_{\psi} \sin \alpha \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} + p'_{\psi} \sin \alpha' \cdot \frac{\sin \gamma'}{\cos \gamma'} + c \sin \beta \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = 0,$$

manifesto essendo il significato degli angoli $\gamma, \gamma', \varepsilon$ contati in un piano normale a \mathbf{K} .

Dalla (5a) si desume intanto

$$c = \frac{K - p_{\psi} \cos \alpha - p'_{\psi} \cos \alpha'}{\cos \beta}$$

per cui l'invariante (3a) si scrive

$$\frac{W}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2(E - \Delta - \Delta')}} - \frac{K - p_{\psi} \cos \alpha - p'_{\psi} \cos \alpha'}{\cos \beta} = \text{cost.}$$

Le variabili adiabatiche a le identifichiamo con $p_{\psi}, p'_{\psi}; p_{\varphi}, p'_{\varphi}; \cos \alpha, \cos \alpha'$ e $\cos \beta$. Passando ad esplicitare le (6), ove si prescinda per intanto delle (5b), e si tenga presente che nel caso nostro, pel riferimento preso, $p_{\theta} = \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{\theta}} = 0$, $p'_{\theta} = \frac{\partial \Delta'}{\partial \dot{\theta}'} = 0$, non occorrerà (sebbene sussistano le relazioni $p_{\varphi} = p_{\psi} \cos \dot{\theta}$, $p'_{\varphi} = p'_{\psi} \cos \dot{\theta}'$) preoccuparsi, nel derivare rapporto alle p , della dipendenza di Δ da $\dot{\theta}$ e di Δ' da $\dot{\theta}'$, e si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dp_{\psi}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{\psi}} = \dot{\psi} \quad , \quad \frac{d\Delta'}{dp'_{\psi}} = \frac{\partial \Delta'}{\partial p'_{\psi}} = \dot{\psi}' , \\ \frac{d\Delta}{dp_{\varphi}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad , \quad \frac{d\Delta'}{dp'_{\varphi}} = \frac{\partial \Delta'}{\partial p'_{\varphi}} = \dot{\varphi}' . \end{aligned}$$

Ne desumiamo

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial p_{\psi}} = -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}} \dot{\psi} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 0 , \\ \frac{\partial W}{\partial p'_{\psi}} = -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}} \dot{\psi}' + \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta} = 0 ; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial p_{\varphi}} = -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}} \dot{\varphi} = 0 , \\ \frac{\partial W}{\partial p'_{\varphi}} = -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}} \dot{\varphi}' = 0 , \end{cases}$$

$$(9) \quad \frac{\partial W}{\partial \cos \beta} = \frac{K - p_{\psi} \cos \alpha - p'_{\psi} \cos \alpha'}{\cos^2 \beta} \sin \beta = 0 ;$$

$$(10) \quad \frac{\partial W}{\partial \cos \alpha} = p_{\psi} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \cos \alpha'} = p'_{\psi} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 0 .$$

Escluso $p_\psi = 0$, $p'_\psi = 0$ si trae dalle (10), a meno di multipli di π ,

$$(11) \quad \alpha = 0 \quad , \quad \alpha' = 0$$

e dalla (9), poichè $c \neq 0$,

$$(12) \quad \beta = 0.$$

Avuto riguardo a che, $(-2E_1)^{\frac{1}{2}} : fM$ non è altro che il *moto medio n*, le (7) ed (8) danno

$$(13) \quad \dot{\psi} = n \quad , \quad \dot{\psi}' = n \quad ; \quad (14) \quad \dot{\phi} = 0 \quad , \quad \dot{\phi}' = 0.$$

Le condizioni (11) ed (12) compatibili evidentemente con le (5b), che sino ad ora avevamo trascurate, esprimono l'orientamento dei versori di \mathbf{K} , \mathbf{K}' ed \mathbf{n} nel senso dell'invariante vettore \mathbf{K} .

Il piano dell'orbita si dispone quindi normalmente, gli assi di rotazione, in cui in conformità con le (13) e (14) degenera la precessione, parallelamente a codesto vettore \mathbf{K} , dato iniziale ed immutabile del problema.

Le condizioni $\dot{\psi} = \dot{\psi}' = n$ esprimono infine che la velocità angolare di rotazione, stabile attorno all'asse di figura, eguaglia quella di rivoluzione.

Meccanica. — *Sur le mouvement d'un fluide à travers un barrage perméable.* Nota ⁽¹⁾ di A. WEINSTEIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Considérons un barrage de matériel perméable dont la section transversale (qui se trouve dans le plan $z = x + iy$) a la forme indiquée dans la figure. Les parois ont une inclinaison $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Ce barrage sépare deux grands réservoirs contenant un fluide incompressible de poids spécifique 1, les niveaux étant différents des deux cotés du barrage. Désignons ces niveaux par h_1 et h_2 où h_2 est plus grand que h_1 . On demande la détermination du mouvement permanent du fluide à travers le barrage, les vitesses à l'intérieur des réservoirs étant considérées comme négligeables. Comme me l'a indiqué M. Burgers, ce problème présente aussi un intérêt pratique spécial pour les Pays-Bas.

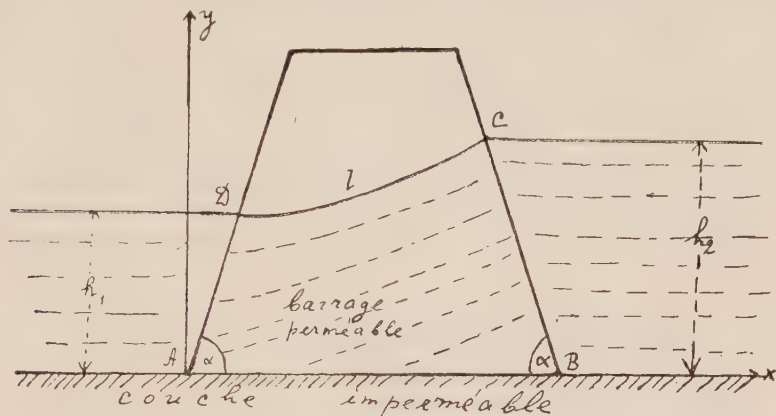
La région occupée par le fluide à l'intérieur de la section transversale du barrage est limitée supérieurement par une ligne libre *l* inconnue a priori. En admettant sur le mouvement les hypothèses usuelles ⁽²⁾ et en outre

(1) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1931.

(2) Voir p. ex. L. HOPF und E. TREFFTZ, *Grundwasserströmung*, «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», vol. I (1921), p. 290.

que la ligne libre l ait pour extrémités les points C et D nous allons donner dans cette Note l'intégrale générale du mouvement.

On sait qu'il existe pour le mouvement considéré un potentiel de vitesse $\varphi(x, y)$ et une fonction de courant $\psi(x, y)$. Posons $f(\zeta) = \varphi + i\psi$. $f(\zeta)$ satisfait sur les limites de la région du mouvement à de certaines conditions que nous allons énoncer tout à l'heure pour la fonction inverse $\zeta(f)$.



On peut démontrer facilement que la fonction $f(\zeta)$ donne la représentation conforme de la région du mouvement sur un rectangle dans le plan f les deux cotés du rectangle étant respectivement proportionnels à la différence des niveaux h_1 et h_2 et au débit. Considérons la fonction inverse $\zeta(f)$ et introduisons une nouvelle variable $\zeta = \xi + i\eta$ en faisant correspondre au rectangle le demiplan $\eta \geq 0$. En vertu des hypothèses mécaniques la détermination du mouvement revient alors au problème mathématique suivant:

Déterminer une fonction analytique $\zeta(\zeta)$ uniforme et bornée dans le demiplan $\eta \geq 0$ qui satisfait sur l'axe réel aux conditions suivantes:

$$(I) \left\{ \begin{array}{ll} y = 0 & \text{pour } \xi < \xi_1 \\ y = tg \alpha (x_\beta - x) & \text{» } \xi_1 < \xi < \xi_2 \\ y = h_2 + \frac{M}{ik} \int_{\xi_2}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{4(\tau - \xi_1)(\tau - \xi_2)(\tau - \xi_3)}} & \text{» } \xi_2 < \xi < \xi_3 \\ y = tg \alpha \cdot x & \text{» } \xi_3 < \xi. \end{array} \right.$$

x_β est l'abscisse positive du point B; k est une constante positive dépendant du matériel et M une constante positive provenant de la représentation conforme du rectangle sur le demiplan. Les points $\infty, \xi_1, \xi_2, \xi_3$, ($\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$) correspondent aux points A, B, C, D. Nous avons posé $\sqrt{\tau - \xi_3} = i\sqrt{\xi_3 - \tau}$.

Je démontre le résultat suivant: La solution générale de ce problème qui reste finie dans tout le demiplan $\eta \geq 0$ a nécessairement la forme

$$(2) \quad \chi(\zeta) = \left\{ \frac{1}{\pi} x_\beta \sin \alpha \cdot e^{-2i\alpha} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dt}{(t - \xi_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} (t - \xi_2)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (t - \xi_3)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (t - \zeta)} \right. \\ \left. + \frac{e^{-i\alpha}}{\pi k} \int_{\xi_2}^{\xi_3} \left[k h_2 - M i \int_{\xi_2}^t \frac{d\tau}{\sqrt{4(\tau - \xi_1)(\tau - \xi_2)(\tau - \xi_3)}} \right] \frac{dt}{(t - \xi_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} (t - \xi_2)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (t - \xi_3)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (t - \zeta)} \right\} \times \\ \times e^{i\alpha} (\zeta - \xi_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} (\zeta - \xi_2)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (\zeta - \xi_3)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}},$$

pourvu que l'épaisseur x_β du barrage satisfasse à l'équation suivante

$$x_\beta \sin \alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dt}{(t - \xi_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} (\xi_2 - t)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (\xi_3 - t)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}} = \\ = \int_{\xi_2}^{\xi_3} \left[h_2 + \frac{M}{ik} \int_{\xi_2}^t \frac{d\tau}{\sqrt{4(\tau - \xi_1)(\tau - \xi_2)(\tau - \xi_3)}} \right] \frac{dt}{(t - \xi_1)^{\frac{\alpha}{\pi}} (t - \xi_2)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}} (\xi_3 - t)^{1 - \frac{\alpha}{\pi}}},$$

qui est une relation entre cette épaisseur x_β , les deux niveaux h_1 et h_2 et le débit.

Une étude détaillée de la question paraîtra prochainement dans la « Mathematische Zeitschrift ».

Meccanica. — *Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux.* — III. *Convergence de l'algorithme.* Nota ⁽¹⁾ di A. ROSENBLATT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il ne nous reste qu'à établir la convergence de la méthode exposée dans nos deux Notes précédentes avec le même titre que celle-ci ⁽²⁾.

Comme dans la Note II, je poursuivrai le numérotage des paragraphes et des formules.

6. *Convergence des séries obtenues.*

Retournons maintenant aux expressions (30). Nous avons

$$\int_0^H \sin k\lambda u \int_0^u \sin r_k(u - \zeta) F_k(\zeta) d\zeta = \int_0^H F_k(\zeta) \int_{\zeta}^H \sin k\lambda u \cdot \sin r_k(u - \zeta) du \cdot d\zeta.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^H \sin k\lambda u \cdot \sin r_k(u - \zeta) du &= \frac{1}{2} \int_{\zeta}^H \left[\cos \left[k\lambda u - r_k(u - \zeta) \right] - \right. \\ &\left. - \cos \left[k\lambda u + r_k(u - \zeta) \right] \right] du = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin [r_k(H - \zeta) - k\lambda H] + \sin k\lambda \zeta}{r_k - k\lambda} - \frac{\sin [r_k(H - \zeta) + k\lambda H] - \sin k\lambda \zeta}{r_k + k\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{1}{r_k} \int_0^y \sin r_k(y - u) F_k(u) du - \frac{\sin r_k y}{2 r_k \cdot f_k^1} \int_0^H F_k(\zeta) \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\sin [r_k(H - \zeta) - k\lambda H] + \sin k\lambda \zeta}{r_k - k\lambda} - \frac{\sin [r_k(H - \zeta) + k\lambda H] - \sin k\lambda \zeta}{r_k + k\lambda} \right\} d\zeta. \end{aligned}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1931.

(2) Voir ce même recueil, même volume.

Maintenant nous avons

$$\begin{aligned} \nu F_k(y) &= \frac{d}{dy} \left[- \sum_{l+m=k} l \lambda f_l \varphi_m \right] + \sum_{l+m=k} k \lambda f'_l \varphi_m = \\ &= \frac{d}{dy} \sum_y \int_y^H \sin l \lambda (y-u) \varphi_l(u) du \cdot \varphi_m(y) - k \lambda \sum_y \int_y^H \cos l \lambda (y-u) \cdot \varphi_l(u) \varphi_m(y) du. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} &\int_0^y \sin r_k(y-u) F_k(u) du = \\ &= \frac{1}{\nu} \int_0^y \sin r_k(y-u) \cdot \left[\frac{d}{du} \left\{ \sum_u \int_u^H \sin l \lambda (u-\zeta) \varphi_l(\zeta) d\zeta \cdot \varphi_m(u) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - k \lambda \sum_u \int_u^H \cos l \lambda (u-\zeta) \varphi_l(\zeta) d\zeta \cdot \varphi_m(u) \right] du = \\ &= \frac{1}{\nu} \left\{ r_k \int_0^y \cos r_k(y-u) \sum_u \int_u^H \sin l \lambda (u-\zeta) \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du - \right. \\ &\quad \left. - k \lambda \int_0^y \sin r_k(y-u) \sum_u \int_u^H \cos l \lambda (u-\zeta) \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} &\int_0^H \frac{\sin [r_k(H-\zeta) - k \lambda H] + \sin k \lambda \zeta}{r_k - k \lambda} \cdot \left\{ \frac{d}{d\zeta} \sum_{\zeta} \int_{\zeta}^H \sin l \lambda (\zeta-\tau) \varphi_l(\tau) d\tau \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \varphi_m(\zeta) - k \lambda \sum_{\zeta} \int_{\zeta}^H \cos l \lambda (\zeta-\tau) \varphi_l(\tau) \varphi_m(\zeta) \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{r_k - k \lambda} \left\{ - k \lambda \int_0^H \sum_u \int_u^H \varphi_l(\tau) \varphi_m(u) \left[\sin [k \lambda u + l \lambda (u-\tau)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin [r_k(H-u) - k \lambda H - l \lambda (u-\tau)] \right] d\tau du + (r_k - k \lambda) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^H \sum \cos [r_k(H-u) - k \lambda H] \int_u^H \sin l \lambda (u-\tau) \varphi_l(\tau) \varphi_m(u) d\tau \cdot du \right\}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{\sin[r_k(H-\zeta) + k\lambda H] - \sin k\lambda\zeta}{r_k + k\lambda} \cdot F_k(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{v} \int_0^H \frac{\sin[r_k(H-\zeta) + k\lambda H] - \sin k\lambda\zeta}{r_k + k\lambda} \\ &\cdot \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left[\sum_{\xi} \int_{\xi}^H \sin l\lambda(\zeta - \tau) \cdot \varphi_l(\tau) d\tau \cdot \varphi_m(\zeta) \right] - k\lambda \sum_{\xi} \int_{\xi}^H \cos l\lambda(\zeta - \tau) \cdot \right. \\ &\cdot \varphi_l(\tau) d\tau \cdot \varphi_m(\zeta) \left. \right\} d\zeta = \frac{1}{v(r_k + k\lambda)} \left\{ \int_0^H \left[k\lambda \cos k\lambda\zeta + r_k \cos[r_k(H-\zeta) + \right. \right. \\ &+ k\lambda H] \left. \right] \sum_{\xi} \int_{\xi}^H \sin l\lambda(\zeta - \tau) \varphi_l(\tau) d\tau \cdot \varphi_m(\zeta) d\zeta - k\lambda \int_0^H \\ &\cdot \left[\sin[r_k(H-\zeta) + k\lambda H] - \sin k\lambda\zeta \right] \sum_{\xi} \int_{\xi}^H \cos l\lambda(\zeta - \tau) \varphi_l(\tau) \varphi_m(\zeta) d\tau d\zeta \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{v(r_k + k\lambda)} \left\{ k\lambda \int_0^H \sum_u \int_u^H \varphi_l(\tau) \varphi_m(u) \left[\sin[k\lambda u + l\lambda(u - \tau)] + \right. \right. \\ &+ \sin[r - r_k(H - u) - k\lambda H + l\lambda(u - \tau)] \left. \right] + \\ &+ (r_k - k\lambda) \int_0^H \sum_u \cos[r_k(K - u) + k\lambda H] \int_u^H \sin l\lambda(\zeta - \tau) \varphi_l(\tau) \cdot d\tau \cdot \varphi_m(u) \cdot du \left. \right\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la formule de récurrence

$$\begin{aligned} (32) \quad \varphi_k(y) &= \frac{1}{r_k \cdot v} \left\{ k\lambda \int_0^y \sum_u \int_u^H \sin[l\lambda(u - \zeta) - r_k(y - u)] \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du + \right. \\ &+ (r_k - k\lambda) \int_0^y \cos r_k(y - u) \sum_u \int_u^H \sin l\lambda(u - \zeta) \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du - \\ &- \frac{\sin r_k y}{2 f_k^{(1)}} \left[-k\lambda \left[\frac{\int_0^H \sum_u \int_u^H \varphi_l(\tau) \varphi_m(u) [\sin(k\lambda u + l\lambda(u - \tau)) + \right. \right. \\ &+ \sin(r_k(H - u) - k\lambda H - l\lambda(u - \tau))] d\tau du}{r_k - k\lambda} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\int_0^H \sum_u \int_0^H \varphi_l(\tau) \varphi_m(u) |\sin(k\lambda u + l\lambda(u - \tau)) - \sin(r_k(H - u) + k\lambda H - l\lambda(u - \tau))|}{r_k + k\lambda} \\
 & d\tau du \left[+ (r_k - k\lambda) \left[\frac{\int_0^H \sum \cos(r_k(H - u) - k\lambda H) \int_u^H \sin l\lambda(u - \tau) \varphi_l(\tau) \varphi_m(u)}{r_k - k\lambda} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\int_0^H \cos(r_k(H - u) + k\lambda H) \int_u^H \sin l\lambda(u - \tau) \varphi_l(\tau) \varphi_m(u)}{r_k + k\lambda} d\tau du \right] \right].
 \end{aligned}$$

La formule de récurrence est donc de la forme

$$\begin{aligned}
 (33) \quad \varphi_k(y) = & \frac{1}{v} \left\{ \sum_0^y \sum_u \int_0^H G_k(y, u, \zeta) \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du + \right. \\
 & \left. + \sin r_k y \sum_0^H \sum_u \int_0^H H_k(u, \zeta) \varphi_l(\zeta) \varphi_m(u) d\zeta du \right\},
 \end{aligned}$$

où les fonctions G_k, H_k sont d'après ce que nous avons vu *continues* pour y, u, ζ situés entre $-H$ et $+H$ et pour chaque λ d'un intervalle I envisagé précédemment *uniformément bornées* pour tous les k , et même uniformément bornées dans tout l'intervalle.

Supposons donc ⁽¹⁾ que

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1}$$

soient des nombres positifs majorant les fonctions

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_{k-1}(y).$$

Il existe alors un nombre positif N indépendant de k tel que le nombre

$$(34) \quad \Phi_k = N (\Phi_1 \Phi_{k-1} + \dots + \Phi_{k-1} \Phi_1)$$

soit un nombre majorant $\varphi_k(y)$.

(1) Ce raisonnement est employé chez ODQUIST: *Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*, Stockholm 1928, Inaugural-dissertation; *Ueber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*, « Mathematische Zeitschrift » 1930, 32. Bd

Ce nombre est proportionnel à $\frac{H^2}{v}$ pour λ, μ donnés, on peut donc poser

$$N = L \frac{H^2}{v},$$

où L est un nombre pur, car les φ sont de dimension $\left[\frac{v}{l^2}\right] = \left[\frac{1}{l}\right]$.

Nous avons

$$\varphi_1 = A_1 \sin r_1 y,$$

nous pouvons donc prendre

$$\Phi_1 = A_1 > 0.$$

En désignant encore par E_k l'exponentielle

$$E_k = e^{-k(\lambda\lambda + \mu\mu)}$$

envisageons la série

$$(35) \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_k \Phi_k$$

qui est une série majorante de la série

$$(36) \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_k \varphi_k(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_k (f_k'' + k^2 \lambda^2 f_k).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S^2 &= \varepsilon^2 \Phi_1^2 E_2 + \varepsilon^3 (\Phi_1 \Phi_2 + \Phi_2 \Phi_1) E_3 + \dots \\ &+ \varepsilon^k E_k (\Phi_1 \Phi_{k-1} + \dots + \Phi_{k-1} \Phi_1) + \dots = \frac{1}{N} (S - \varepsilon E_1 \Phi_1). \end{aligned}$$

Donc S satisfait à l'équation du 2^{de} degré

$$(37) \quad NS^2 - S + \varepsilon \Phi_1 E_1 = 0.$$

Cette équation admet une racine *holomorphe en ε* et s'annulant pour $\varepsilon = 0$ qui est précisément donnée par le développement (35). On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} (38) \quad S &= \frac{1}{2N} \left[1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon N \Phi_1 E_1} \right] = \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot (4N \Phi_1 E_1)^k \cdot \binom{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} \right) \cdot \varepsilon^k. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence est donc

$$(39) \quad \rho = \frac{I}{4 N \Phi_1 E_1} = \frac{\nu}{4 L H^2 \Phi_1 E_1}.$$

Envisageons maintenant la série donnant Ψ

$$(40) \quad \Psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k E_k f_k(y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \frac{I}{k\lambda} E_k \int_y^H \sin k\lambda(y-u) \varphi_k(u) du$$

qui converge pour $|\varepsilon| < \rho$.

Introduisons le nombre R_1 de Reynolds qui correspond à la vitesse

$$u_1 = - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = - f_1'(y) = - \int_y^H \cos \lambda(y-u) \varphi_1(u) du$$

$$R_1 = \frac{2 U_1 \cdot 2 H}{\nu},$$

$U_1 = A_1 H$. On a

$$(41) \quad \rho = \frac{I}{R_1 E_1 L}.$$

Donc le rayon de convergence est *inversement proportionnel* à E_1 et à R_1 .

En résumé, nous pouvons énoncer le théorème:

Théorème: La série (40) donnant Ψ converge *absolument et uniformément* pour $|y| \leq H$ et pour tous les $x \geq 0$, $t \geq 0$. Elle tend uniformément vers zéro avec $x \rightarrow +\infty$ ainsi qu'avec $t \rightarrow +\infty$. Le rayon de convergence est inversement proportionnel au nombre de Reynolds qui correspond à la perturbation du premier ordre u_1 pour $x = t = 0$.

Dans tout domaine *fini* du plan λ, μ il n'existe qu'un nombre fini de couples λ, μ exceptionnels. À toute valeur de λ d'un intervalle fini, exception faite pour un nombre fini de valeurs il correspond au moins une valeur de μ telle que (λ, μ) ne soit pas exceptionnel.

Astronomia (Astrofisica). — *Sul profilo della riga λ 5183 del Mg nello spettro del sole.* Nota ⁽¹⁾ di G. RIGHINI, presentata dal Corrisp. G. ABETTI.

In un lavoro da me eseguito alla Torre Solare di Arcetri ho determinato con misure spettrofotometriche i profili e le intensità vere, o larghezze equivalenti, di due righe del tripletto $I^3P - I^3S$ del Mg in diversi punti del raggio equatoriale del sole ⁽²⁾. Nello stesso avevo anche potuto notare il buon accordo fra le misure di Arcetri e quelle di Utrecht ⁽³⁾.

Recentemente il prof. H. H. Plaskett ha pubblicato ⁽⁴⁾ un suo interessante lavoro sulla formazione delle stesse righe nell'atmosfera solare, nel quale, oltre a varie considerazioni sui diversi modelli di atmosfere ed il loro accordo con le osservazioni, dà i profili per le tre righe in diversi punti del disco solare analogamente a quanto è stato fatto in Arcetri.

In una Nota a pie' di pagina, aggiunta nelle bozze, l'A. fa alcune critiche alle mie determinazioni concludendo che i profili da me dedotti debbono ritenersi erronei.

Scopo della presente Nota è di mostrare che il metodo seguito è perfettamente valido ed esatto nei limiti di precisione voluti come lo prova altresì l'ottimo accordo delle tre serie di misure citate (Arcetri, Utrecht, Plaskett).

Nel suo lavoro il Plaskett confronta il profilo della riga 5183 da lui determinato con quelli di Utrecht ed Arcetri e trovandoli in disaccordo pensa che per Utrecht l'esistenza dei cosiddetti « fantasmi » nel reticolo dello spettrografo ivi usato, e per Arcetri un presunto errore nel procedimento fotometrico possano spiegare la supposta divergenza.

Il disaccordo in questione ha invece origine da un'errata interpretazione da parte del Plaskett dei dati sperimentali di Utrecht ⁽⁵⁾ e di Arcetri ⁽⁶⁾, avendo questi assunto le larghezze totali dei profili ottenuti quali semilargezze per tracciare il grafico della sua fig. 11 ⁽⁷⁾.

I profili risultano invece come si vede in fig. 1.

(1) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1931.

(2) « Mem. Soc. Astr. Italiana », vol. V, p. 283; « Pubbl. Arcetri », fasc. 48, p. 31.

(3) « Zsf. für Astrophys. », Band I, p. 192.

(4) « Monthly, Notices », vol. XCI, p. 870.

(5) Loc. cit., p. 109. Tab. V.

(6) Loc. cit., p. 291. Tab. II.

(7) Loc. cit., p. 903.

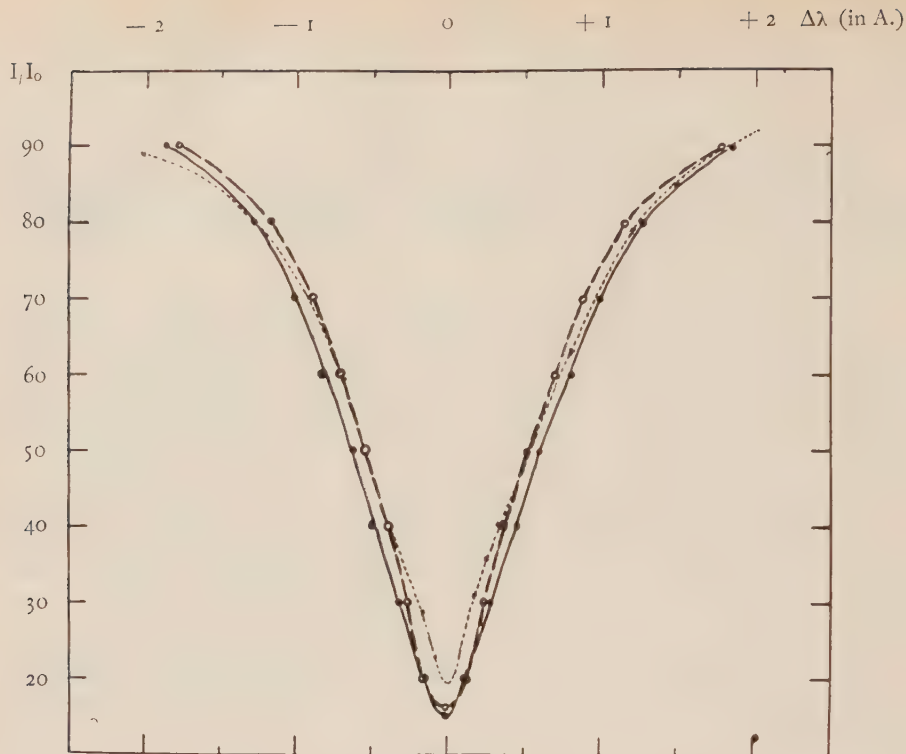


Fig. 1.

Spiegare le cause della creduta divergenza, il buon accordo del profilo di Arcetri con gli altri due sarebbe già sufficiente risposta alle critiche mosse dal Plaskett al metodo fotometrico da me seguito. Tuttavia è bene considerarle particolarmente. Queste critiche sono rivolte in special modo alle precauzioni fotometriche adottate per ottenere gli spettrogrammi e per calibrare il filtro graduale. Inoltre non sarebbe valido il procedimento usato, cioè l'aver ridotto i profili delle righe registrati in luce ultrarossa al microfotometro di Moll con le curve di trasmissione dedotte da misure fatte in luce visibile al microfotometro di Hartmann.

Quanto alle precauzioni fotometriche, leggendo la Nota del Plaskett posso dire che tutte quelle da lui adottate per assicurare la precisione del lavoro sono pure quelle da me accuratamente seguite, ed in più devo notare che disponendo qui di un'ottima immagine del sole di 18 cm. di diametro, la sicurezza nella scelta di un determinato punto del disco è notevole.

Per la calibrazione del filtro graduale ho controllato i valori della trasmissione delle diverse strisce dati dalla casa costruttrice (Zeiss) per mezzo di una scala di intensità note, ottenuta diaframmando convenientemente il collimatore dello spettrografo.

L'uso del microfotometro di Hartmann per le curve di trasmissione, e di quello di Moll per i profili, porterebbe a notevoli errori qualora la trasmissione del deposito fotografico dipendesse in modo notevole dalla lunghezza d'onda. È facile dimostrare come questa dipendenza o non sussiste, cioè il deposito fotografico si comporta come un filtro neutro, oppure anche se la trasmissione è funzione della lunghezza d'onda, per λ 5600 Å. (massimo di sensibilità per l'occhio) e λ 10000 Å. (massimo di sensibilità per la termopila) tale funzione ha lo stesso valore.

Nel concludere i profili e le intensità delle accennate righe mi ero già assicurato che non esisteva alcuna differenza nelle trasmissioni determinate coi due metodi; ho ripetuto ora, per un ulteriore accertamento, le misure comparative col microfotometro di Hartmann e con quello di Moll sulle medesime righe e sullo spettro continuo di una limitata zona nell'intorno di λ 5200 Å.

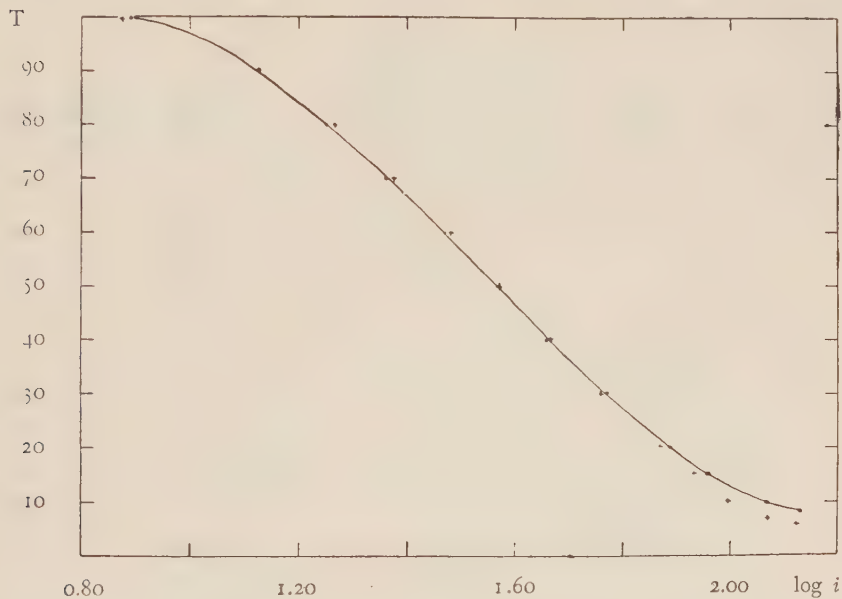


Fig. 2.

I risultati sono raccolti nella fig. 2, dove l'accordo fra quelli ottenuti col microfotometro di Hartmann (curva continua) e quelli ottenuti col microfotometro di Moll (croci) è bene evidente. Le deviazioni che si notano specialmente alle forti e deboli trasmissioni rimangono entro i limiti degli errori sperimentali.

Fisica. — *Sullo spettro Raman dell'acido solforico e sull'azione di un campo elettrico su di esso* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di V. RICCA, presentata dal Socio A. LO SURDO.

Lo spettro Raman dell'acido solforico è stato studiato da diversi sperimentatori, con risultati abbastanza concordanti ⁽³⁾.

Avendo iniziato una ricerca per stabilire se esista un'azione del campo elettrico sull'effetto Raman, ho eseguito delle esperienze preliminari sull'acido solforico in assenza del campo. Nel seguente specchietto sono riportati i valori delle lunghezze d'onda delle righe Raman, determinati da me e dagli altri autori:

Riga eccitatrice λ in Å	Ricca	Specchia	Bell e Fredrickson	Woodward	Riga eccitatrice λ in Å	Ricca	Specchia	Bell e Fredrickson	Woodward
4046.8	• 4107?	4111	—	4112	4358.3	4438	4438	4438	4435
—	• 4142	4140	4142	4142	—	4470	4468	4468	4470
—	4174	4165	4171	—	—	—	4491	—	—
—	4191	—	—	—	—	4520	—	—	—
—	4204	4196	4203	4203	—	4542	4535	4542	4550
—	4213	—	—	4216	—	4554	—	—	4554
—	• 4226	4225	4224	4227	—	4568	4568	4566	4567
—	• —	4244	—	—	—	4592	4590	4585	4587
—	—	4282	4276	4283	—	—	4640	—	4635
—	4314	—	—	—	—	4660	—	—	—

Le righe, che nei due specchietti si trovano sulla stessa orizzontale, corrispondono allo stesso spostamento di frequenza rispetto alla riga eccitatrice.

Di queste righe, alcune sono dovute all'ione SO_4^{--} , le altre alla molecola intera. Secondo Specchia le righe da attribuirsi allo ione SO_4^{--} e che

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1931.

(3) BELL e FREDRIKSON, «Phys. Rev.», 37, 1562, 1931; WOODWARD, «Phys. Zeitschr.», 32, 214, 1931; SPECCHIA, «Rend. R. Acc. Lincei», 13, 754, 1931.

d'altronde corrispondono a quelle calcolate teoricamente, ammettendo per detto ione la struttura tetraedrica, sono contraddistinte, nel precedente specchietto, da un puntino nero. Bell e Fredrickson osservano che la riga 4566 si presenta anche nell'acido nitrico, e aumenta d'intensità, anche in questo, con l'aumentare della diluizione. Da ciò essi sono indotti ad avanzare l'ipotesi, se pure con riserva, che tale riga possa essere attribuita all'ione H^+ ; ciò però non credo probabile, e la coincidenza dovrà forse attribuirsi al caso. Comunque, occorrerebbe sapere se si presenta negli altri acidi. Wood-

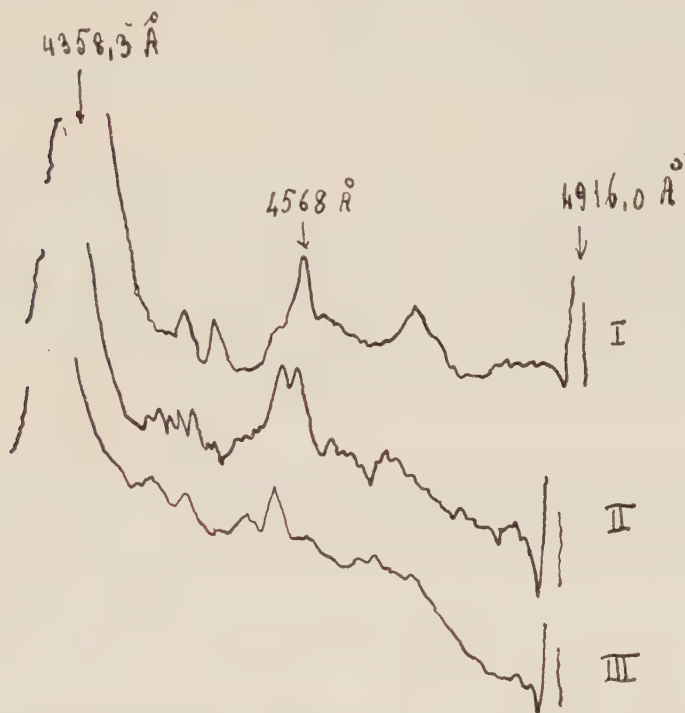


Fig. 1.

ward l'attribuisce all'ione HSO_4^- , il che è più probabile, allo ione SO_4^{--} apparterrebbero invece le righe 4216 e 4554 (corrispondenti a $\Delta\nu = 978 \text{ cm}^{-1}$). In complesso, dall'esame dello specchietto si può rilevare che il maggiore accordo dei diversi autori si raggiunge per le righe designate come appartenenti allo ione SO_4^{--} .

Per la ricerca dell'effetto prodotto dal campo elettrico, le esperienze vennero eseguite tenendo il liquido (una soluzione di acido solforico al 50% in peso) in un tubo fatto in modo tale che i prodotti dell'elettrolisi non attraversassero il cammino dei raggi diffusi. Il risultato ottenuto nelle esperienze preliminari è stato il seguente:

Allargamento delle righe (Raman e del mercurio non spostate) verso il violetto quando la corrente è diretta in modo che gli ioni H^+ si muovano nel verso dei raggi che vanno allo spettrografo, allargamento verso il rosso nel caso contrario. Si osserva inoltre una diminuzione della intensità delle righe dello spettro Raman in entrambi i casi, una variazione nelle intensità relative e uno sdoppiamento della riga 4568, quando la corrente fa muovere gli ioni H^+ verso lo spettrografo, come risulta chiaramente dalla curva II della fig. 1, nella quale sono riportati i diagrammi ottenuti con l'esame fotometrico delle lastre fotografiche, nella zona compresa fra le righe 4358.3 \AA e 4916 \AA del mercurio.

Queste esperienze non sono definitive; esse saranno ripetute in migliori condizioni, sia per accertare meglio i fatti osservati, sia per dare una possibile spiegazione di essi.

La prima idea che si affaccia alla mente, circa l'allargamento delle righe, è che il fenomeno sia dovuto ad effetto Doppler: però diverse considerazioni sembrano in contrasto con questa ipotesi.

Per ora ci limiteremo a supporre che gli effetti osservati sulle righe non modificate siano dovuti al moto nella direzione del campo degli ioni H^+ , e che quelli osservati sulle righe Raman, potrebbero pure in parte dipendere dal moto degli ioni H^+ nella direzione del campo, e in parte dall'azione orientatrice del campo elettrico sugli ioni.

Fisica. — *Sul magnetron di Hull.* Nota⁽¹⁾ di LEO PINCHERLE, presentata dal Socio Q. MAJORANA.

1. Nella presente Nota indico un metodo per la determinazione teorica della lunghezza d'onda delle oscillazioni ad altissima frequenza (oscillazioni elettroniche) emesse dal magnetron di Hull nel caso del campo magnetico parallelo all'asse del diodo.

La lunghezza d'onda di tali oscillazioni è stata determinata analiticamente dall'Okabe che per primo si è occupato dell'argomento. Egli suppone che il semiperiodo delle oscillazioni sia uguale al tempo necessario a un elettrone per portarsi dal filamento alla placca. Ora le equazioni del moto dell'elettrone sono, supposta l'orbita in un piano perpendicolare al campo magnetico, e usando coordinate polari:

$$(1) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{e}{m} F - \frac{e}{m} H r \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) = \frac{e}{m} H \frac{dr}{dt}$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1931.

dove m è la massa, e la carica dell'elettrone; H l'intensità del campo magnetico, F del campo elettrico. La (2) integrata dà, trascurando le velocità iniziali e il raggio del filamento:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{eH}{2m}$$

sostituendo in (1) si ha

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{He}{2m} \right)^2 r = \frac{e}{m} F.$$

L'integrale di questa equazione è una funzione sinusoidale di pulsazione

$$\omega = \frac{He}{2m}$$

uguale cioè alla velocità angolare.

Ricordando l'ipotesi fatta, ossia che per periodo T si deve intendere il semiperiodo e non il consueto periodo, si ha per la lunghezza d'onda delle oscillazioni emesse dal diodo

$$\lambda = cT = \frac{c\pi}{\omega} = \frac{2\pi cm}{eH} = \frac{10.600}{H}$$

dove c è la velocità della luce.

La lunghezza d'onda è dunque inversamente proporzionale all'intensità del campo magnetico. Ciò è confermato dalle esperienze dello stesso Okabe, ma l'esperienza dà un valore della costante notevolmente diverso; precisamente la formula empirica è

$$\lambda = \frac{13.000}{H}.$$

Una formula in miglior accordo con l'esperienza è stata data da Slutzkin e Steinberg, i quali sono partiti dalla stessa ipotesi di Okabe; il calcolo non viene riportato da questi AA.; il risultato è

$$\lambda = c \int_{r_0}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2 \frac{e}{m} (A + B \log r) - \frac{1}{4} \left(\frac{He}{2m} \right)^2 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right)^2}}.$$

L'integrale può essere calcolato solo in casi particolari.

2. Ora il problema si può trattare più agevolmente per altra via. Infatti basta osservare che si tratta di un sistema di elettroni sottoposto a campo magnetico uniforme, ossia ci si trova in condizioni analoghe a quelle

per esempio dell'effetto Zeeman. Perciò ho usato il metodo Lorentz per la teoria classica di questo effetto, essendo stato indotto a ciò anche dal fatto che in prima approssimazione la pulsazione del moto elettronico è precisamente uguale alla velocità angolare del moto di precessione di Larmor.

Applicando dunque il teorema di questo Autore, il campo magnetico fa descrivere agli elettroni un cerchio di raggio $r = \frac{mv}{eH}$ (1) dove v è la velocità dell'elettrone.

Per avere la traiettoria reale occorrerebbe combinare l'azione del campo magnetico con quella del campo elettrico.

Anche la velocità dell'elettrone dipende dal campo elettrico e dal campo magnetico. Indicando con v_e e v_m le due componenti, si può ritenere che sia

$$v^2 = v_e^2 + v_m^2.$$

Come ipotesi suppongo che le oscillazioni avvengano, secondo quanto suggerisce l'esperienza, quando il raggio r del cerchio che il campo magnetico fa descrivere agli elettroni è uguale al raggio anodico R .

Suppongo inoltre, come ho accennato, che la frequenza del moto circolare sia anche la frequenza delle oscillazioni emesse. Quindi sviluppo il calcolo nel caso di $r = R$. In questo caso la velocità dovuta al campo elettrico può ricavarsi dalla relazione $\frac{1}{2} m v_e^2 = eV$ dove V è la tensione anodica.

Se n è il numero dei giri dell'elettrone al secondo, la velocità dovuta al campo magnetico è $v_m = 2\pi R n$ quindi

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} V + 4 \pi^2 R^2 n^2}.$$

Sostituendo in (1)

$$R = \frac{m}{eH} \sqrt{2 \frac{e}{m} V + 4 \pi^2 R^2 n^2}$$

e ponendo

$$\lambda = \frac{c}{n}, \quad \lambda = \frac{2 \pi c m R}{e} \left[H^2 R^2 - 2 \frac{m}{e} V \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Se la tensione anodica fosse trascurabile di fronte al quadrato del campo magnetico si ricadrebbe nella formula di Okabe; ma in base alla ipotesi che il raggio dell'orbita elettronica coincida col raggio anodico, la tensione anodica e il campo magnetico sono legati dalla relazione di Hull

$$RH = \sqrt{8 \frac{m}{e} V}. \quad (3)$$

Quindi eliminando V tra (2) e (3)

$$\lambda = \frac{4 \pi m c}{\sqrt{3} e H} = \frac{12.300}{H}$$

Come si vede è abbastanza buona la concordanza tra il valore sperimentale 13000 della costante e il valore 12300 che risulta dal calcolo precedente; ho però osservato sperimentalmente che tale accordo permane finchè i diodi impiegati sono di dimensioni molto piccole (R minore di 2 m/m) e se la intensità del campo magnetico è molto grande.

Fisica. — *Lo spettro Raman nelle soluzioni di zucchero*⁽¹⁾.
Nota⁽²⁾ di V. POLARA, presentata dal Socio A. LO SURDO.

La glicerina possiede uno spettro⁽³⁾ Raman costituito da sette righe, il cui spostamento dalle righe eccitatrici è dato da:

$$(1) \quad \Delta\nu = 480 - 690 - 850 - 925 - 1080 - 1450 - 2900 \text{ cm}^{-1}.$$

A temperatura ordinaria essa presenta inoltre, secondo le ricerche di Venkateswaran⁽⁴⁾, una banda ancora più estesa di quella dell'acqua, dovuta alla sua grande viscosità, banda che lascia il posto a delle righe quando il liquido venga riscaldato verso i 120° e diluito con acqua.

In vista dell'analogia nelle formule strutturali della glicerina e degli zuccheri, mi è parso interessante sottoporre ad esame le soluzioni in acqua di zucchero comune, tanto più che di tale sostanza, di struttura molecolare alquanto complessa, si sono occupati solo ed occasionalmente Wawillow e Tummermann⁽⁵⁾, i quali, osservando gli spettri Raman di liquidi molto viscosi, gli sciroppi di zucchero compresi, notarono che essi sono veri e propri spettri continui, che si estendono da 3600 Å a 5000 Å, con un massimo d'intensità verso i 4000 Å.

Adoperando soluzioni di zucchero con una concentrazione molecolare variabile dal 3% al 9%, e servendomi d'una lampada Hereaus a vapori di mercurio con arco di 35 cm di lunghezza circa come sorgente di illuminazione, ho potuto osservare che, alla temperatura che il liquido assume sotto l'azione dell'irraggiamento della lampada, certamente non superiore

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Messina.

(2) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1931.

(3) SCHAEFER und MATOSI, « Fortschritte der Chemie », Bd. 20, H. 6, p. 353, 1930.

(4) VENKATESWARAN, « Ind. Journ. of Phys. », 3, p. 105, 1928.

(5) WAWILLOW e TUMMERMAN, « Zeitschr. f. Phys. », 54, p. 270, 1929.

ai 40° C (data la refrigerazione dell'arco), la luce diffusa presenta uno spettro Raman a righe individuabili, ma di debole intensità, e più notevolmente diffuse di quelle fornite dal benzolo. La debole intensità di tali righe, per cui la loro esatta localizzazione richiede un esame assai accurato, è presumibilmente da attribuire in parte alla piccola concentrazione molecolare della sostanza nella soluzione, che non si può molto aumentare se si vuole evitare che il liquido diventi sciropposo e molto viscoso, ed in ogni caso ha un limite nella saturazione della soluzione, ed in parte alla presenza d'un debole spettro continuo dovuto all'arco, che impedisce di aumentare di molto il periodo di posa nelle fotografie. Dopo alcuni giorni di funzionamento della lampada inoltre il tubo di quarzo che circonda l'arco si è un po' annerito, con una diminuzione nell'intensità delle radiazioni luminose eccitatrici.

Le migliori osservazioni sono state fatte con soluzioni di zucchero di concentrazione 7% molecolare e fotografando lo spettro della luce diffusa con una posa di 4 ore circa. Ho potuto adoperare per ora uno spettrografo Hilger di 50 cm. di distanza focale per il dominio visibile. Mi propongo di ripetere le esperienze adoperando un altro tipo di lampada, filtri convenienti ed uno spettrografo per raggi ultravioletti. I risultati ottenuti devono quindi considerarsi come non definitivi.

Le righe ottenute, con un errore che giudico non superi, in generale, i 30 cm⁻¹ nel computo dello spostamento dalla riga eccitatrice, corrispondono ai seguenti valori della lunghezza d'onda in Ångstrom ed alla frequenza in numero d'onda (cm⁻¹):

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Å} \quad 4153 - 4162 - 4211 - 4226 - 4246 - 4262 - 4278 - \\ \text{cm}^{-1} \quad 24080 - 24025 - 23760 - 23670 - 23560 - 23475 - 23375 - \\ \quad \quad \quad - 4292 - 4406 - 4414 - 4433 - 4462 \\ \quad \quad \quad - 23280 - 22695 - 22650 - 22555 - 22410 \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{Å} \quad 4489 - 4495 - 4527 - 4565 - 4583 - 4604 - 4632 - \\ \text{cm}^{-1} \quad 22270 - 22240 - 22080 - 21900 - 21825 - 21720 - 21590 - \\ \quad \quad \quad - 4661 - 4705 - 4782 - 4802 - 4818 - 4872 - 4944 - 4988 \\ \quad \quad \quad - 21454 - 21255 - 20915 - 20825 - 20760 - 20525 - 20220 - 20065 . \end{array} \right.$$

Tali valori sono stati dedotti per confronto con lo spettro dell'arco fra elettrodi di ferro, fotografato accanto allo spettro Raman.

Considerando le righe (2) come eccitate dalla riga *k* dell'arco (4046 Å o 24705 cm⁻¹), e le righe (3) come eccitate dalla riga *e* dell'arco (4358 Å o 22938 cm⁻¹), gli spostamenti Δν dalla riga eccitatrice saranno rispettivamente:

Delle rimanenti righe (4) delle soluzioni di zucchero quelle corrispondenti agli spostamenti:

$$1037 - 1224 - 1339 \text{ cm}^{-1}$$

trovano corrispondenza negli alcool, che, secondo Venkateswaran ⁽¹⁾, sono caratterizzati dagli spostamenti:

$$1050 - 1250 - 1360 \text{ cm}^{-1}.$$

Anche la riga corrispondente allo spostamento 1134 cm^{-1} trova corrispondenza negli alcool, giacchè nelle fotografie del Wood ⁽²⁾ si riscontra lo spostamento 1110 cm^{-1} per gli alcool butilico ed isobutilico. Tali righe sono contrassegnate da un asterisco sottostante in (4).

Questi risultati trovano giustificazione nella analogia di struttura molecolare fra gli zuccheri, la glicerina e gli alcool.

La varietà delle righe riscontrate nelle soluzioni di zucchero e la complessità molecolare di questa sostanza si prestano ad un esame della rispondenza dei valori assegnati dai vari Autori agli spostamenti relativi alle righe Raman caratteristiche di certi tipi di legami nella struttura molecolare.

I tipi di legami che nella serie alifatica pare trovino rispondenza in particolari righe Raman, sono, secondo le ricerche di Petrikalen ⁽³⁾, Charles S. Morris ⁽⁴⁾ e Venkateswaran ⁽⁵⁾, i seguenti:

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)
$\begin{array}{c} \\ -\text{C}- \\ \\ \text{H} \end{array}$	$\begin{array}{c} -\text{C}= \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ -\text{C}- \\ \\ \text{H} \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ -\text{C}-\text{OH} \\ \end{array}$	$\begin{array}{c} \\ \text{C}=\text{O} \\ \\ \text{H} \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{H} \\ \\ \text{H}-\text{C}-\text{C} \\ \\ \text{H} \end{array}$	$\begin{array}{c} \quad \\ -\text{C}-\text{C}- \\ \quad \end{array}$
2900	600 1700	1446	1050 1250 1360	3040	2929	1024

Le lettere maiuscole sovrastanti servono di contrassegno per tali tipi di legami ed i numeri sottostanti indicano i valori degli spostamenti in cm^{-1} delle corrispondenti righe Raman dalle righe eccitatrici, assegnati dagli autori in base ad osservazioni fatte su varie sostanze organiche.

(1) VENKATESWARAN, «Ind. Journ. of Phys.», 5, p. 129, 1930.

(2) WOOD, «Phyl. Mgz.», 7, p. 858, 1929.

(3) PETRIKALEN, «Zeitschr. f. phys. Chemie», Bd. 3, p. 217, 1929.

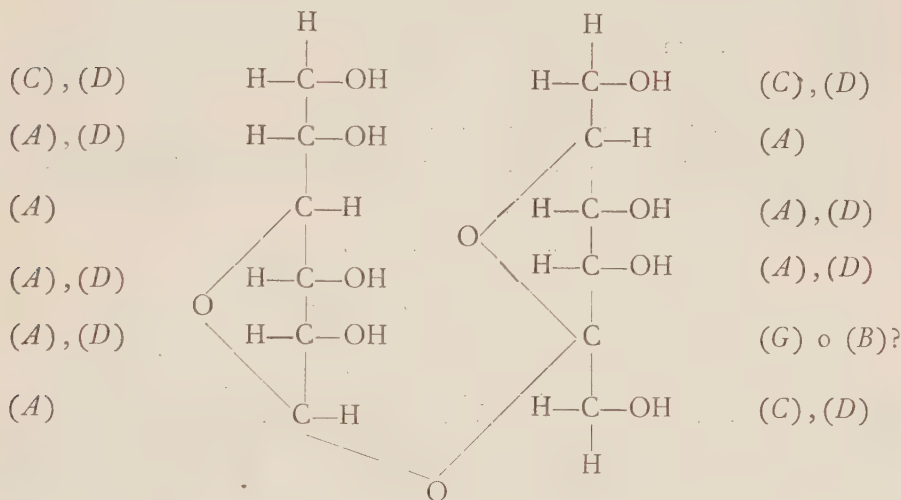
(4) CHARLES S. MORRIS, «Phys. Rev.», 38, p. 141, 1931.

(5) VENKATESWARAN, loc. cit.


Ora è facile riconoscere che nelle righe (4) delle soluzioni di zucchero compaiono gli spostamenti corrispondenti ai tipi di legami (A), (C), (D), (G), con valori approssimati a meno di 30 cm^{-1} . Torniamo perciò a scrivere gli spostamenti delle righe (4), indicando sotto il tipo di legame corrispondente.

$$\begin{array}{lcl}
 \Delta\nu = & 625 - 668 - 689 - 858 - 945 - 1037 - 1134 - 1224 - & \\
 & ?(B) = 600 & (D) = 1050 \quad (D) = 1250 - \\
 & & (G) = 1024 \\
 (4') & \left\{ \begin{array}{l} \text{————— } 1339 \text{ ————— } 1425 - 1488 - 1683 - 2016 - 2055 - \\ - (D) = 1360 - (C) = 1446 \quad ?(B) = 1700 \\ - 2113 - 2160 - 2404 - 2718 - 2873 . \\ \quad \quad \quad (A) = 2900 \end{array} \right. &
 \end{array}$$

D'altra parte appare evidente che tali tipi di legami (A), (C), (D), (G), compaiono nella formula di struttura dello zucchero, giacchè per il saccarosio si ha:



È singolare che nelle righe Raman (4) e (4') delle soluzioni di zucchero si osservano i valori 625 cm^{-1} e 1683 cm^{-1} degli spostamenti, valori prossimi a quelli dati come caratteristici del gruppo —C= , che

abbiamo contrassegnato con (B). Sorge l'idea che tali spostamenti siano attribuibili al tipo di legame  che potrebbe meccanicamente, per le

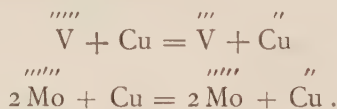
vibrazioni che vi corrispondono, non essere molto dissimile dal legame —C=; ma tale supposizione ha bisogno di ulteriori conferme sperimentali.

Si conclude che nello spettro Raman delle soluzioni di zucchero si riscontrano cinque delle sette righe della glicerina e quattro righe riscontrate negli alcool: in esso trovano inoltre riscontro i vari tipi di legami che nella struttura molecolare dei composti della serie alifatica si ritiene rispondano a particolari righe Raman.

Chimica. — *Determinazione volumetrica del vanadio e del molibdeno. (Considerazioni elettrochimiche sulla attività riduttrice del rame metallico)*⁽¹⁾. Nota di G. SCAGLIARINI e P. PRATESI⁽²⁾, presentata dal Corrisp. M. BETTI.

In una Nota precedente⁽³⁾ abbiamo esposto alcuni risultati circa l'azione riduttrice del rame sopra alcuni metalli che presentano diversi gradi di ossidazione, e precisamente trovammo che, in ambiente solforico il rame riduce quantitativamente il Fe a $\overset{\text{III}}{\text{Fe}}$ e $\overset{\text{VI}}{\text{U}}$ a $\overset{\text{IV}}{\text{U}}$ mentre non ha alcuna azione sul $\overset{\text{IV}}{\text{Ti}}$ e sul $\overset{\text{III}}{\text{Cr}}$.

Abbiamo esteso queste ricerche al vanadio e al molibdeno; i quali nelle stesse condizioni di esperienza vennero ridotti quantitativamente a $\overset{\text{III}}{\text{V}}$ e a $\overset{\text{V}}{\text{Mo}}$ secondo gli schemi seguenti:



Si usarono rispettivamente il metavanadato ammonico e l'anidride vanadica, il molibdato ammonico e l'acido molibdico che, sciolti in acido solforico al 10-15 %, vengono ridotti all'ebollizione (15' circa) con spirale di rame elettrolitico e riossidati con permanganato N/20: si consumano esattamente due equivalenti di ossigeno per un atomo di vanadio e un equivalente di ossigeno per un atomo di molibdeno. Accertato il grado di riduzione che viene raggiunto col rame, abbiamo eseguito numerose esperienze di dosamento del molibdeno e del vanadio dalla quantità di permanganato potassico consumato dopo la riduzione con il rame. I risultati furono molto soddisfacenti e in considerazione della grande semplicità e rapidità del metodo riteniamo che esso possa trovare impiego nella pratica analitica corrente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1931.

(3) « An. Ch. Applicata », vol. 19, fasc. 2, p. 85 (1929).

Il dispositivo per tali dosamenti è identico a quello descritto nella prima Nota (loc. cit.) per il ferro e l'uranio e ad essa rimandiamo. Nelle seguenti tabelle sono riportati i risultati di alcune delle numerose determinazioni eseguite:

Determinazioni eseguite sul metavanadato d'ammonio

1 cc. $\text{KMnO}_4\text{N}/20 = \text{gr. } 0.0012737 \text{ di V.}$

N.	Gr. di NH_4VO_3 presi	cc. KMnO_4 N/20	V trovato gr.	V calcolato gr.	Differenza	% V nel NH_4VO_3 trovato
1	0.05	17	0.02165	0.02177	— 0.00012	43.30
2	0.05	17.2	0.02190	0.02177	+ 0.00013	43.81
3	0.05	17	0.02165	0.02177	— 0.00012	43.30
4	0.05	17.2	0.02190	0.02177	+ 0.00013	43.81
5	0.08	27.5	0.03502	0.03483	+ 0.00019	43.78
6	0.10	34.1	0.04343	0.04354	— 0.00011	43.43
7	0.10	34.5	0.04394	0.04354	+ 0.00040	43.94
8	0.12	41.1	0.05234	0.05225	+ 0.00009	43.62
9	0.15	51.2	0.06521	0.06531	— 0.00010	43.47
Media						43.60
Teorico						43.55

Determinazioni eseguite sul molibdato ammonico

1 cc. $\text{KMnO}_4\text{N}/20 = \text{gr. } 0.0048 \text{ di Mo.}$

N.	Molibdato preso corrisp. a gr. di MoO_3	cc. KMnO_4 N/20	Mo trovato gr.	Mo calcolato gr.	Differenza	% Mo nel MoO_3 trovato
1	0.1631	22.6	0.1085	0.1087	— 0.0002	66.53
2	0.1631	22.7	0.1089	0.1087	+ 0.0002	66.77
3	0.1631	22.6	0.1085	0.1087	— 0.0002	66.53
4	0.2447	34.0	0.1632	0.1631	+ 0.0001	66.69
5	0.3262	45.2	0.2169	0.2174	— 0.0005	66.50
6	0.4077	56.7	0.2721	0.2717	+ 0.0004	66.74
7	0.4893	68.1	0.3268	0.3261	+ 0.0007	66.79
Media						66.65
Teorico						66.67

Si deve escludere la presenza di acido cloridrico come nel caso del ferro e uranio poichè altrimenti si trovano valori troppo elevati. Si è pensato anche di poter dosare indirettamente l'acido fosforico precipitandolo allo stato di fosfomolibdato e determinando in questo il molibdeno; il metodo dovrebbe presentare una particolare sensibilità poichè a un atomo di fosforo corrispondono, nel fosfomolibdato, 12 atomi di molibdeno. Abbiamo iniziate ricerche in questo senso che in seguito comunicheremo.

I risultati sperimentali a cui si è giunti trovano chiara spiegazione qualora si confrontino il valore del potenziale del rame e il valore dei potenziali di ossido-riduzione dei sistemi ionici con esso cimentati. Difatti il potenziale normale del rame ha un valore di $+0.34$, e il potenziale di ossido-riduzione del $\text{Fe}^{+++} \rightarrow \text{Fe}^{++} = +0.75$ il che vuol dire che essendo il secondo più positivo del primo il ferro ferrico ha tendenza ad assumere elettroni dal rame metallico per ridursi a sale ferroso, e, si può anche calcolare, in modo quantitativo; invece il potenziale di ossido-riduzione del

$\text{Ti}^{++++} \rightarrow \text{Ti}^{+++}$ avendo un valore di $+0.056$ essendo cioè negativo rispetto al rame avrà tendenza a cedere elettroni al rame stesso, e cioè il rame non solamente non potrà compiere la riduzione $\text{Ti}^{++++} \rightarrow \text{Ti}^{+++}$ ma, il titanio trivalente ridurrà le soluzioni cupriche con precipitazione di rame metallico. Inoltre ci si può rendere ragione del fatto che tutto il rame passa in modo quantitativo a bivalente senza traccia cioè di ioni monovalenti, giacchè

essendo il potenziale di ossido-riduzione $\text{Cu}^{++} \rightarrow \text{Cu}^{+} = +0.18$, cioè ancora inferiore al potenziale normale del rame, il Cu^{+} cederà ancora più facil-

mente elettroni al ferro per passare a Cu^{++} , come naturalmente avviene. Si poteva inoltre prevedere che il vanadio, pure potendo essere ridotto dal rame dalla forma penta alla forma trivalente, non poteva essere ridotto

più oltre, perchè il valore del potenziale di ossido-riduzione del $\text{V}^{+++} \rightarrow \text{V}^{++}$ è uguale a -0.204 , valore cioè di gran lunga inferiore al potenziale normale del rame. Con metalli opportunamente scelti, secondo i loro potenziali normali, si potrebbero eseguire riduzioni frazionate su sistemi di ioni capaci di diversi gradi di valenza, in modo da potere a volontà passare quantitativamente e nettamente da un determinato grado di valenza ad un altro più basso e perfettamente determinato. Stiamo eseguendo ricerche in proposito.

Chimica. — *Sull'impiego dei raggi X in analisi quantitativa*⁽¹⁾.
Nota⁽²⁾ di V. CAGLIOTI e P. AGOSTINI, presentata dal Socio
N. PARRAVANO.

È noto che i raggi X hanno avuto da parecchi anni applicazioni nell'analisi chimica, mostrandosi mezzo di indagine preziosissimo in questo campo. Il loro impiego è fondato sullo studio degli spettri di emissione o su quello degli spettri di assorbimento. Il primo metodo ha trovato in principio maggiore applicazione in analisi qualitativa. Esso però presenta notevoli cause di errore; si può avere, infatti, vaporizzazione della sostanza da esaminare a causa del forte riscaldamento con conseguente diminuzione della sua quantità durante il tempo di esposizione, assorbimento selettivo delle radiazioni proprie degli atomi per la presenza di elementi a numero atomico vicino e aumento dell'intensità delle linee di certi elementi per l'eccitazione propria del materiale anticatodico. Coster e Nishina⁽³⁾ prima, e quindi Glocker e Schreiber⁽⁴⁾, Hevesy e collaboratori⁽⁵⁾ hanno recentemente perfezionato tale metodo, sia mediante una scelta opportuna del materiale anticatodico e delle sostanze che si accompagnano con quelle da esaminare, sia con l'impiego dei raggi X secondari, in modo da eliminare gli effetti disturbatori che falserebbero del tutto i risultati impedendo di utilizzarli a fini quantitativi.

Esso però rimane sempre un metodo molto difficile, che richiede una lunga taratura preliminare e tempo notevole.

Si presta meglio, invece, perchè di più facile e generale applicazione il metodo introdotto da Glocker e Fronhnmayer⁽⁶⁾, fondato sullo studio dell'intensità dello spettro di assorbimento.

I due AA. misurano il salto di assorbimento dello spettro roentgen « continuo » dalle due parti di una banda di assorbimento.

Il rapporto delle intensità osservate è direttamente dipendente dalla massa p di sostanza colpita dal fascio di raggi ed espressa in gr/cm^2 ,

secondo la relazione $\frac{I_2}{I_1} = e^{-cp}$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1931.

(3) « Chem. News. », 130-149 (1929).

(4) « Ann. der Phys. », 85, 1089 (1928); SCHREIBER, « Z. f. Physik », 58, 619 (1929).

(5) « Z. f. Physik », 63, 74 (1930).

(6) « Ann. der Phys. », 76, 369 (1925).

La costante c , caratteristica per ogni elemento si calcola teoricamente dalle leggi di assorbimento o si può anche dedurre sperimentalmente; la ricerca perciò si riduce ad una determinazione di intensità dello spettro di assorbimento, che si può fare mediante lo spettrometro di ionizzazione o fotometrando lo spettro con un microfotometro che permetta di misurare l'annerimento di un campo piccolissimo; occorre perciò servirsi di un microfotometro a microscopio.

Glocker e Frohnmayer, con questo metodo, che è molto preciso, sono arrivati a ricercare e dosare il bario in un vetro, il contenuto di antimonio nei silicati, a fare analisi di miscele di sali diversi, a dosare anche il tenore in bismuto nelle leghe. Come sorgente luminosa hanno adoperato un tubo ad anticatodo di volframo, ai cui estremi facevano variare opportunamente l'eccitazione in modo da poter disporre di uno spettro costituito da una gamma di lunghezze d'onda, fra cui fosse compresa quella corrispondente alla banda di assorbimento dell'elemento in esame.

La sostanza da studiare viene posta in lamine, o in soluzioni o polvere in vaschette di gomma dura dietro la fenditura di uno spettrografo (gli AA. adoperavano lo spettrografo di Seemann), raccogliendo le radiazioni riflesse dal cristallo di cloruro di sodio su lastra fotografica.

Siccome però la determinazione precisa dell'intensità di annerimento di un fondo continuo è molto più difficile di quanto non sia la misura dell'intensità di una determinata riga, specie quando si voglia generalizzare l'impiego di questo metodo di indagine in laboratori non specializzati, si è cercato di sostituire alla sorgente a spettro « bianco », radiazioni monocromatiche. E così Delauney⁽¹⁾ impiega come sorgente una o più radiazioni monocromatiche, precisamente le radiazioni K di elementi pesanti, con lunghezza d'onda inferiore a 0.8 \AA per attenuare le notevoli perdite di energia e rendere più sensibile la misura dell'intensità, che viene fatta mediante una camera di ionizzazione a xeno collegata con un elettrometro.

Più recentemente Moxnes⁽²⁾, nel laboratorio di Goldschmidt, ha determinato l'influenza che una banda di assorbimento esercita sul rapporto di intensità di due linee roentgen che si trovano dalle due parti della banda stessa.

Sperimentando con lo zinco, che ha la banda di assorbimento K compresa fra le lunghezze d'onda L_{β_3} e L_{β_4} del volframo, ha osservato che il 2 % di ossido di zinco in Al_2O_3 , quando era attraversato dal fascio di raggi X per lo spessore di 1 mm. era già sufficiente a ridurre il rapporto di intensità delle due linee di cui sopra, dal valore normale 3:2 a 1:1.

Abbiamo voluto vedere se altrettanto si verificasse anche per le altre righe della serie K con lunghezza d'onda inferiore a 0.8 \AA e se, non ri-

(1) « Bull. Soc. Chim. France », pp. 805-819, 1926.

(2) « Zeit. Phys. Chem. », 144, 134 (1929).

correndo all'impiego di microfotometri speciali o di camere di ionizzazione, ma solo servendosi di un microfotometro «scrivente», tale metodo fosse suscettibile di applicazione in analisi quantitativa.

Abbiamo perciò sperimentato con le lunghezze d'onda K_{α} e K_{β} del rame, alimentando un tubo roentgen ad elettroni con 40 Kv. e 8 MA. Il

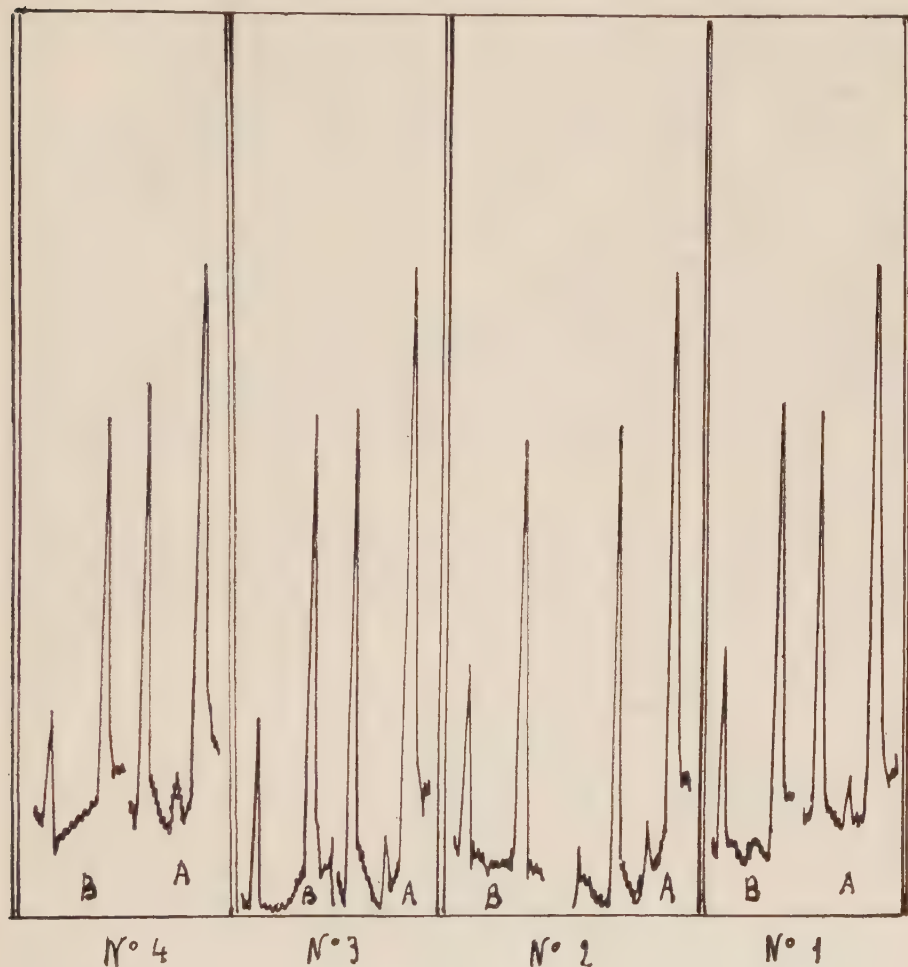


Fig. 1.

fascio di raggi passava per la fenditura di mm. 0.15 di un semplice spettrografo Müller, e giungeva, in parte direttamente, ed in parte attraverso la sostanza in esame, sul cristallo di cloruro di sodio, a cui si imprimeva una rotazione di 5° , in modo da formare un angolo di 11° – 16° rispetto al fascio incidente. I raggi riflessi erano quindi raccolti sulla lastra fotografica posta a 4 cm. dal cristallo.

La sostanza in esame era posta immediatamente dietro la fenditura dello spettrografo ed era contenuta in una vaschetta dallo spessore di 1 mm. a pareti di film di celluloidi. Per poter avere, in ogni prova, lo spettro campione, la vaschetta era riempita solo per metà dalla sostanza da esaminare, di modo che il fascio attraversava detta sostanza nella parte inferiore, mentre, per la parte superiore, giungeva direttamente al cristallo; solo così infatti, ci è parso di poterci rendere indipendenti per tutte le prove, dalle lievi oscillazioni della tensione che, per quanto abbiamo cercato di ridurre al minimo, sono inevitabili per lunghi tempi di posa.

Abbiamo scelto quale sostanza da esaminare il nichel, la cui banda di assorbimento K giace fra la K_{α} e la K_{β} del rame. Abbiamo preparato miscele di ossidi di nichel e di alluminio per l'evaporazione delle soluzioni dei nitrati e successiva calcinazione; il nichel era sempre dosato per analisi dell'ossido risultante.

Tutti gli spettrogrammi sono stati ottenuti per esposizione di 3 ore e le lastre sono state sviluppate contemporaneamente. Lo spettro sulla lastrina è nettamente diviso in due strati: una zona inferiore, meno intensa, corrispondente alla zona di assorbimento, e una superiore dello spettro puro.

Per ogni campione abbiamo perciò eseguito due microfotometrie, una in corrispondenza dello spettro puro (A), e l'altra per lo spettro della sostanza (B).

Nella fig. 1 sono riportate le microfotometrie che si riferiscono a campioni diversi di ossido di alluminio contenenti 0.21 % di NiO (N. 1) 0.91 % di NiO (N. 2) 1.97 % di NiO (N. 3) 3.98 % di NiO (N. 4).

Su ogni microfotometria la parte A si riferisce allo spettro puro, la parte B allo spettro di assorbimento.

In tutti e quattro i campioni il rapporto di intensità delle linee K_{α} e K_{β} dello spettro puro è rispettivamente:

$$\begin{aligned} \text{N. 1: } \frac{I_{\lambda K_{\alpha}}}{I_{\lambda K_{\beta}}} &= \frac{5}{3.9} \quad ; \quad \text{N. 2: } \frac{I_{\lambda K_{\alpha}}}{I_{\lambda K_{\beta}}} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \text{N. 3: } \frac{I_{\lambda K_{\alpha}}}{I_{\lambda K_{\beta}}} = \frac{5}{4.1} \quad ; \\ \text{N. 4: } \frac{I_{\lambda K_{\alpha}}}{I_{\lambda K_{\beta}}} &= \frac{5}{4.1} . \end{aligned}$$

Esso si mantiene, cioè, praticamente costante.

Calcolando il rapporto di intensità delle righe α dello spettro campione I_0 e dello spettro di assorbimento I_1 , osserviamo anche un rapporto costante, come risulta dalla seguente tabella:

$$\begin{aligned} \text{N. 1: } \frac{I_0 \lambda K_{\alpha}}{I_1 \lambda K_{\alpha}} &= \frac{5}{3.9} \quad ; \quad \text{N. 2: } \frac{I_0 \lambda K_{\alpha}}{I_1 \lambda K_{\alpha}} = \frac{5}{3.94} \quad ; \\ \text{N. 3: } \frac{I_0 \lambda K_{\alpha}}{I_1 \lambda K_{\alpha}} &= \frac{5}{3.96} \quad ; \quad \text{N. 4: } \frac{I_0 \lambda K_{\alpha}}{I_1 \lambda K_{\alpha}} = \frac{5}{3.92} . \end{aligned}$$

Possiamo cioè concludere che l'assorbimento della riga è costante per i diversi campioni.

Grande differenza si osserva invece nel rapporto di intensità delle righe λ_α e λ_β nello spettro di assorbimento, rispetto allo spettro campione. Assegnando infatti il valore 4 all'intensità della λ_α , si ha che il rapporto di intensità dello spettro, assume il seguente valore per i diversi campioni:

$$N. 1 : \frac{I_1 \lambda K_\alpha}{I_1 \lambda K_\beta} = 1.933 \quad ; \quad N. 2 : \frac{I_1 \lambda K_\alpha}{I_1 \lambda K_\beta} = 2.107 \quad ;$$

$$N. 3 : \frac{I_1 \lambda K_\alpha}{I_1 \lambda K_\beta} = 2.334 \quad ; \quad N. 4 : \frac{I_1 \lambda K_\alpha}{I_1 \lambda K_\beta} = 2.664.$$

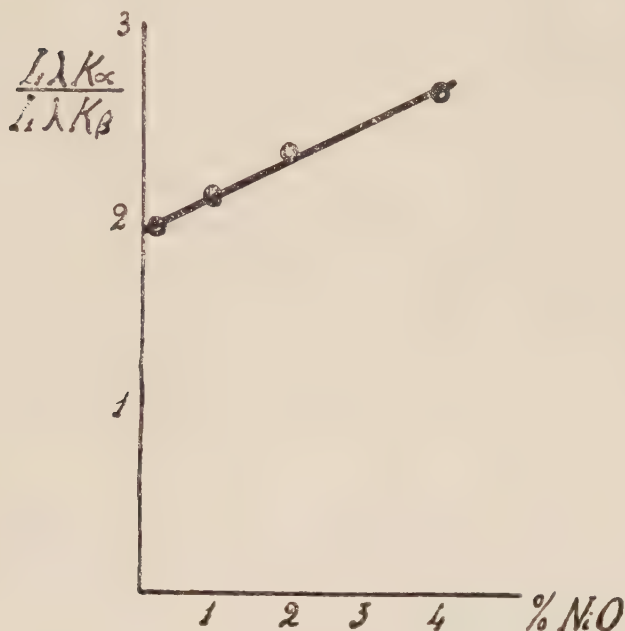


Fig. 2.

Se riportiamo su un diagramma (fig. 2) i risultati di tali indagini, rappresentando sull'asse delle ascisse il percento in ossido di nichel e sull'asse delle ordinate i valori del rapporto delle intensità, troviamo che vi è sufficiente proporzionalità fra le percentuali in ossido e l'assorbimento della radiazione.

Perciò, nei casi in cui è possibile, quando cioè con l'elemento in esame non si accompagnino elementi che assorbono completamente le radiazioni caratteristiche dell'anticatodo, l'uso di radiazioni monocromatiche, nell'analisi quantitativa, ci sembra di più facile impiego dello spettro continuo, specialmente ove si adoperino materiali anticatodici costituiti da leghe di diversi elementi (es.: rame-ferro) e si abbia cura di raccogliere sulla stessa lastrina lo spettro puro e quello di assorbimento.

Chimica (Chimica fisiologica). — *Contributo alla conoscenza del valore nutritivo di alcuni cereali*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ di V. FAMIANI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Recentemente G. Tallarico⁽³⁾, partendo da un complesso di dati da lui raccolti, nonchè da logiche deduzioni tratte da personali osservazioni, ha insistito giustamente sul concetto, che diverso deve essere il valore nutritivo delle cariossidi di grano a seconda del differente loro volume.

Infatti, col variare del volume complessivo, deve necessariamente anche variare il rapporto quantitativo tra i costituenti chimici della porzione embrionale e quelli della restante parte della cariosside; e siccome molti fatti inducono ad attribuire appunto ai primi (e specialmente ai costituenti proteici), un particolare valore biologico e plastico, di grado più elevato di quello, che spetta invece ai rimanenti, logicamente ne deriva, che il valore nutritivo dei grani di piccola dimensione deve essere più alto di quello dei grani di dimensione maggiore.

Data l'importanza evidente di questo problema, che ha interesse non solo dal punto di vista puramente scientifico, ma anche dal punto di vista pratico, si comprende il nostro proposito di portare all'argomento il contributo sperimentale più accurato, rigoroso ed ampio, che ci fosse stato possibile.

Abbiamo pertanto ritenuto utile iniziare una serie sistematica di ricerche, diretta a comparare il valore nutritivo di vari semi (di cereali e di legumi), e tenendo presenti non solo i fenomeni costruttivi (o di accrescimento), sì bene anche i fenomeni ricostruttivi (nella condizione sperimentale di rialimentazione dopo il digiuno).

Incominciamo col riferire nella presente Nota i risultati di un primo gruppo delle nostre esperienze, eseguito con grano, con granturco e con orzo, su ratti albinì in via di accrescimento.

La scelta è caduta sui suddetti cereali precisamente pel fatto, che ci è sembrato utile approfittare dell'opportunità che ci offrivano, pei confronti che volevamo fare, altre esperienze già in corso coi medesimi e tendenti ad altro scopo.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1931.

(3) G. TALLARICO, *Saggi di eugenica ambientale*. « Maternità e Infanzia » (Boll. mensile dell'Op. Naz. per la protez. d. Mat. e Infanzia), n. 8, 1930. ID., *Il volume delle cariossidi di grano in relazione col loro valore nutritivo*, « Rendic. d. R. Accad. dei Lincei », 2° sem., 1931.

Tanto pel grano, come pel granturco e per l'orzo adoperato, fu fatta meccanicamente la separazione in due distinte porzioni, a semi grossi e a semi piccoli; e in ogni caso fu calcolata, in base ai dati forniti da 4-5 campioni, la media del numero di chicchi contenuti in 10 ccm. (e in 1 ccm.), del numero di chicchi in 1 g., ed infine del peso di n. 100 chicchi.

Riportiamo qui le medie ottenute per le porzioni a chicchi grossi o piccoli di ognuno dei cereali adoperati:

Porzione a chicchi grossi:

	grano	granturco	orzo
n. di chicchi in 10 ccm. =	188	26	132
» » » 1 » =	18.8	2.6	13.2
» » » 1 g. =	25	4	18.5
peso di n. 100 chicchi = g.	3.99	24.57	5.40

Porzione a chicchi piccoli:

n. di chicchi in 10 ccm. =	236	42	162
» » » 1 » =	23.6	4.2	16.2
» » » 1 g. =	31	5.4	24
peso di n. 100 chicchi = g.	3.21	18.70	4.1

Differenze:

In 10 ccm.: chicchi n.	48	16	30
» 1 » » »	4.8	1.6	3
» 1 g. » »	6	1.4	5.5
Nel peso di 100 chicchi: g.	0.78	5.87	1.3

Come animali da esperimento abbiamo adoperato 3 nidiate di ratti albin (avendo cura di scegliere le più numerose), che all'età di 26-30 giorni, cioè una settimana circa dopo lo slattamento, furono messi in adatte gabbie ed alimentati esclusivamente coi detti cereali.

I rattini di ciascuna nidiate erano divisi in due lotti, di cui uno veniva alimentato con la porzione di grano, granturco o orzo a chicchi grossi, e l'altro con quella a chicchi piccoli.

Si lasciava acqua a volontà, e l'alimento era in ogni caso offerto finamente tritato, ed in quantità tale da permettere che gli animali potessero assumerne liberamente.

E volentieri e in quantità rilevante esso venne sempre assunto, per l'intera durata dell'esperimento.

In ogni caso si seguirono le variazioni del peso corporeo degli animali (pesandoli di 5 giorni in 5 giorni), il comportamento dell'apparato genitale, la muta del primo pelo, l'aspetto ed il comportamento generale.

L'esperimento precisamente durò 85 giorni pel grano, 50 pel granturco, e 65 per l'orzo.

Riassumiamo nella seguente tabella i risultati ottenuti:

TABELLA.

Animali alimentati con:		Medie aumento percentuale peso
<i>Grano</i> a chicchi grossi		femmine (n. 2) 98 %
		maschi (n. 3) 96 %
» a chicchi piccoli		femmine (n. 2) 117 %
		maschi (n. 3) 102 %
<i>Granturco</i> a chicchi grossi		femmine (n. 1) 40 %
		maschi (n. 2) 35 %
» a chicchi piccoli		femmine (n. 1) 31 %
		maschi (n. 3) 42 %
<i>Orzo</i> a chicchi grossi		femmine (n. 3) 81 %
		maschi (n. 1) 91 %
» a chicchi piccoli		femmine (n. 2) 98 %
		maschi (n. 2) 133 %

L'esame del complesso dei dati riassunti nella precedente tabella, permette agevolmente di rilevare, che, di regola, gli animali alimentati con grano, granturco o orzo a chicchi di minor volume guadagnarono in peso più di quelli alimentati con gli stessi cereali a chicchi di maggior volume.

L'unica eccezione alla regola è costituita dal caso della femmina alimentata con granturco a chicchi piccoli, che guadagnò meno dell'altra alimentata con granturco a chicchi grossi.

Ma appunto perchè si tratta di animali isolati, mentre per i maschi, in numero maggiore in ambo i lotti, si sono ottenuti risultati concordanti coi rimanenti, non crediamo che quest'unica eccezione possa infirmare il risultato generale.

Comunque, occorre inoltre fare osservare, che in realtà l'aumento in peso dei nostri animali, in tutti i casi, è stato relativamente limitato, rispetto a quello che si sarebbe verificato con l'alimentazione mista ordinaria, a parità di tempo. Ciò si spiega tenendo conto del fatto, che noi abbiamo voluto pel momento sperimentare deliberatamente nelle descritte condizioni di alimentazione esclusiva coi cereali accennati, mentre nessuno di questi può ritenersi da solo alimento qualitativamente affatto completo.

E ci proponiamo appunto di continuare in seguito le esperienze cogli stessi cereali (a chicchi di diversa dimensione), ma integrati da adatti correttivi.

Per ciò che riguarda il comportamento dell'apparato genitale, la muta del primo pelo, l'aspetto ed il comportamento degli animali, mai notammo differenze tra i lotti alimentati con chicchi grossi, e quelli alimentati con chicchi piccoli.

Solo negli animali alimentati con orzo a chicchi piccoli la muta del pelo si iniziò poco prima che nei corrispondenti alimentati con orzo a chicchi grossi; e due rattine (pure alimentate con orzo a chicchi grossi), presentarono la schiusura dell'ostio vaginale, rispettivamente al 60° e al 55° giorno di esperimento.

Mai notammo nei nostri animali fatti morbosì apprezzabili.

Riassumendo possiamo dire, che nelle nostre ricerche nette differenze risultarono nei riguardi del comportamento del peso corporeo, nel senso che guadagnarono di regola in peso di più gli animali alimentati con i chicchi di minor volume, anzichè gli altri, pur non avendo notato sostanziali differenze tra gli animali alimentati con i chicchi di maggior volume, e quelli alimentati con i corrispondenti di minor volume circa il comportamento dell'apparato genitale nei due sessi, la muta del primo pelo, il loro aspetto generale.

In conclusione, ci riteniamo autorizzati ad affermare, che i risultati complessivi delle esperienze da noi finora eseguite col grano, col granturco e coll'orzo (a chicchi di diverso volume), sperimentando su ratti albinì, e tenendo in particolar modo presenti i fenomeni costruttivi (o di accrescimento), depongono chiaramente a favore del concetto, che, come è stato detto in principio, G. Tallarico ha sostenuto, e noi ci siamo proposti di sottoporre ad analisi sperimentale.

Questo dato di fatto abbiamo voluto soprattutto intanto fissare con la presente Nota, ripromettendoci di ritornare sull'argomento appena espletate altre esperienze, già in corso.

Geologia. — *Sull'andamento delle linee di dislocazione che accompagnano i massicci intrusivi di M. Croce, Ivigna, Bressanone nell'Alto Adige.* Nota ⁽¹⁾ di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata dal Socio C. F. PARONA.

Esaurito (con tre campagne consecutive di lavoro sul terreno) il programma prefissomi anni or sono di uno studio sulla struttura geologica dell'Alto Adige orientale ⁽²⁾, nell'estate testè trascorsa, rivolsi la mia attività alla parte centrale della regione altoatesina, che presentava ancora interessanti problemi da risolvere.

Il primo fondamentale risultato di queste mie ricerche, è rappresentato dal rilevamento geologico, alla scala 1:25.000, della bassa Valle d'Ultimo e delle sue confluenti valli di Marano e dei Prati, compreso il massiccio tonalitico di M. Croce. Questi rilevamenti ridotti alla scala di 1:100.000, serviranno per la compilazione del foglio Bolzano della Carta geologica delle Tre Venezie.

Nella sua opera generale sulla struttura delle Alpi, R. Staub ⁽³⁾ fece passare il cosiddetto « limite alpino-dinarico » a est del massiccio di M. Croce, prolungandolo poi attraverso la Val dei Prati sino a raggiungere lo sbocco della Val Marano, sul fianco sinistro della quale il permotrias dinarico s'immerge, come è noto, sotto il cristallino antico dei ricoprimenti austroalpini superiori, lungo una grandiosa linea di dislocazione distinta anche con il nome di « linea delle Giudicarie ».

Il piccolo lembo di dolomie triasiche scoperto da Künzli ⁽⁴⁾ presso S. Pancrazio d'Ultimo, fu riferito dallo Staub ai « sedimenti austroalpini medi » e considerato quale radice della falda mesozoica dell'Ortler, dimodochè il massiccio di M. Croce (vedasi carta strutturale e relativi profili) figura come paleozoico, facente parte delle radici delle Tirolidi, ossia dei ricoprimenti austroalpini superiori. Confesso che una simile costruzione

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1931.

(2) Gb. DAL PIAZ, *Studi geologici nell'Alto Adige Orientale*, « Mem. Ist. Geol. Padova », vol. X, con elenco delle altre pubblicazioni di Gb. DAL PIAZ e A. BIANCHI, sulla geologia e la petrografia dell'Alto Adige Orientale. Si consulti anche la *Carta geologica dell'Alta Valle Aurina* alla scala 1:25.000 di A. BIANCHI e Gb. DAL PIAZ e i fogli *Vetta d'Italia* e *Monguelfo* della *Carta geologica delle Tre Venezie*.

(3) R. STAUB, *Der Bau der Alpen*, « Beitr. z. geol. Karte d. Schweiz », n. F. 52, 1924.

(4) E. KÜNZLI, *Die Contactzone um die Ulten-Iffingermasse bei Meran*, « Tschermak's Miner. u. Petrogr. Mitth. », vol. XVIII, 1899.

mi apparve subito artificiosa e contrastante coi dati di fatto che si osservano localmente. Infatti, la linea di frattura seguente il bordo orientale del massiccio di M. Croce (linea di Foiana, che porta a contatto meccanico la tonalite con i terreni del Permiano e del Trias) non passa per la Valle dei Prati, come ritenne lo Staub, ma continua verso sud nella dislocazione del Passo delle Palade, proseguendo poi verso la bassa Val di Non. Lungo tutta la Val dei Prati invece, non si osservano tracce di disturbi tettonici di una certa importanza e il contatto fra la tonalite e gli scisti è sempre di tipo primario-intrusivo, accompagnato da tutta una coorte di filoni acidi e basici e da una vasta aureola di impregnazione magmatica entro gli scisti, i quali si presentano nettamente arterizzati per uno spessore abbastanza considerevole. Lo studio di questa interessantissima regione mi ha portato a concludere che la linea delle Giudicarie (limite alpino-dinarico auct.), a partire dallo sbocco di Val Marano, continua verso NNE nella bassa Val d'Ultimo con la stessa direzione, conservata più o meno rigorosamente, che aveva in Val Marano, passando cioè in prossimità di S. Pancrazio, senza forti deviazioni verso est. In tal caso la lama triasica di S. Pancrazio (alla quale sembra associarsi anche qualche lembo di verrucano) sarebbe dinarica e non austro-alpina media, interpretazione che appare confermata anche dalla facies dei singoli elementi della sinclinale, i quali sono rappresentati da dolomie grigie venate e da calcari scuri del Muschelkalk (?), che assomigliano alquanto a taluni termini del Trias dinarico della bassa Val Marano.

Lungo tutta la parte inferiore della Val d'Ultimo, il contatto fra la tonalite e gli scisti è sempre di tipo primario-intrusivo, per quanto secondariamente disturbato da azioni meccaniche abbastanza intense.

Dove passa allora la prosecuzione della linea delle Giudicarie? Lungo la strada che da S. Pancrazio conduce a Lana si possono avvertire intensissimi fenomeni di laminazione e di cataclasi negli scisti filladici che stanno al tetto del massiccio tonalitico. Dato l'ordine di grandezza di questi disturbi e il fatto che essi continuano verso SW fino a raggiungere la sinclinale triasica di S. Pancrazio, mi sembra lecito arguire che questa zona, così energicamente tettonicizzata, rappresenti appunto la prosecuzione diretta della linea delle Giudicarie, privata di tutti i termini mesozoici e permiani in conseguenza delle enormi pressioni subite.

Siccome poi il vicino massiccio d'Ivigna costituisce, dal punto di vista strutturale, un duplicato di quello di M. Croce, si presenta come molto probabile l'ipotesi che gli scisti diafctorici scoperti dallo Spitz nelle formazioni scistoso-cristalline del lato di nord-ovest della tonalite d'Ivigna, rappresentino la continuazione della zona clastica della bassa Val d'Ultimo⁽¹⁾.

(1) A. SPITZ, *Die Nonsberger Störungsbündel*, « Jahrb. Geol. Reichsan », LXIX Bd., 1919, p. 206.

In questo caso la linea delle Giudicarie passerebbe rispettivamente ad ovest e a nord-ovest dei Massicci di M. Croce e d'Ivigna, mantenendosi a poca distanza dal contatto fra la tonalite e le rocce incassanti, finchè nei paraggi di Pennes, nell'alta Val Sarentino, si collegherebbe alla grande dislocazione che si estende lungo tutto il bordo settentrionale del granito di Bressanone⁽¹⁾, prolungandosi poi, a est di Brunico, nella linea della Pusteria (Drauzug)⁽²⁾.

La linea di Foiana, che limita verso est il massiccio di M. Croce, continua a sinistra dell'Adige nella linea della Naif, la quale a sua volta contorna dal lato di sud-est il corpo intrusivo d'Ivigna. Questa dislocazione, che già lo Spitz⁽³⁾ teneva separata dalla linea delle Giudicarie e che in ogni caso non ha niente a che fare con il « limite alpino dinarico », è stata seguita fin presso la confluenza del Rio Bianco con la Talfera nell'alta Val Sarentino. Purtroppo a monte di detta località i rapporti fra il granito e gli scisti del fianco sinistro della valle sono mascherati per qualche chilometro da potenti depositi quaternari, finchè a est di Pennes la roccia eruttiva appare improvvisamente in contatto normale con la fillade quarzifera.

Qui sorge spontanea la domanda: come finisce la linea della Naif verso NE? Io ho dedicato a questo interessante problema alcune escursioni nell'alta Val Sarentino, da Rio Bianco a Laste, purtroppo però senza poter arrivare a risultati definitivi causa il grande sviluppo presentato dai terreni quaternari. Malgrado ciò, sono giunto alla convinzione che la linea della Naif si fonda, pressapoco in corrispondenza di Pennes, con quella del bordo settentrionale del massiccio di Bressanone-Ivigna, idea che mi sembra confermata anche dall'andamento complessivo di queste due grandi dislocazioni, le quali vanno sempre più convergendo fra di loro man mano che dalla bassa Val di Non ci si sposta verso nord e verso nord-est.

Concludendo: in conseguenza alle rilevate particolarità tettoniche della regione studiata, il grande arco intrusivo di M. Croce-Ivigna-Bressanone-Pusteria, che recenti ricerche confermano di età terziaria e non paleozoica, risulta compreso nella serie dinarica e non può in alcun modo costituire le radici dei ricoprimenti austro-alpini superiori (Tirolidi).

(1) B. SANDER, *Geologische Beschreibung der Brixener Granits*, « Jahrb. Geol. Reichsan », 1906; *Zur Geologie der Zentralalpen: I, Alpino-dinarische Grenze in Tirol*, « Verh. Geol. Reichsan. », 1916, p. 206; Foglio Bressanone e Merano (quest'ultimo in collaborazione con W. HAMMER) della *Carta Geologica delle Tre Venezie* e loro Note illustrative, Padova 1924-1925.

(2) M. FURLANI, *Der Drauzug in Hochpustertal*. « Mitt. Geol. Gesell », Wien, 5, 1912, p. 252; *Studien über die Triaszonon im Hochpustertal Eisack-und Pensertal in Tirol*, « Denk. Ak. Wiss », Wien, 97, 1919, p. 33; *Considerazioni orogenetiche sul limite alpino-dinarico in Pusteria*, « Atti Acc. Veneto-Trentino-Istria », 1922.

(3) A. SPITZ, *Die Nonsberger Storungsbündel*, « Jahrb. Geol. Reichsan », LXIX Bd., 1919, p. 206.

Biologia. — *Confronto fra l'azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da un semplice circuito oscillante aperto e da uno in sintonia con radio-oscillatore per onde ultracorte.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Abbiamo già riferito dell'azione favorevole esercitata da circuiti metallici aperti formati da una semplice spira di rame o di zinco, di 30 cm. di diametro e di 4 mm. di spessore, sullo sviluppo dei bachi da seta ⁽²⁾ e dell'azione di analoghi cerchi chiusi.

Era interessante studiare se si poteva giungere ad aumentare i risultati favorevoli ottenuti, sostituendo alle semplici spire, un circuito aperto dello stesso diametro e spessore, ma posto in risonanza perfetta col Radio-oscillatore ad onde ultracorte $\lambda = 3$ m. per mezzo di una piccola capacità regolabile; le esperienze condotte in questo senso di cui riferiremo in questa Nota, hanno permesso di dimostrare come si possa in questo caso, giungere ad un aumento notevole dei risultati già raggiunti.

Anche in questo caso abbiamo disposto le esperienze nel modo già descritto precedentemente per le altre prove e che riportiamo per comodità del lettore.

I bachi vennero divisi in tre lotti di 200 bachi ciascuno, di cui uno serviva da confronto, mentre gli altri due suddivisi in gruppi di 25 bachi ciascuno erano posti in scatole di cartone, munite di circuiti oscillanti aperti, formati da una spira di rame di 30 cm. di diametro e 4 mm. di spessore, isolati su ebanite, e da circuiti oscillanti posti in risonanza col Radio-oscillatore.

Il Radio-oscillatore funzionava durante 5 ore giornaliere in media.

Tutte le scatole di cartone erano poste anche in questo caso su banchi di legno ricoperti di lastre di alluminio.

Le esperienze vennero fatte su Bachi Oro 54.

Si notò subito l'azione favorevole dei circuiti oscillanti sintonizzati, sui piccoli bachi sottoposti alla loro azione, effetto favorevole che si manifesta con uno sviluppo più rapido e maggiore, e risalta a vista d'occhio col procedere del tempo. L'azione dei circuiti si presenta spiccata e colpisce subito l'osservatore. Riporteremo i dati che permettono di porre in evidenza con

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

(2) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Confronto fra l'azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da anello aperto e da anello metallico chiuso.* «Giornale di Biologia applicata», anno 1931, n. 3.

matematica precisione questo sviluppo dei bachi rispetto ai confronti, e rispetto a quelli sottoposti all'azione dei semplici circuiti metallici aperti.

Oro 54.

TABELLA I.

Bachi Oro al 12° giorno di vita	Bachi confronto	Bachi nel circuito di rame	Bachi nel circuito sintonizzato
Peso medio . . .	68.2 mgr.	112 mgr.	140 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi nel circuito di rame: 64 %.

Percentuale in più nel peso dei bachi nel circuito sintonizzato: 105.2 %.

TABELLA II.

Bachi Oro al 20° giorno di vita	Bachi confronto	Bachi nel circuito di rame	Bachi nel circuito sintonizzato
Peso medio . . .	756 mgr.	1302 mgr.	1695 mgr.

Percentuale in più nel peso dei bachi nel circuito di rame: 71.7 %.

Percentuale in più nel peso dei bachi nel circuito sintonizzato: 124.2 %.

Imboscatura:

La salita al bosco dei bachi posti entro il circuito oscillante di rame avviene 2 o 3 giorni prima dei bachi confronto, quella dei bachi posti nel circuito sintonizzato 5 giorni prima.

Bozzoli:

I bozzoli ottenuti vennero raccolti e pesati poi in tutte le prove dopo un ugual tempo dall'inizio, affinchè si trovassero nelle identiche condizioni di età:

Peso di 100 bozzoli provenienti da bachi confronto	gr. 154
» » » » » del circuito di rame »	170.5
» » » » » del circuito sintonizzato »	187.88.

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi posti nel circuito di rame :

10.5 %;

Percentuale in più nel peso dei bozzoli dei bachi posti nel circuito sintonizzato :

22 %.

CONCLUSIONI E RIASSUNTO.

Fu confrontata l'azione che un circuito oscillante sintonizzato con l'apparecchio Radio-oscillatore, ad onde ultracorte di $\lambda = 3$ m. esercita sullo sviluppo di bachi da seta, con quella ottenuta da semplici circuiti metallici aperti.

Coi circuiti in risonanza col Radio-oscillatore, i bachi si sviluppano molto più rapidamente, essi si presentano più grandi e robusti, resistenti alle malattie, anticipano l'imboscatura, danno un maggior rendimento in peso dei bozzoli.

Si osserva così:

1° I bachi sviluppati sotto l'azione del circuito sintonizzato presentano un aumento in peso del 105.2 %-124.2 % in più rispetto ai bachi confronto, mentre nel caso dei circuiti metallici aperti semplici, l'aumento è del 64 %-71.7 %;

2° l'imboscatura ha luogo per i bachi posti nei circuiti sintonizzati con un anticipo di 5 giorni, mentre nel caso di circuiti semplici l'anticipo è di 2-3 giorni;

3° il raccolto in peso dei bozzoli provenienti da bachi posti sotto l'azione del circuito sintonizzato supera del 22 % il raccolto in peso dei bozzoli confronto; mentre nel caso dei bozzoli provenienti dai bachi cresciuti sotto l'azione di circuiti metallici aperti semplici, l'aumento percentuale in peso è del 10.5 %.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° novembre 1931 (Anno X)

Presidenza del sen. prof. A. GARBASSO

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sopra uno speciale operatore lineare.* Nota III⁽¹⁾
del Socio S. PINCHERLE.

Anche in questa Nota, come nelle precedenti⁽²⁾, ci occupiamo di operatori in relazione con quello indicato con Q , e definito nello spazio lineare (S) avente per base il sistema di vettori indipendenti linearmente $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_n, \dots$, dalle posizioni

$$Q(\varepsilon_0) = 0, \quad Q(\varepsilon_n) = k_n \varepsilon_{n-1}.$$

1. Un operatore P (permutabile con Q), è naturalmente permutabile con Q^2 , ma non ogni operatore permutabile con Q^2 è un operatore P . Un esempio è dato dall'operatore elementare I definito dalle condizioni

$$(1) \quad I(\varepsilon_n) = (-1)^n \varepsilon_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

infatti, mentre è

$$(2) \quad QI(\varepsilon_n) = (-1)^n k_n \varepsilon_{n-1},$$

è invece

$$(2') \quad IQ(\varepsilon_n) = k_n (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1},$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 settembre 1931.

(2) Nota I, presentata nella seduta del 26 aprile 1931; Nota II, questo volume, p. 237.

onde I non è permutabile con Q ; mentre

$$Q^2 I = I Q^2 = (-1)^n k_n k_{n-1} \epsilon_{n-2}.$$

Questo operatore dà $I^2 = 1$.

2. Un operatore R si dirà *semipermutabile* rispetto a Q se è

$$(3) \quad QR + RQ = 0.$$

L'operatore I definito nel numero precedente è semipermutabile, come mostra la somma delle (2) e (2').

Il simbolo R indicherà genericamente un operatore semipermutabile rispetto a Q .

3. Per gli operatori semipermutabili si possono dare le proprietà seguenti:

a) Ogni operatore PR è semipermutabile. Infatti,

$$QPR = PQR = -PRQ.$$

b) Lo stesso è di ogni operatore RP ; infatti

$$QRP = -RQP = -RPQ.$$

c) Ogni operatore R è permutabile con Q^2 . Infatti, dalla (3) si deduce, moltiplicando a sinistra per Q :

$$Q^2 R + QRQ = 0,$$

e tenendo nuovamente conto della (3)

$$Q^2 R - RQ^2 = 0.$$

d) La reciproca non è vera, perchè $R + P$, permutabile con Q^2 , non è semipermutabile con Q .

e) Se R, R_1 sono semipermutabili, il loro prodotto è permutabile. Infatti, moltiplicando la (3) a sinistra per R_1 , viene

$$R_1 QR + R_1 RQ = 0,$$

ma $R_1 Q = -QR_1$, onde

$$QR_1 R = R_1 RQ.$$

4. Dall'ultima proposizione, poichè il prodotto di due P o di due R è un P, e il prodotto di un P per un R è un R, consegue che l'insieme delle P e delle R costituisce un gruppo (misto), di cui l'insieme delle P forma un sottogruppo.

5. Condizione necessaria e sufficiente perchè un operatore H, non permutabile con Q, sia permutabile con Q^2 , è che il suo scarto dalla permutabilità con Q, $H' = QH - HQ$, sia semipermutabile rispetto a Q.

Sia infatti $Q^2H - HQ^2 = 0$; aggiungendo e togliendo QHQ viene

$$Q(QH - HQ) + (QH - HQ)Q = 0,$$

ossia $QH' + H'Q = 0$; la condizione è dunque necessaria.

Sia invece $QH' + H'Q = 0$; sviluppando dopo sostituito per H' la sua espressione, si trova $Q^2H = HQ^2$; la condizione è dunque sufficiente.

Come collorario, lo scarto di un operatore R è un R, e quindi sono tali tutti gli scarti successivi; esso non può quindi essere permutabile neppure *in senso lato* ⁽¹⁾ coll'operatore fondamentale.

6. Dal n. 3^e, segue che RI è permutabile con Q: si scriva $RI = P$. Moltiplicando a destra per I, e ricordando (n. 1) che è $I^2 = 1$, viene $R = PI$.

Ma si ha pure $IR = P_1$; qui, moltiplicando a sinistra per I, viene $R = IP_1$. Ogni operatore R si ottiene dunque come prodotto (a destra o a sinistra) di un operatore P per l'operatore elementare I.

7. Possiamo ora dimostrare la proposizione fondamentale seguente:

« Ogni operatore H permutabile con Q^2 è della forma

$$(4) \quad P_1 I + \bar{P} \quad , \quad (IP_2 + \bar{P}),$$

essendo P_1, P_2, \bar{P} permutabili con Q ».

Sia infatti H permutabile con Q^2 . Se esso è anche permutabile con Q, esso è della forma indicata (4) con $P_1 \equiv 0$ ($P_2 \equiv 0$); se è semipermutabile, è pure (n. 6) della forma indicata con $\bar{P} \equiv 0$. In ogni altro caso, $QH + HQ$, che non è identicamente nullo, è un operatore P, poichè

$$Q(QH + HQ) = Q^2H + QHQ \quad , \quad (QH + HQ)Q = QHQ + HQ^2,$$

ma $Q^2H = HQ^2$ per l'ipotesi, onde

$$Q(QH + HQ) = (QH + HQ)Q,$$

(1) V. la Nota: *Sullo scarto dalla permutabilità negli operatori lineari*, n. 5, « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna », seduta dell'8 febbraio 1931.

cioè $QH + HQ = P$. Ora, vi è certamente un \bar{P} tale che $H - \bar{P}$ sia un R ; formando infatti

$$Q(H - \bar{P}) + (H - \bar{P})Q,$$

questo si riduce a $QH + HQ - 2\bar{P}Q$, ma $QH + HQ = P$, come si è visto: basta dunque determinare \bar{P} in modo che sia

$$P = 2\bar{P}Q \quad , \quad \bar{P} = \frac{1}{2} Q^{-1} P;$$

talchè $H = R + \bar{P}$; ma R si può porre sotto la forma $P_1 I (IP_2)$, onde è

$$H = P_1 I + \bar{P} \quad , \quad (H = IP_2 + \bar{P}),$$

c. d. d.

8. Proponiamoci ora di trovare elementi invarianti per gli operatori semipermutabili. Essendo R uno di questi, si ha (n. 6)

$$(5) \quad R = IP;$$

ricordando allora che φ_h è invariante di P , con (II, 4)

$$(6) \quad P(\varphi_h) = a(h)\varphi_h,$$

separiamo in φ_h ed in $a(h)$ la somma dei termini contenenti h a potenza pari da quella dei termini contenenti h a potenza dispari; scriviamo cioè

$$\varphi_h = \mu_h + \nu_h \quad , \quad a(h) = m(h) + n(h),$$

essendo μ_h ed $m(h)$ funzioni pari e $\nu_h, n(h)$ funzioni dispari di h . Si ha allora, da (6),

$$P(\mu_h + \nu_h) = (m(h) + n(h))(\mu_h + \nu_h),$$

e cambiando h in $-h$:

$$P(\mu_h - \nu_h) = (m(h) - n(h))(\mu_h - \nu_h),$$

da cui, sommando e sottraendo:

$$P(\mu_h) = 2(m(h)\mu_h + n(h)\nu_h),$$

$$P(\nu_h) = 2(n(h)\mu_h + m(h)\nu_h).$$

Applichiamo ora a queste l'operatore $\frac{1}{2} I$; viene, per la (5):

$$(7) \quad \begin{cases} R(\mu_h) = m(h) \mu_h - n(h) \nu_h \\ R(\nu_h) = n(h) \mu_h - m(h) \nu_h \end{cases}$$

Si cerchi ora se una combinazione lineare delle μ_h e ν_h può essere invariante per R ; tralasciando, per comodità di scrittura, di porre la h che si intende fissata, si vuole che sia

$$R(a\mu + b\nu) = k(a\mu + b\nu);$$

ne viene, dalle (7),

$$R(a\mu + b\nu) = a(m\mu - n\nu) + b(n\mu - m\nu)$$

da cui

$$am + bn = ak, \quad an + bm = -bk;$$

deve essere quindi

$$\begin{vmatrix} m - k & n \\ n & m + k \end{vmatrix} = 0$$

onde

$$k = \pm \sqrt{m^2 - n^2}, \quad a : b = -n : (m \mp \sqrt{m^2 - n^2}).$$

Si hanno così i due elementi invarianti relativi ad uno stesso valore di h ,

$$(8) \quad n\mu - (m + \sqrt{m^2 - n^2})\nu, \quad n\mu - (m - \sqrt{m^2 - n^2})\nu,$$

rispettivamente cogli autovalori $+\sqrt{m^2 - n^2}$, $-\sqrt{m^2 - n^2}$.

9. Presentano interesse il caso in cui $a(h)$ è funzione pari e quello in cui essa è funzione dispari di h .

Nel primo caso, $n(h) = 0$, e le (7) danno

$$R(\mu_h) = m(h) \mu_h, \quad R(\nu_h) = -m(h) \nu_h;$$

μ_h e ν_h (formati da φ_h come il coseno e seno iperbolico lo sono dall'esponenziale) sono elementi invarianti, ed $m(h)$, $-m(h)$ sono i rispettivi autovalori. Nel secondo caso, $m(h) = 0$, e si ha

$$R(\mu_h) = -n(h) \nu_h, \quad R(\nu_h) = n(h) \mu_h.$$

Qui (supposti reali h ed i numeri k_n ed a_n), si ha, cambiando h in ih e ponendo

$$\mu_{hi} = \gamma_h, \quad \nu_{hi} = i\sigma_h, \quad m(ih) = c(h), \quad n(ih) = is(h),$$

dove γ , σ , c ed s sono reali,

$$R(\gamma_h) = s(h)\sigma_h, \quad R(\sigma_h) = s(h)\mu_h,$$

da cui risulta subito che $\gamma + \sigma$ e $\gamma - \sigma$ sono elementi invarianti.

È appena necessario di far notare l'analogia delle γ e σ col coseno e seno circolari, ai quali esse si riducono nel caso che abbiamo detto elementare.

Accennato così alla teoria degli operatori permutabili con Q^2 , si potrà senza difficoltà, cercarne l'estensione alla teoria degli operatori permutabili con Q^m .

MEMORE E NOTE PRESENTATE DAI SOCI

Matematica. — *Sulle corde massime e minime normali ad un'ipersuperficie.* Nota ⁽¹⁾ di LUISA PELOSI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un vecchio lavoro di Ossian Bonnet ⁽²⁾ è determinata quella normale ad una data ellisse (o parabola) per la quale la corda compresa entro la curva è minima; e risulta che tale corda è tangente all'evoluta dell'ellisse nel punto ove essa incontra l'ellisse (ammesso, si capisce, che tale incontro abbia luogo effettivamente).

I calcoli fatti dal Bonnet sono piuttosto complicati; basti accennare al fatto che vi si adopera il noto teorema di Sturm sulle equazioni algebriche.

Il risultato del Bonnet è suscettibile di ampia generalizzazione, almeno per quanto riguarda le condizioni necessarie per il massimo o minimo; una di esse si trae come caso particolarissimo dal teorema I della mia Nota: *Sopra alcuni massimi e minimi geometrici* ⁽³⁾, come risulta dal n. 1 del presente scritto; e un'altra estensione alle ipersuperficie di uno spazio euclideo qualunque è stabilita nel n. 2, dal quale segue che, se una corda normale

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1931.

(2) O. BONNET, *Questions sur les maxima et les minima*, « Nouvelles Annales de Mathématique », t. II, a. 1843, p. 417).

(3) Questi « Rendiconti », vol. III, serie 6ª, 1º sem., 1926.

ad un'ipersuperficie è tale che il segmento di essa contenuto nell'ipersuperficie è massimo o minimo (senza essere binormale alla superficie), allora tale segmento è eguale ad uno dei raggi principali di curvatura dell'ipersuperficie.

*
* * *

1. Siano, in un piano fisso, φ , ψ e λ tre curve date; allora, dal teorema I della mia Nota citata, risulta che fra le tangenti della curva λ , quella che taglia le curve φ , ψ in punti P , Q tali che la distanza PQ sia massima o minima, è tale che le normali in P e Q alle curve φ e ψ e la normale a λ nel suo punto di contatto con PQ , devono concorrere in uno stesso punto O .

Orbene, se la curva λ è l'evoluta della curva φ , la retta PQ risulta sempre normale alla curva φ , quindi il punto O cade nel punto di contatto M di PQ con λ , e affinchè la normale in Q alla curva ψ passi per O , cioè per M , deve necessariamente verificarsi uno dei due casi seguenti:

1) la retta PQ è normale alla curva ψ in Q ; in tale caso la PQ è normale tanto alla φ che alla ψ ;

2) il punto M cade in Q ; e allora la corda PQ è tangente all'evoluta di φ nel punto in cui essa incontra la ψ (e la normale alla curva ψ in Q può avere direzione arbitraria).

Abbiamo così una generalizzazione del teorema di Bonnet.

Le proprietà ora enunciate si possono pure stabilire direttamente, in modo semplicissimo, colle considerazioni seguenti:

Affinchè la corda PQ , e quindi l'espressione $(P - Q)^2$, sia minima è necessario che $d(P - Q)^2 = 0$, cioè

$$(P - Q) \times dP - (P - Q) \times dQ = 0;$$

ma $(P - Q) \times dP = 0$, perchè la corda PQ si suppone tangente alla evoluta λ della curva φ , perciò è normale a φ ; resta dunque:

$$(P - Q) \times dQ = 0$$

perciò deve verificarsi uno di questi casi:

1) il vettore dQ non è nullo, e allora deve essere normale alla retta PQ ; cioè questa retta è normale alla curva ψ , oltre che alla φ ;

2) il vettore dQ è nullo; osservando allora che $(P - Q) \wedge \wedge (M - Q) = 0$, e differenziando, tenendo conto che $dQ = 0$, si ha:

$$dP \wedge (M - Q) + (P - Q) \wedge dM = 0,$$

ma il vettore dM , che è tangente alla curva λ , è parallelo al vettore $P - Q$,

perciò resta: $dP \wedge (M - Q) = 0$, ed essendo il vettore dP non nullo e normale ad $M - Q$, si deduce $M = Q$, cioè il punto M cade in Q ;
c. d. d.

2. Consideriamo ora una ipersuperficie Φ immersa in uno spazio euclideo S ad $n + 1$ dimensioni; potremo immaginare la Φ come descritta da un punto P funzione di n variabili numeriche indipendenti p_1, p_2, \dots, p_n .

È ben noto che in ogni punto P di Φ esiste un'unica normale all'ipersuperficie; orbene fra queste normali vogliamo trovare quelle per le quali il segmento PQ compreso fra l'ipersuperficie Φ e un'altra ipersuperficie Ψ dello spazio S è massimo o minimo.

Dovrà allora essere nullo il differenziale di $(P - Q)^2$, cioè

$$(P - Q) \times dP - (P - Q) \times dQ = 0.$$

ove dP e dQ sono spostamenti infinitesimi di P e Q sull'ipersuperficie Φ ; ma poichè il vettore $P - Q$ è normale a Φ in P , rimane soltanto

$$(P - Q) \times dQ = 0$$

od ancora:

$$(1) \quad (P - Q) \times Q'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

ove Q'_i è la derivata parziale di Q rispetto a p_i .

Ciò premesso, la (1) è verificata se il vettore $P - Q$ risulta normale a tutti i vettori Q'_i ; cioè normale all'ipersuperficie Ψ in Q ; e allora la corda PQ è una normale comune alle due ipersuperficie Φ e Ψ .

Alla stessa conclusione si arriva osservando che dalle (1) si deduce:

$$(2) \quad h(P - Q) = E(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n),$$

ove h è un numero reale ed $E(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n)$, è il *prodotto* esterno dei vettori Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n , e rappresenta un vettore normale a tutti i vettori stessi ⁽¹⁾. Ora, se $h \neq 0$, la (2) esprime che la corda PQ deve essere normale ai vettori Q'_i e quindi all'ipersuperficie Ψ in Q .

Se poi $h = 0$ la (2) somministra:

$$(3) \quad E(Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_n) = 0;$$

e se ora si indica con r la distanza PQ e con N un vettore unitario, normale all'ipersuperficie Φ in P e diretto da P verso Q , si può scrivere

(1) BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria Differenziale*, p. 158 (Zanichelli, Bologna, 1930).

$Q = P + r\mathbf{N}$ e derivando rispetto a p_i (badando che $\frac{\partial r}{\partial p_i} = 0$, per la condizione di massimo o di minimo), si trae:

$$(4) \quad Q'_i = P'_i + r\mathbf{N}'_i.$$

Ora supponiamo che le linee coordinate p_i siano le linee di curvatura dell'ipersuperficie Φ ; in tal caso è noto che si può scrivere ⁽¹⁾:

$$\mathbf{N}'_i = -m_i \mathbf{P}'_i,$$

ove m_i è la curvatura principale della linea di curvatura p_i .

Sostituendo nella (4) si ha:

$$Q'_i = (1 - r m_i) \mathbf{P}'_i,$$

e sostituendo poi nella (3):

$$(1 - r m_1) (1 - r m_2) \cdots (1 - r m_n) E(\mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_n) = 0,$$

e siccome il vettore $E(\mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_n)$ non è nullo, si deduce che deve essere verificata una almeno delle relazioni

$$r m_1 = 1, \quad r m_2 = 1, \quad \dots, \quad r m_n = 1,$$

le quali esprimono che r deve essere uno dei raggi principali di curvatura dell'ipersuperficie Φ in P .

Concludiamo perciò che se la corda PQ , compresa fra le ipersuperficie Φ, Ψ è massima o minima, ed è normale all'ipersuperficie Φ , ma non alla Ψ , allora il punto Q deve appartenere all'intersezione della Ψ colla ipersuperficie evoluta della Φ .

Questa è la generalizzazione del teorema di O. Bonnet, che volevamo stabilire.

Matematica. — *Sur les fonctions n -métaharmoniques.* Nota di M. GHERMANESCO, pres. dal Socio V. VOLTERRA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Cfr. la citata *Geometria Differenziale*, p. 230.

Matematica. — *Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires.* Nota II di B. HOSTINSKY, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

1. J'ai montré dans une Note précédente ⁽²⁾ comment la notion d'intégrale d'une substitution linéaire s'étend à celle d'intégrale d'une transformation fonctionnelle linéaire et comment on obtient, par cette intégration, la solution d'une équation fonctionnelle. Je me propose maintenant d'étudier une transformation fonctionnelle qui est voisine de ce que M. Volterra appelle composition de seconde espèce (n. 2); la formule qui donne la solution de l'équation fonctionnelle (6) se présente sous la forme d'une série de puissances symboliques de composition (n. 3). Les résultats obtenus aux numéros 4 et 5 permettent de répondre, au moins en partie, aux questions dont s'est occupé M. Kolmogoroff ⁽³⁾. En ce qui concerne la manière de poser le problème: trouver une solution de (6) qui satisfait aux certaines conditions, j'ai profité des résultats obtenus par M. F. Perrin dans sa remarquable *Thèse sur la Théorie du mouvement Brownien de rotation* ⁽⁴⁾.

2. Soit $f(u)$ une fonction positive de la variable u , s et t deux constantes ($0 < s \leq u \leq t$) et posons, en écrivant $e(x)$ au lieu de la fonction exponentielle e^x ,

$$j(x, y, s, t) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi \int_s^t f(u) du}} e \left(- \frac{(x - y)^2}{4 \int_s^t f(u) du} \right).$$

Une fonction $A(x, y, u)$ dont la valeur absolue est intégrable par rapport à y de $-\infty$ à $+\infty$ étant donnée, sa première puissance symbolique $(A)_j^1$ sera définie par

$$(1) \quad \int_s^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} j(x, \zeta_1, s, u) A(\zeta_1, \zeta_2, u) j(\zeta_2, y, u, t) d\zeta_1 d\zeta_2 \right] du.$$

(1) Nella seduta del 10 novembre 1931.

(2) Questi « Rendiconti », XIII, 1931, p. 921.

(3) « Mathem. Annalen », Bd. 104.

(4) « Annales scientif. de l'École Normale Sup. », Paris, 1928.

Deux fonctions $A(x, y, u)$ et $B(x, y, u)$ étant données, le produit symbolique $(A)_j^i (B)_j^i$ de leurs puissances premières s'obtient en intégrant l'expression

$$(I \text{ bis}) \quad j(x, \tilde{x}_1, s, u_1) A(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u_1) j(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, u_1, u_2) B(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4, u_2) j(\tilde{x}_4, y, u_2, t)$$

d'abord par rapport à $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4$ de $-\infty$ à $+\infty$ et ensuite par rapport à u_1, u_2 dans le domaine d'intégration $s < u_1 < u_2 < t$. On définit d'une manière analogue les produits symboliques des premières puissances d'un nombre quelconque de fonctions et, si ces fonctions sont égales entre elles, les puissances entières positives $(A)_j^n$ d'une fonction donnée A ; les règles de calcul avec ces puissances symboliques sont identiques à celles de composition de première ou de seconde espèce⁽¹⁾.

Le symbole $(A)_j^0$ doit être considéré comme égal à la fonction $j(x, y, s, t)$. Remarquons que, si la fonction $f(u)$ est donnée, toutes les puissances et les produits symboliques dépendent de quatre variables x, y, s et t .

Pour démontrer que la multiplication ainsi définie est distributive et que la multiplication des puissances d'une même fonction est commutative on emploie la formule

$$j(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(x, \tilde{x}, s, u) j(\tilde{x}, y, u, t) d\tilde{x}$$

valable pour $s < u < t$.

3. Soit maintenant

$$(2) \quad K(x, y, u) = j(x, y, u, u+h) + hA(x, y, u)$$

le noyau d'une transformation fonctionnelle linéaire infinitésimale; h est une constante infiniment petite. La formule est plus générale que celle de la Note précédente où nous avons supposé $f(u) = c$.

Divisons l'intervalle (s, t) de la variable u en n parties égales de longueur $h = (t - s) : n$ et soit R_v la transformation dont le noyau est $K(x, y, s + vb)$. Le noyau de la transformation composée R_1, R_2, \dots, R_n est donné par

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, \tilde{x}_1, s + h) K(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, s + 2h) \dots K(\tilde{x}_{n-1}, y, t) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \dots d\tilde{x}_{n-1}$$

et pour obtenir le noyau de « l'intégrale de la transformation définie par A » il faut chercher la limite de (3) pour n infini.

(1) VOLTERRA-PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutable*, Paris, 1924.

Pour trouver cette valeur limite $\Phi(x, y, s, t)$ substituons d'abord, à la place de chaque facteur K dans (3), la valeur correspondante du second membre de (2) et effectuons les multiplications. Le terme indépendant de A est égal à l'expression (avec $\zeta_0 = x$, $\zeta_n = y$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{v=1}^n \frac{e\left(-\frac{(\zeta_{v-1} - \zeta_v)^2}{4f(s+vb)h}\right)}{2\sqrt{\pi}f(s+vb) \cdot h} \right] d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_{n-1} = \\ & = \frac{e\left(-\frac{(x-y)^2}{h[f(s+h) + f(s+2h) + \dots + f(t)]}\right)}{2\sqrt{\pi}h[f(s+h) + f(s+2h) + \dots + f(t)]} \end{aligned}$$

donc il se réduit, pour n infini, à $j(x, y, s, t)$.

L'ensemble de termes qui contiennent A en premier degré se réduit, pour n infini, à $(A)_j^1$ et ainsi de suite. On arrive à la formule cherchée:

$$(5) \quad \Phi(x, y, s, t) = j(x, y, s, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (A)_j^m.$$

4. Supposons que, s ayant une valeur fixe, t tende vers s . D'après une propriété connue de la fonction j , l'expression entre les crochets dans (1) tend vers $A(x, y, s)$; par conséquent, l'intégrale (1) sera infiniment petite comme $(t-s)A(x, y, s)$; de même, l'intégrale de l'expression (1 bis), pour $B = A$, sera infiniment petite comme

$$\frac{(t-s)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, \zeta, s) A(\zeta, y, s) d\zeta.$$

En général, le $m^{\text{ième}}$ terme de la série (5) sera, pour $\lim t = s$, infiniment petit d'ordre m par rapport à $(t-s)$. Il en résultent les formules

$$(I) \quad \lim_{t=s} \Phi(x, y, s, t) = 0, \quad \lim_{t=s} \left[\frac{\partial \Phi(x, y, s, t)}{\partial t} \right] = A(x, y, s)$$

$$(II) \quad \lim_{t=s} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, s, t) (y-x)^2 dy}{2(t-s)} = f(s) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x)^2 A(x, y, s) dy.$$

La manière dont nous avons défini la fonction Φ montre (voir la Note précédente) qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle (pour $s < u < t$)

$$(6) \quad \Phi(x, y, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, \zeta, s, u) \Phi(\zeta, y, u, t) d\zeta$$

ce qui peut être vérifié par la substitution de la série (5). Donc $A(x, y, u)$ étant une fonction donnée, la série (5) donne une solution de l'équation (6) qui satisfait aux conditions (I) et (II).

L'étude de quelques questions qui se présentent dans le calcul des probabilités conduit aux fonctions Φ qui satisfont non seulement aux conditions (I), (II) et (6) mais aussi aux suivantes

$$(III) \quad \Phi(x, y, s, t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, s, t) dy = 1.$$

Les conditions (I) et (III) entraînent les relations

$$A(x, y, u) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y, u) dy = 0.$$

Pour satisfaire à toutes ces conditions, introduisons, au lieu de (2), la formule plus générale

$$(2 \text{ bis}) \quad K(x, y, u) = j(x, y, u, u + b) + bA(x, y, u, b)$$

et supposons que

$$\lim_{b=0} A(x, y, u, b) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y, u, b) dy = 0.$$

La formule (5) où il faut remplacer $A(x, y, u)$ par $A(x, y, u, b)$ et où il faut prendre la valeur limite de chaque terme pour $b = 0$ donne une fonction Φ qui satisfait aux conditions (6), (I), (II) et (III).

5. Sous l'hypothèse que K ait la forme (2 bis) et que $(t - s)$ soit infiniment petit, nous avons

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 \Phi(x, y, s, t) dy = \\ &= \left[2f(s) + \lim_{b=0} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 A(x, y, s, b) dy \right] (t - s) + \dots \end{aligned}$$

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 \Phi(x, y, s, t) dy = \\ = \frac{8}{\pi} [f(s)(t-s)]^{\frac{3}{2}} + \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 A(x, y, s, h) dy (t-s) + \dots$$

Distinguons deux cas: 1° si l'expression

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |y-x|^3 A(x, y, s, h) dy$$

est différente de zéro, la limite pour $t = s$ du rapport $\frac{m_3}{m_2}$ est elle même différente de zéro; 2° si cette expression est égale à zéro, le rapport $\frac{m_3}{m_2}$ tend vers zéro pour $t = s$. M. Kolmogoroff montre que, si ce rapport tend vers zéro, Φ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} [A_1(y, t) \cdot \Phi] + \frac{\partial}{\partial y^2} [A_2(y, t) \cdot \Phi]$$

où

$$A_1(x, \varphi) = \lim_{t=s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-x}{t-s} \Phi(x, y, s, t) dy, \\ A_2(x, s) = \lim_{t=s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-x)^2}{2(t-s)} \Phi(x, y, s, t) dy.$$

D'après notre formule (5), la fonction A_1 est égale à

$$A_1(x, s) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (y-x) A(x, y, s, h) dy$$

et A_2 est donné par le second membre de (II) où il faut introduire $A(x, y, s, h)$ à la place de $A(x, y, s)$ et prendre la valeur limite pour $h = 0$. Dans ce cas particulier 2°, la fonction Φ est la solution élémentaire⁽¹⁾ de l'équation (7).

6. Les formules précédentes peuvent être employées à la résolution de l'équation fonctionnelle suivante

(1) I. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's Problem*, London, 1923, p. 102.

$$(8) \quad \Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u) \Phi(z, y, u, t) dz$$

pourvu qu'on remplace partout les limites d'intégration $-\infty$ et $+\infty$ par a et b et qu'on substitue à la place de $j(x, y, s, t)$ la fonction suivante (avec $x_0 = x$, $x_n = y$, $t - s = n \cdot h$)

$$j(x, y, s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \left[\prod_{v=1}^n e \left(-\frac{(x_{v-1} - x_v)^2}{4f(s + vb) \cdot h} \right) \right] \frac{1}{2\sqrt{\pi f(s + vb) \cdot h}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1},$$

$f(u)$ étant une fonction positive. La formule (5) donne ainsi une fonction Φ qui satisfait aux conditions (8), (I), (II) et (III) modifiées. Dans le cas particulier où Φ satisfait à l'équation de la forme (7), elle n'est autre chose que la fonction de Green (source instantanée ponctuelle de la chaleur). Le problème de construire la fonction de Green consiste à déterminer la fonction $A(x, y, s)$ d'une telle manière⁽¹⁾: 1° que la limite pour $t = s$ de $m_1 : (t - s)$ donne A_1 et celle de $m_2 : 2(t - s)$ donne A_2 , et 2° que Φ satisfasse aux extrémités de l'intervalle $a < y < b$ aux conditions de la forme

$$(9) \quad c_1 \Phi(x, y, s, t) + c_2 \frac{\partial \Phi(x, y, s, t)}{\partial y} = 0.$$

Remarquons que, si la fonction K donnée par (2) satisfait pour $y = a$ et $y = b$, aux conditions de la forme (9), Φ satisfait aux mêmes conditions.

La méthode précédente s'étend aussi à la recherche des fonctions de Green pour les équations du type parabolique à un nombre quelconque de variables indépendantes.

(1) Je désigne par m_1 l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) A(x, y, s) dy$.

Meccanica. — *Sulla teoria della « scia » nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo.* Nota di A. QUARLERI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il problema di Idrodinamica piana, che viene qui risoluto, è quello della scia nel caso di un ostacolo cilindrico rotondo⁽²⁾.

È notissimo come il problema relativo alla determinazione rigorosa delle caratteristiche del moto del fluido presenti difficoltà analitiche, ritenute fino ad ora insormontabili nel caso generale di ostacoli curvi⁽³⁾, in quanto il problema veniva ricondotto al sistema di equazioni:

$$(1) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = -2a^2 \left(\frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}} |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \sin \sigma e^{T(\sigma)} \frac{1}{r(\sigma)},$$

$$(2) \quad T(\sigma) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{d\sigma_1} \log \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} d\sigma_1 \quad (4),$$

in cui Θ e T sono rispettivamente la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria della funzione Ω del Levi-Civita; $r(\sigma)$ è il raggio di curvatura dell'ostacolo espresso in funzione dell'angolo σ nel piano ζ per $0 \leq \sigma \leq \pi$.

Dalle equazioni (1) e (2) si deduce la equazione integro-differenziale seguente:

$$(3) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = -\frac{2a^2}{r(\sigma)} \left(\frac{\sin \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin \frac{\sigma + \sigma_0}{2}} \right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}} |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \sin \sigma e^{-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{d\sigma} \log \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} d\sigma_1},$$

(1) Nella seduta del 1° novembre 1931.

(2) Riteniamo il lettore a conoscenza della teoria generale della *Scia* come fu trattata dal LEVI-CIVITA nella Memoria fondamentale: *Scie e leggi di resistenza* (« Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. XXIII, 1907).

(3) Cfr. ad es. EISNER, *Verhandlungen des 3. Int. Kongresses für Technische, Mech.*, vol. I (1930), p. 28.

(4) Riguardo alla (2) vedasi: LEVI-CIVITA, *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini* (« R. Acc. Lincei », vol. 20, 1911).

la quale « sintetizza la difficoltà analitica del problema idrodinamico corrispondente a un profilo assegnato » ⁽¹⁾.

Nel nostro caso (fino ad ora non risoluto rigorosamente) le difficoltà presentate dalla (3) possono superarsi poichè la (1) acquista la forma:

$$(1') \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = 2 a^2 e^{T(\sigma)} \sin \sigma (1 + \sin \sigma)^{(2)},$$

In questo caso particolare, invece di applicare la (3) si consideri la seguente equazione integrale:

$$(3') \quad T(\sigma) = \frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{T(\sigma_1)} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \log \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} d\sigma_1,$$

da noi dedotta dalla (2) e dalla (1').

La (3') è suscettibile di una ulteriore trasformazione.

Invero poichè, come è noto, la funzione $T(\sigma)$ deve annullarsi su tutto il diametro reale della circonferenza $\zeta = e^{i\sigma}$, la funzione $\Theta(\sigma)$ viene a godere della proprietà della riflessione analitica (principio di Schwarz). Perciò sarà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(\sigma) = \Theta(2\pi - \sigma) \\ T(\sigma) = -T(2\pi - \sigma) \\ \frac{d\Theta(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{d\Theta(2\pi - \sigma)}{d(2\pi - \sigma)} \end{array} \right. \quad 0 \leq \sigma \leq \pi.$$

La (3') pertanto può scriversi sotto la forma seguente:

$$(3'') \quad T(\sigma) = -\frac{a^2}{\pi} \int_0^\pi e^{T(\sigma_1)} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \log \left(\frac{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \right)^2 d\sigma_1.$$

Dalla risoluzione della (3'') dipende quella della (1'') e la conseguente determinazione della funzione $\Omega(\sigma)$ del Levi-Civita.

La (3'') è della forma tipica delle equazioni integrali non lineari trattate da A. Hammerstein ⁽³⁾

$$\psi(x) = - \int_0^1 f[y, \psi(y)] N(x, y) dy.$$

(1) U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*, vol. 2, par. 113, p. 299.

(2) Basta evidentemente considerare che i due rami del profilo $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ sono identici; nel punto o di prora non esistono cuspidi ed r è uguale a -1 .

(3) A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst anwendungen* (« Acta

Invero nel caso nostro si ha:

$$\psi(\sigma) = T(\sigma),$$

$$F[\sigma_1, \psi(\sigma_1)] = 2a^2 e^{T(\sigma_1)} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1)$$

$$N(\sigma, \sigma_1) = \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \right]^2.$$

Non possiamo qui per ragioni di spazio mostrare rigorosamente come la (3'') soddisfaccia alle condizioni di Hammerstein per *la esistenza e la unicità della soluzione*.

Ci riserviamo peraltro di farlo in seguito in una trattazione per *esteso* del problema.

Per il momento osserveremo soltanto che il nucleo è utilizzabile (brauchbar)⁽¹⁾, perchè, pure diventando infinito per $\sigma_1 = \sigma$, si tratta di un infinito logaritmico, inoltre esso nucleo è simmetrico ed è definito positivo entro il campo di integrazione $0 \rightarrow \pi$.

Dato che la (3'') non ammette che una soluzione potremo far ricorso al metodo di approssimazione come indicato dall'Hammerstein⁽²⁾.

A tale scopo ricordiamo la ben nota relazione:

$$(4) \quad \log \left(\frac{\sin \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \right)^2 = 4 \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\sigma_1 \sin n\sigma}{n}.$$

Saranno autofunzioni del nucleo:

$$\frac{\sin \sigma}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin n\sigma}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Saranno autovalori dello stesso

$$\frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{n}{2}, \dots$$

Math.», 54, 1-2, pp. 117 e segg. (1930)). Codesto lavoro mi venne fin dallo scorso anno suggerito dal Chiarissimo prof. Crudeli, il quale mi fu gentilmente prodigo di osservazioni e consigli durante la presente ricerca.

(1) Nel senso delle equazioni integrali lineari (HAMMERSTEIN).

(2) HAMMERSTEIN, loc. cit., paragrafo 10, p. 153.

Applicando il detto metodo di approssimazione costruiremo, seguendo Hammerstein, le soluzioni approssimate:

$$(5) \quad T_m(\sigma) = \sum_{n=1}^m C_n^{(m)} \frac{\sin n\sigma}{\sqrt{\pi}} \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots, m \end{array} \right)$$

in cui si è posto:

$$C_n^{(m)} = -\frac{2a^2}{n\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{\sum_{r=1}^m C_r^{(m)} \frac{\sin r\sigma_1}{\sqrt{\pi}}} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \sin n\sigma_1 d\sigma_1.$$

Con il crescere illimitato di m , $T_m(\sigma)$ tende *uniformemente* verso $T(\sigma)$.

Avremo:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1(\sigma) = C_1^{(1)} \frac{\sin \sigma}{\sqrt{\pi}} \\ C_1^{(1)} = -\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{C_1^{(1)} \frac{\sin \sigma_1}{\sqrt{\pi}}} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \sin \sigma_1 d\sigma_1, \\ T_2(\sigma) = C_1^{(2)} \frac{\sin \sigma}{\sqrt{\pi}} + C_2^{(2)} \frac{\sin 2\sigma}{\sqrt{\pi}} \\ C_1^{(2)} = -\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{C_1^{(2)} \frac{\sin \sigma_1}{\sqrt{\pi}} + C_2^{(2)} \frac{\sin 2\sigma_1}{\sqrt{\pi}}} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \sin \sigma_1 d\sigma_1 \\ C_2^{(2)} = -\frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi e^{C_1^{(2)} \frac{\sin \sigma_1}{\sqrt{\pi}} + C_2^{(2)} \frac{\sin 2\sigma_1}{\sqrt{\pi}}} \sin \sigma_1 (1 + \sin \sigma_1) \sin 2\sigma_1 d\sigma_1 \quad \text{etc.} \dots \end{array} \right.$$

Eseguendo le integrazioni indicate si trova:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{2n}^{(m)} = 0 \\ C_{2n-1}^{(m)} = \frac{C_1^{(m)}}{(2n-1)^2} \end{array} \right.$$

e pertanto si otterrà per le $T_m(\sigma)$

$$T_m(\sigma) = \sum_n C_{2n-1}^{(m)} \frac{\sin (2n-1)\sigma}{\sqrt{\pi}} = \frac{C_1^{(m)}}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\sin (2n-1)\sigma}{(2n-1)^2} \quad (2n-1 \leq m).$$

Ora poichè, come già fu detto, con il crescere illimitato di m $T_m(\sigma)$ tende uniformemente a $T(\sigma)$ potremo scrivere:

$$(9) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(\sigma) = T(\sigma) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\sigma}{(2n-1)^2} \quad (C_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} C_1^{(m)}).$$

E con ciò il problema che ci eravamo proposti è risolto.

Non ci resta che inserire la espressione di $T(\sigma)$ data dalla (9) nella (1') per determinare senza difficoltà la $\Theta(\sigma)$.

Si trova così⁽¹⁾:

$$(10) \quad \Theta(\sigma) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\sigma}{(2n-1)^2} = \begin{cases} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\sigma}{4} \right) & \text{in } 0 < \sigma < \pi \\ \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi\sigma}{4} - \frac{3\pi^2}{8} \right) & \text{in } \pi < \sigma < 2\pi. \end{cases}$$

Mediante la formula di Schwarz per un'area circolare potremo calcolare il valore della $\Omega(\zeta)$ del Levi-Civita nell'interno della circonferenza.

Si ha così:

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi\sigma}{4} \right) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma$$

da cui:

$$(11) \quad \Omega(\zeta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} \frac{\zeta^{(2n+1)}}{(2n+1)^2}.$$

Più non ci resta che formare la funzione:

$$\omega(\zeta) = i \log w.$$

Essa risulta come segue:

$$(12) \quad \omega(\zeta) = -\frac{\pi}{2} + i \log \frac{\zeta - i}{1 - i\zeta} - \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} \frac{\zeta^{(2n-1)}}{(2n-1)^2}.$$

Volendo calcolare adesso la resistenza esercitata dal fluido sopra le pareti $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ dell'ostacolo, ci serviremo della notevolissima relazione dovuta al Levi-Civita⁽²⁾:

$$(13) \quad R_x = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) \quad ; \quad R_y = \frac{\pi}{2} a^2 \left[2\omega(0) \cos \sigma_0 - \frac{1}{2} \omega''(0) \right].$$

(1) Cfr. KNOPP, *Theorie und Anwendung d. unendl. Reihen*, 3ª edizione (Berlin 1931).

(2) LEVI-CIVITA, loc. cit. a p. 1 form. (21'').

Nel caso attuale abbiamo:

$$\omega' = -\frac{2}{\zeta^2 + 1} - \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\zeta} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

$$\omega'' = -\frac{4\zeta}{(\zeta^2 + 1)^2} + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2\zeta^2} \log \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1-\zeta^2} \right).$$

E perciò:

$$\omega'(0) = -\left(2 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\right)$$

$$\omega''(0) = 0.$$

Pertanto si avrà, in base alle (13):

$$(14) \quad \begin{cases} R_x = \frac{\pi a^2}{4} \left(2 + \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \\ R_y = 0. \end{cases}$$

L'ultima delle (14) è dovuta alla simmetria rispetto all'asse delle x .

La prima delle (14) ha la forma delle espressioni proposte da vari autori quali ad es. Rosenhead, Brodetsky, Schnieden e Eisner, i quali cercarono una soluzione approssimata del problema qui rigorosamente trattato.

Sarà oggetto di successivi studi la ricerca della forma delle linee λ_1 e λ_2 e la estensione del metodo qui adottato alla risoluzione di altri problemi.

Meccanica. — *Onde di discontinuità nei mezzi elastici più generali.* Nota⁽¹⁾ di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I più generali mezzi elastici (omogenei) in cui sono possibili onde piane a comportamento vibratorio (nel senso abituale della fisica) sono stati caratterizzati dal Beltrami, il quale ne riconobbe l'identità con i cosiddetti mezzi di Green⁽²⁾, nei quali il potenziale elastico dipende da 8 costanti. Ma nel caso più generale (quando non sussistono cioè speciali circostanze fisiche) il potenziale suddetto dipende da 21 coefficienti, e allora, nonchè *a fortiori* se i detti coefficienti non sono costanti ma dipendono comunque dal posto e dal tempo, le corrispondenti equazioni elastiche non ammettono più soluzioni interpretabili come onde piane. Seguita invece ad essere possibile in ogni caso la propagazione di onde di discontinuità (del secondo ordine); in particolare di onde piane, ogniqualvolta si tratti di mezzi omogenei.

Ciò fu stabilito in una Nota precedente⁽³⁾ limitatamente però al caso (intermedio tra quello di Green e il più generale) di un mezzo elastico dotato di tre piani ortogonali di simmetria (il cui potenziale dipende in conformità da 9 parametri).

Mostrerò qui che considerazioni del tutto analoghe valgono anche nel caso di un mezzo elastico comunque anisotropo ed eterogeneo (potenziale elastico che può contenere tutti i 21 coefficienti, eventualmente anche funzioni del posto e del tempo).

Basterà qui accennare agli sviluppi che sono necessari per giustificare questa asserzione, rimandando il lettore alla Nota citata per i dettagli del procedimento.

Essendo u, v, w le componenti dello spostamento della generica particella del mezzo ed $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le caratteristiche della deformazione, ammettiamo per l'energia elastica l'espressione

$$W = \frac{1}{2} \left(\sum_{rs} A_{rs} \epsilon_r \epsilon_s + \sum_{rs} B_{rs} \gamma_r \gamma_s + 2 \sum_{rs} C_{rs} \epsilon_r \gamma_s \right)$$

dove si suppone che $A_{rs} = A_{sr}, B_{rs} = B_{sr}$.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1931.

(2) Cfr. E. BELTRAMI, « Opere », t. IV.

(3) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Onde elastiche nei mezzi anisotropi*, « Rend. della R. Accademia dei Lincei », (6), vol. XIV, 2° sem., 1931, p. 265.

Le equazioni differenziali del moto elastico sono

$$(I) \quad A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2C_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \zeta} + 2B_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} +$$

$$+ C_{13} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (A_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (B_{23} + C_{11}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \zeta} +$$

$$+ (B_{31} + C_{22}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \zeta} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + (B_{32} + C_{11}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

$$+ (A_{13} + B_{22}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + (B_{21} + C_{33}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \zeta} + \dots = 0$$

$$(II) \quad C_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (A_{21} + B_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (B_{32} + C_{11}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \zeta} +$$

$$+ (B_{13} + C_{22}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \zeta} + B_{33} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + 2C_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2B_{31} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \zeta} +$$

$$+ 2C_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + B_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + (B_{31} + C_{22}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

$$+ (B_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + (A_{23} + B_{11}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \zeta} + \dots = 0$$

$$(III) \quad C_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{32} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + (B_{23} + C_{11}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (A_{31} + B_{22}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \zeta} +$$

$$+ (B_{12} + C_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \zeta} + B_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{31} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + (B_{13} + C_{22}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} +$$

$$+ (B_{21} + C_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \zeta} + (A_{32} + B_{11}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial \zeta} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} +$$

$$+ 2B_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2C_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + 2C_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \zeta} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dots = 0.$$

L'equazione differenziale delle caratteristiche

$$\zeta(t, x, y, \zeta) = \text{cost}$$

di questo sistema si ottiene annullando il determinante $\Omega(p_0, p_1, p_2, p_3)$ dei coefficienti di $\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}$, quando si ponga al posto di ciascuna derivata seconda che comparisce nel sistema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = p_1 p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \dots \text{ ecc.,}$$

$$\text{essendo } p_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad p_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad p_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

L'equazione di terzo grado in p_0^2

$$\Omega = 0$$

è un'equazione secolare come accade nel caso in cui il mezzo elastico sia isotropo o dotato di tre piani ortogonali di simmetria, epperò essa ammette tutte le radici reali

$$p_0 = \pm H_1(t, x|p), \quad p_0 = \pm H_2(t, x|p), \quad p_0 = \pm H_3(t, x|p).$$

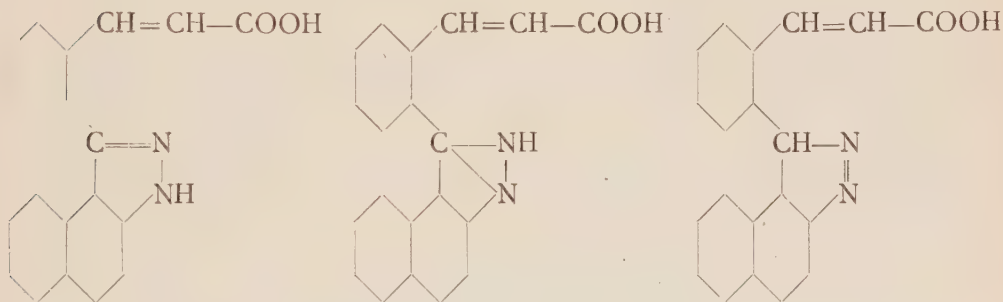
A ciascuna di queste equazioni alle derivate parziali del 1° ordine nella funzione incognita ζ corrisponde una infinità di ipersuperficie caratteristiche nei due versi possibili di propagazione.

Risulta così stabilita nel mezzo elastico più generale l'esistenza di tre onde possibili, la direzione di propagazione di ciascuna di esse potendosi determinare costruendo le relative bicaratteristiche.

Chimica. — *Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'-dinaftile⁽¹⁾. Nota II⁽²⁾ di A. CORBELLINI e L. BARBARO, presentata dal Corrisp. L. CAMBI.*

Abbiamo recentemente esposto alcune nostre ricerche sul composto a carattere acido che si ottiene nella decomposizione del tetrazoderivato della 2, 2'-diammina 1, 1'-dinaftile⁽³⁾.

I risultati allora conseguiti ci avevano fatto ritenere come molto probabile che si trattasse dell'acido [4,5-(nafto-1', 2')-pirazolil (3)]-orto-cinamico, il quale, secondo la costituzione dell'anello pirazolico, può avere una delle tre strutture seguenti:



Il meccanismo della sua formazione, come abbiamo allora esposto, si riconduce alla nota azione ossidante dei diazocomposti e diazoidrati.

L'ossidazione di tale acido in soluzione alcalina con permanganato potassico effettuata a temperatura ordinaria dà luogo, come si è detto, a tre prodotti:

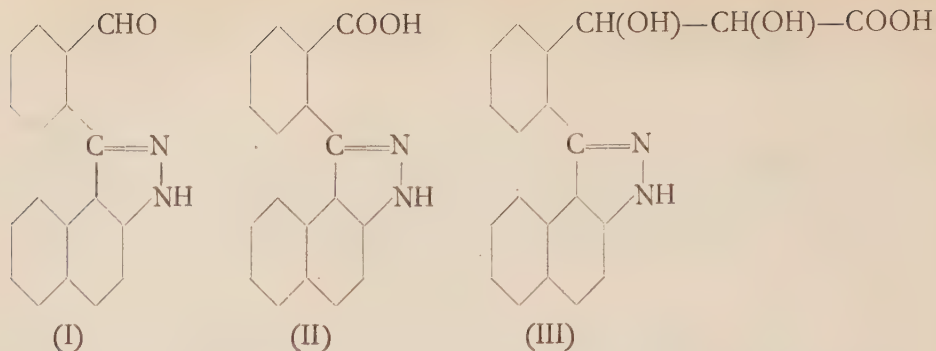
- a) un composto a carattere aldeidico (p. f. 230°) $C_{18}H_{12}ON_2$ (I);
- b) un secondo a carattere acido (che non si era riusciti a purificare e del quale si era già prevista la costituzione analoga a quella dell'acido benzoico (II) o a quella dell'acido fenilglicerico (III));
- c) un terzo pure a carattere acido.

A questi composti, per le ragioni allora esposte, avevamo attribuito le costituzioni seguenti:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1931.

(3) Questi « Rendiconti », XII, p. 445 (1930).



lasciando però indeterminata, come nel caso dell'acido precedente, la costituzione dell'anello pirazolico.

Esponiamo in questa Nota ulteriori ricerche sull'argomento che confermano la costituzione attribuita all'acido in questione.

Proseguendo nello studio della predetta ossidazione e dei suoi prodotti abbiamo constatato che:

1) il primo composto acido (p. f. 268° – 271°) corrisponde alla formola bruta $C_{18}H_{12}O_2N_2$ e ad esso si deve quindi attribuire la costituzione (II);

2) il secondo composto acido è un prodotto azotato notevolmente più ossidato del composto precedente, e proviene cioè da un'azione ossidante più profonda. Infatti effettuando l'ossidazione intorno a 0° esso si forma in piccola quantità.

L'aldeide (I) si ottiene per concentrazione della soluzione acquosa alcalina ossidata e, data la sua insolubilità in acqua ed in alcali, è da escludere che essa sia un prodotto diretto dell'ossidazione. Probabilmente essa proviene dalla scissione dell'acido $R-CO-COOH$, analogo al fenilgliossilico, per prolungato riscaldamento della sua soluzione alcalina come avviene per l'acido piruvico ⁽¹⁾.

Lo stesso acido (II) si ottiene sottoponendo l'aldeide (I) in sospensione alcoolica all'azione dell'idrato potassico a temperatura ordinaria.

Infatti la soluzione alcoolica che si forma in un primo tempo lasciata a sè per circa un giorno e mezzo e precipitata poi per diluizione con acqua dà luogo ad un primo prodotto corrispondente a circa il 20 % dell'aldeide posta in reazione. Acidificando poi la soluzione alcalina precipita l'acido (II) quasi puro nella quantità di circa l'80 % dell'aldeide di partenza.

Non si tratta di una pura reazione di Cannizzaro: il primo composto, che dovrebbe corrispondere all'alcool, non è in rapporto equimolecolare con l'acido. Ci riserviamo di studiarlo.

A dimostrare nell'acido in questione la presenza della catena cinnamica

(1) A. FERNBACH e M. SCHOEN, « Compt. Rend. », 158, p. 977 (1915); A. G. NORMAN e J. TH. MARTIN, « Chem. Zentr. », 1930, II, p. 2772.

si è cercato di ricostruirla tentando di riottenere tale acido partendo dall'aldeide ottenuta nella predetta ossidazione.

Infatti trattando con acido malonico l'aniliderivato dell'aldeide ⁽¹⁾ (p. f. 224°-225°) l'acido a cui si perviene (p. f. 268°-269°) è identico a quello ottenuto dalla decomposizione del tetrazoderivato della 2, 2'-diammina-1, 1'-dinafile.

Concludendo le nostre indagini portano ulteriore conferma alla costituzione attribuita a questo acido ed ai suoi prodotti di ossidazione. Inoltre, per quanto riguarda la catena cinnamica, tenendo presente il suo modo di formazione si può dedurre che si tratta dell'isomero *cis*.

Ritourneremo in una prossima Nota sulla struttura dell'anello pirazolico.

PARTE SPERIMENTALE.

Aldeide [4.5-(nafto-1', 2')-pirazolil-(3)] orto-benzoica.

5 gr. (1 mol.) di acido [4.5-(nafto-1', 2')-pirazolil-(3)]-orto-cinnamico greggio (p. f. 255°-260°) preparato nel modo indicato ⁽²⁾ si sospendono in 2500 cmc. di acqua e si portano in soluzione alcalinizzando con carbonato sodico e riscaldando.

Si raffredda la soluzione a —1°-0° e si aggiunge lentamente, mediante un imbuto a rubinetto con il gambo immerso nel liquido, sempre raffreddando esternamente e con buona agitazione una soluzione raffreddata di 8.4 gr. (3.33 mol.) di permanganato potassico in 600 cmc. di acqua.

Durante l'aggiunta dell'ossidante, la quale deve essere regolata in modo da mantenere la temperatura fra 0°-2°, si osserva talora la formazione di una piccola quantità di aldeide che sotto forma di precipitato bianco galleggia sulla schiuma che copre il liquido agitato.

Finita l'aggiunta del permanganato si lascia la miscela sempre a freddo fin quando tutto l'ossidante è scomparso. Poi la si riscalda e si sprema alla pompa il biossido di manganese lavandolo successivamente parecchie volte con acqua calda.

Il filtrato e le acque di lavaggio si concentrano a bagnomaria a piccolo volume (circa 150 cmc.); durante la concentrazione si separa l'aldeide sotto forma di precipitato fioccoso bianco sporco. Si ottengono circa 0.5 gr. di prodotto secco.

Un'altra piccola quantità di aldeide si ottiene estraendo con clorobenzolo il biossido di manganese.

(1) E. KNOEVENAGEL, «Ber.», 31, p. 2602 (1898).

(2) A. CORBELLINI e L. BARBARO, loc. cit. Si ottiene un rendimento ed un prodotto migliore diazotando la base in soluzione cloridrica diluita e lasciando decomporre lentamente la soluzione filtrata del tetrazo a temperatura ordinaria completando poi la decomposizione a bagnomaria.

Il composto puro (p. f. 230°) si ottiene, come si è detto ⁽¹⁾, cristallizzando il prodotto greggio da clorobenzolo.

L'aldeide è pochissimo solubile anche a caldo in cloroformio, acetone, alcool e benzolo; è invece solubile a caldo nei solventi a punto di ebollizione più alto come clorobenzolo e nitrobenzolo.

Anilderivato. — 0.5 gr. di aldeide (p. f. 223°) si sospendono in circa 16 cmc. di alcool etilico 99°,2; aggiungendo 4 cmc. di anilina e bollendo dolcemente la miscela si ha soluzione completa. Si prosegue l'ebollizione per breve tempo indi si lascia raffreddare con che si separa quasi totalmente l'anilderivato (p. f. 219°–220°).

Cristallizzando ripetutamente il prodotto greggio da clorobenzolo si ottiene il composto puro in aghetti bianchi fondenti a 224°–225°. All'analisi si è avuto:

	trovato	°/o	C 82.77	H 5.03	N 11.99
per $C_{24}H_{17}N_3$	calcolato		82.96	4.94	12.10.

L'anilderivato è insolubile in alcool, poco solubile in cloroformio, benzolo, e solubile nei solventi a più alto punto di ebollizione come clorobenzolo, anilina, nitrobenzolo.

Acido [4.5-(nafto-1', 2')-pirazolil-(3)]-orto-benzoico.

Allo scopo di assicurarci che questo è l'unico acido (oltre all'ossalico) che si forma nell'ossidazione e che non è presente un acido analogo al fenilglicerico ⁽²⁾ si è proceduto al frazionamento del prodotto dell'ossidazione nel modo seguente:

Il liquido alcalino dal quale si è separata la precedente aldeide si concentra ulteriormente a circa 30 cmc. Per raffreddamento si separa un sale più o meno colorato in bruno. Acidificando con acido cloridrico la sua soluzione acquosa filtrata si separa per lo più un prodotto fioccoso bianco-sporco o più raramente un prodotto cristallino giallo-chiaro.

Esso si purifica cristallizzandolo ripetutamente da alcool, con che si ottengono dei piccoli cristalli bianchi irregolari fondenti a 268°–271° (non corr.) con sviluppo di anidride carbonica.

All'analisi si è avuto:

	trovato	°/o	C 74.80	H 4.15	N 9.81
per $C_{18}H_{12}O_2N_2$	calcolato		74.97	4.19	9.73

(1) A. CORBELLINI e L. BARBARO, loc. cit.

(2) FITTIG e RUER, « Ann. », 268, p. 27 (1892).

L'acido è quasi insolubile in cloroformio, benzolo, clorobenzolo; è discretamente solubile in alcool. Il suo sale sodico è pochissimo solubile a freddo in acqua.

Il filtrato alcalino dal quale si è separato il sale precedente si acidifica con acido cloridrico e si filtra il precipitato fioccoso che con ciò si ottiene. Il prodotto secco si estrae ripetutamente con etere, ed il residuo si cristallizza più volte da alcool, con che si ottengono dei cristalli d'aspetto uguale ai precedenti e fondenti a 268° - 269° (non corr.) con sviluppo gassoso.

La costanza del punto di fusione della miscela con l'acido precedente dimostra che si tratta del medesimo composto.

La soluzione eterea si evapora a secco e si scioglie il residuo in acido acetico diluito regolando la diluizione in modo da lasciare insolubile la piccola quantità di impurezze oleose. Si bolle la soluzione per breve tempo con carbone animale e la si precipita diluendo con acqua.

Il precipitato si cristallizza ripetutamente da alcool; si ottengono dei cristalli fondenti a 268° (non corr.) con sviluppo gassoso.

La composizione di questo composto

trovato %	C 74.78	H 4.25	N 9.70,
-----------	---------	--------	---------

il suo comportamento con i diversi solventi ed il punto di fusione della miscela dimostrano la sua identità con gli acidi precedenti.

Il filtrato acquoso acido dal quale si sono separati i due ultimi acidi si estrae ripetutamente con etere. Il residuo è in piccola quantità e cristallizza dall'alcool metilico in aghetti bianchi finissimi che riscaldati in tubicino capillare rimbruniscono decomponendosi senza fondere verso 290° .

Questo composto si ottiene in maggior quantità accanto all'aldeide e all'acido precedente effettuando l'ossidazione dell'acido [4.5-(nafto-1', 2')-pirazoli (3)] orto-cinnamico con le stesse modalità ma a temperatura ordinaria.

All'analisi si è avuto:

trovato %	C 51.17	H 3.53	N 8.28.
-----------	---------	--------	---------

Da questi risultati non si riesce a dedurre la formula bruta del composto; esso non è completamente puro.

Il liquido acquoso acido si evapora a secco a bagnomaria; l'estrazione con etere del residuo non dà praticamente estratto.

In questo residuo è contenuto acido ossalico; infatti trattando la sua soluzione acquosa con cloruro di calcio si ottiene un precipitato (gr. 1) il cui tenore in calcio è vicino a quello che compete all'ossalato di calcio:

	trovato %	Ca 27.11
per $C_2O_4Ca + H_2O$	calcolato	27.43

e presenta le stesse reazioni di questo composto.

L'acido [4,5-(nafto-1' 2')-pirazolil (3)] orto-benzoico si ottiene anche dalla precedente aldeide operando nel modo seguente:

0,3 gr. (1 mol.) di aldeide (p. f. 223°) si sospendono in 6 cmc. di alcool assoluto e si aggiungono 0,6 gr. (10 mol.) di idrato potassico sciolti nella minor quantità d'acqua possibile. Agitando la miscela l'aldeide si scioglie totalmente.

Si lascia la soluzione a sè a temperatura ordinaria in recipiente chiuso per circa un giorno e mezzo e la si diluisce poi con acqua. Il precipitato che con ciò si separa (gr. 0,06) fonde fra 215°-225° e non si riesce a purificarlo per cristallizzazione dai diversi solventi.

La soluzione alcalina si precipita acidificandola con acido cloridrico. L'acido bianco fioccoso che si separa, già notevolmente puro, (gr. 0,24; p. f. 255°-260°) si cristallizza ripetutamente da alcool. Si ottengono dei cristalli bianchi fondenti a 269°-271,5° (non corr.).

La composizione di questo composto

trovato %	C 75,05	H 4,30	N 9,85,
-----------	---------	--------	---------

ed il punto di fusione della miscela dimostrano la sua identità con gli acidi precedenti.

Diluendo la soluzione alcoolica subito dopo la soluzione dell'aldeide questa precipita inalterata (p. f. 228°; p-nitrofenilidrazone p. f. 258°).

Acido [4,5-(nafto-1', 2')-pirazolil-(3)]-orto-cinnamico.

I tentativi di ottenere questo acido trattando la precedente aldeide sia con anidride acetica e acetato sodico sia con etere acetico e sodio furono infruttuosi. Esso venne ottenuto nel modo seguente:

0,3 gr. di anilderivato dell'aldeide si spappolano in 3 cmc. di alcool amilico e si aggiungono 0,2 gr. di acido malonico finemente macinati; si forma una pappa bianca che riscaldando passa in soluzione.

Si prosegue il riscaldamento a dolce ebollizione per circa due ore e si evapora poi la soluzione a secco distillando nel vuoto l'alcool amilico. Il residuo bianco o leggermente bruno si riscalda ulteriormente a bagno d'olio intorno a 140° per circa 20 minuti.

Esso si estrae poi con soluzione diluita di carbonato sodico; la soluzione alcalina separa parzialmente per raffreddamento il sale sodico dell'acido nei caratteristici aghetti bianchi setacei.

Acidificando la sospensione con acido cloridrico precipita l'acido bianco fioccoso. Il prodotto greggio fonde a 254°-255°; cristallizzandolo ripetutamente da piridina si ottengono degli aghetti bianchi d'aspetto uguale a quelli dell'acido ottenuto dalla 2, 2'-diammina 1, 1'-dinaftile fondenti a 268°-269° (non corr.) con sviluppo gassoso.

All'analisi si è avuto:

	trovato	%	C 76.38	H 4.60	N 9.03
per $C_{20}H_{14}O_2N_2$	calcolato		76.40	4.49	8.92.

L'identità dei due acidi è dimostrata dal punto di fusione della loro miscela e da quello della miscela dei loro prodotti di sublimazione (punto fusione 151° – 152°)⁽¹⁾.

Biologia. — *Contributo allo studio della fotosintesi dei glucidi in luce ultravioletta a partire da soluzioni acquose di anidride carbonica attivata.* Nota⁽²⁾ di G. MEZZADROLI e E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

Abbiamo già posto in evidenza in Note precedenti⁽³⁾ le esperienze di fotosintesi delle aldeidi e dei glucidi riduttori, da soluzioni di bicarbonati alcalini e alcalino-terrosi e da soluzioni di anidride carbonica sotto l'azione dei raggi u.-v. emessi da una lampada di quarzo a vapore di mercurio.

Al fine di aumentare ancora il rendimento della reazione in glucidi riduttori, che si formano in queste condizioni in quantità minime, ed inoltre scompaiono in un secondo tempo per un effetto di retrogradazione nella soluzione, abbiamo pensato di studiare la reazione di fotosintesi nella soluzione di anidride carbonica, in presenza di catalizzatori facendo gorgogliare nella soluzione dell'anidride carbonica sottoposta prima all'azione dell'effluvio elettrico, di un ozonizzatore o alla azione della emanazione del radio.

Infatti recenti studi biologici, e di fisiologia vegetale⁽⁴⁾ tendono a dimostrare come l'anidride carbonica emessa nell'atmosfera come prodotto

(1) A. CORBELLINI e L. BARBARO, loc. cit.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1931.

(3) G. MEZZADROLI e G. GARDANO, *La formazione di aldeide formica e di zuccheri per azione dei raggi u.-v. sui bicarbonati alcalini e alcalino terrosi.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1927, vol. VI, serie 6^a, fasc. 5-6; G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Action des rayons u.-v. sur la formation des sucres et des aldéhydes complexes a partir des solutions de bicarbonates et d'acide carbonique.* Huitième Congrès de Chimie Industrielle 1928 Chimie et Industrie; G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Influenza del magnesio metallico sulla formazione di aldeide formica e di zuccheri per azione dei raggi u.-v. sulle soluzioni di bicarbonato di calcio.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. VIII, serie 6^a, fasc. 10, 1928; G. MEZZADROLI e T. BABES, *Influenza dei carboni attivi e dello zinco, sulla formazione di aldeidi complesse e di glucidi dalle soluzioni di bicarbonato di potassio sotto l'azione dei raggi u.-v.* « Gazz. Chim. It. », vol. 59, fasc. IV, 1929.

(4) M. C. POTTER, *Effetti elettrici che accompagnano la decomposizione di composti organici, considerati in relazione alla fotosintesi e alla nutrizione delle piante.* « Zentralbl. für Bakt. », 1929, p. 56.

della combustione, sia di quella propriamente detta, che di quella fisiologica (fermentazione, respirazione) esista, in parte in condizione attiva: in recenti esperienze lo Stoklasa⁽¹⁾, si servì di anidride carbonica attivata dalla emanazione del radio, per far crescere più rapidamente le bietole ed ottenere un maggior rendimento nella loro coltivazione.

Recentemente il Petri⁽²⁾ ha pure osservato come la ionizzazione dell'aria favorisca l'accrescimento delle leguminose.

PARTE SPERIMENTALE.

Come sorgente di raggi u.-v. ci siamo serviti della lampada di quarzo a vapore di mercurio, già descritta nelle Note precedenti.

Le soluzioni venivano esposte all'azione dei raggi u.-v. nei recipienti di quarzo molto trasparenti in quantità di 100 cmc. per ogni recipiente, in queste soluzioni si faceva gorgogliare l'anidride carbonica attivata (velocità di 300 bolle al minuto). Le soluzioni venivano mantenute ad una temperatura quasi costante di 31-35° C. per mezzo di raffreddamento, la distanza fra le soluzioni e la lampada fu variata da 2 a 15 cm. (nelle esperienze qui riportate la distanza era di 5 cm.).

Dopo ogni esposizione si analizzavano qualitativamente e si ricercavano le seguenti sostanze: formaldeide, aldeide etilica, acido formico, acido acetico, aldeide glicolica, zuccheri riduttori.

L'analisi quantitativa veniva fatta su 500 cmc. (ottenuti per unione di liquido di 5 recipienti). Quantitativamente venne determinato il potere riduttore totale delle soluzioni rispetto ad una soluzione di IN/10 e il potere riduttore distillato ottenuto nella distillazione in corrente di vapor d'acqua e nel vuoto parziale, potere riduttore che esprime la presenza di aldeide formica, e dell'aldeide glicolica, e il potere riduttore rispetto al Fehling.

Riporteremo qui i risultati ottenuti nelle ricerche qualitative e quantitative per le tre diverse condizioni:

- 1° Acqua distillata gorgogliamento di CO₂.
- 2° Acqua distillata, carbonato di CA, Magnesio metallico, gorgogliamento di CO₂.
- 3° Acqua distillata, carbonato di calcio, Magnesio metallico, gorgogliamento di CO₂ attivato sotto l'azione dell'effluvio elettrico e delle emanazioni del radio.

Le determinazioni venivano fatte dopo intervalli di tempo determinati: 15 m., 30 m., 45 m., 60 m., 120 m., 180 m., 240 m.

(1) STOKLASA, *Die modernen Ziele des Aufbaues neuer lebender Materie in der Zucker-rübenindustrie*. «Centrabl. für Zucker-Industrie» Festaussgabe, 1928.

(2) L. PETRI, *Comportamento dell'olivo sotto l'azione delle radiazioni dell'uranio e della ionizzazione dell'aria*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», 3 febbraio 1929, p. 188.

Ricerche qualitative.

Abbiamo determinata la *presenza di formaldeide* a mezzo della reazione col dimedon.

Questa reazione ha dato risultato positivo a partire da una ora di esposizione, le prove fatte sui primi 25 cmc. del distillato hanno dato risultati più evidenti.

Abbiamo determinato la presenza di aldeide glicolica qualitativamente sul distillato ottenuto in corrente di vapor d'acqua e in depressioni a mezzo delle reazioni degli zuccheri che essa presenta:

- 1° Reazione con α -Naftolo e acido solforico—anello rosa violetto.
- 2° Reazione con la resorcina e acido solforico—colorazione rossa.
- 3° Reazione di Fehling.
- 4° Formazione di osazone colla fenilidrazina.

Queste reazioni erano positive ed evidenti sul distillato ottenuto da soluzioni esposte per due ore e più.

Sul residuo furono poi fatte le relazioni di identificazione degli zuccheri (vedi reazioni citate), e le prove per l'identificazione dei pentosi che qualche volta sono riuscite debolmente positive.

Nelle ricerche per la identificazione dei diversi zuccheri a mezzo delle reazioni colorimetriche caratteristiche del triptofano abbiamo osservato la reazione violetta del glucosio, e quella verdastra dell'arabinosio. Le prove di analisi degli osazoni non hanno dato dei risultati soddisfacenti. Non siamo riusciti a determinare la presenza dell'acido formico e dell'acetaldeide trovati invece da altri sperimentatori.

Determinazione quantitativa.

Abbiamo seguito le formazioni di sostanze riduttrici per i diversi tempi di esposizione, a mezzo di una soluzione di $\text{IN}/10$, e di una soluzione di Fehling per il residuo. Queste determinazioni fatte ad intervalli di tempo di 15 m., 30 m., 45 m., 60 m., 120 m., 180 m., 240 m., ci hanno permesso di seguire la velocità diversa della reazione di fotosintesi rispetto alle aldeidi e ai glucidi riduttori; nei tre tipi di reazioni esaminati, è da notare l'azione favorevole esercitata dalla presenza di carbonato di calcio e di Mg. metallico e di quella ancor più forte di CO_2 attivato.

Il potere riduttore totale sui 500 cmc. di soluzione venne fatto secondo il metodo di G. Romyn, con lo jodio $\text{N}/10$.

TABELLA I.

Potere riduttore totale delle soluzioni, espresso in cmc. di IN/10 ridotto.

Soluzioni	Tempo di esposizione in minuti						
	15	30	45	60	120	180	240
1) Acqua distillata + + gorgogliamento di CO ₂	—	minimo	minimo	1	1.8	2.4	2.6
2) Acqua distillata + + carbonato di cal- cio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂	—	minimo	0.8	1.5	2.9	4	4.4
3) Acqua distillata + + carbonato di cal- cio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂ attivato . . .	minimo	0.5	1.2	3.1	5	6.25	6.9

TABELLA II.

*Potere riduttore del residuo della distillazione rispetto al liquido di Fehling
cmc. di Fehling diluito 1:2 ridotti dalla soluzione.*

Soluzioni	Tempo di esposizione in minuti						
	15	30	45	60	120	180	240
1) Acqua distillata + + gorgogliamento di CO ₂	—	minimo	minimo	1	1.75	2.25	2.3
2) Acqua distillata + + carbonato di cal- cio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂	—	minimo	0.8	1.35	2.50	3.35	3.6
3) Acqua distillata + + carbonato di cal- cio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂ attivato . . .	minimo	0.5	1.2	2.8	4.3	5.4	5.95

TABELLA III.

Potere riduttore del residuo della distillazione rispetto al liquido di Fehling cmc. di Fehling diluito 1:2 ridotti dalla soluzione.

Soluzioni	Tempo di esposizione in minuti						
	15	30	45	60	120	180	240
1) Acqua distillata + + gorgogliamento di CO ₂	—	—	—	—	minimo	0.4	0.95
2) Acqua distillata + + carbonato di calcio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂	—	—	minimo	0.4	0.75	1.4	1.7
3) Acqua distillata + + carbonato di calcio + Mg metallico + + gorgogliamento di CO ₂ attivato . . .	—	minimo	minimo	0.6	1.5	1.9	2.1

Osservazione:

Dai dati riportati nelle tabelle precedenti si vede come il potere riduttore delle soluzioni (formazione di sostanze riduttrici) aumenta più rapidamente nella soluzione in cui si fa gorgogliare del CO₂ sottoposto all'azione dell'effluvio elettrico o della emanazione del radio.

La determinazione del potere riduttore del distillato ottenuto in corrente di vapore, permette di porre in evidenza la riduzione dovuta alla presenza di aldeide formica e glicolica, i risultati ottenuti mostrano come la parte maggiore del potere riduttore totale delle soluzioni sia dovuta alle aldeidi presenti. Sul residuo rimasto dopo la distillazione viene determinato il potere riduttore rispetto al Fehling diluito 1:2. Questo potere riduttore deve essere dovuto a zuccheri riduttori od a sostanze organiche riducenti.

Conclusioni:

1° Se si espongono all'azione dei raggi u.-v. delle soluzioni di anidride carbonica, ottenute facendo gorgogliare dell'anidride carbonica nell'acqua distillata, in presenza o anche in assenza di catalizzatori, si osserva dopo un tempo più o meno lungo a seconda delle condizioni di esperienza,

la formazione di aldeide formica, di aldeide glicolica, e di zuccheri riduttori come è stato già posto in evidenza da altri sperimentatori, e come noi abbiamo potuto confermare.

2° In particolare abbiamo osservato come l'introduzione di carbonato di calcio e di magnesio finemente suddiviso (e ancor meglio allo stato colloidale) e soprattutto la attivazione dell'anidride carbonica per azione dell'effluvio elettrico o della emanazione del radio accelera la reazione e aumenta soprattutto la formazione di glucidi riduttori, spostando favorevolmente la reazione di fotosintesi.

3° La quantità dei glucidi riduttori formati dopo 4 ore nella soluzione contenente il carbonato di calcio e magnesio metallico, con gorgogliamento di CO_2 alle suddette condizioni, è di 120 % superiore alla quantità formata nella soluzione di sola acqua distillata e gorgogliamento di CO_2 , e del 30 % quasi nella soluzione con carbonato di calcio e magnesio metallico e gorgogliamento di CO_2 .

4° Abbiamo ancora osservato come la velocità, e di conseguenza il rendimento della reazione di fotosintesi diminuisca col tempo e una alternazione di un periodo di esposizione e uno di riposo sia un mezzo per aumentare la quantità dei prodotti ottenuti per fotosintesi dalla stessa soluzione.

Biologia. — *Su alcuni fenomeni di correlazione nelle piante*⁽¹⁾.
Nota di G. ZANONI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Il problema delle correlazioni nell'organismo vegetale è problema essenzialmente morfologico e morfogenetico. Scaturito dalla considerazione di quella unità strutturale, che nella pianta lega e reciprocamente subordina, entro limiti ben determinati, parti dotate d'una spiccata potenzialità di individualizzazione e di accrescimento, esso interviene a spiegare tale armonia di sviluppo e di forme attraverso reciproche influenze, di natura verosimilmente ormonica. Influenze ormoniche, per alcune delle quali — a nostro avviso paragonabili alle genetine del regno animale — si vengono individuando i centri di origine negli apici vegetativi del caule e della radice.

Ma, accanto a questa forma di correlazione che si esplica in rapporto a fatti definiti di sviluppo e tra organi determinati — quali ad es. l'apice del caule e la sottostante zona di accrescimento — come accanto ai fenomeni di conduzione umorale degli stimoli (Ricca, Cholodny, Stark ecc.), nessun sicuro documento sperimentale abbiamo di una correlazione fisiolo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia Comparete della R. Università di Perugia.

(2) Nella seduta del 1° novembre 1931.

gica nel senso già noto dagli animali, in quanto cioè un organo in attività divenga, per questo stesso fatto, centro di irradiazione d'un impulso capace di influenzare organi lontani o, comunque, di tradursi in un particolare atteggiamento fisiologico più generale, ridestando in solidarietà funzionale una più diffusa risonanza nel resto della pianta.

E, mentre una tale correlazione è presupposta dalle stesse espressioni della vita vegetale, nella loro unità fisiologica — come tipicamente da quella periodicità vegetativa, per la quale è innegabile una più profonda unitaria causa interna, se pur influenzabile dai fattori esterni — l'andamento più manifesto di alcune funzioni, prima fra tutte la clorofilliana, orienta pur sempre l'analisi secondo il concetto di una localizzazione funzionale, nei singoli organi.

Guida alla ricerca di un dispositivo sperimentale, che di tale correlazione fisiologica potesse offrire una dimostrazione, è stata, per noi, l'importanza di alcuni dei fattori ambientali come condizione per lo stesso esplicarsi delle più essenziali attività della pianta.

L'azione di uno di essi, localizzata sopra una parte dell'organismo vegetale, in quanto ridesti in queste modificazioni d'ordine funzionale, potrebbe fornirci mezzo per la ricerca di eventuali risonanze nelle parti non direttamente esposte. Nella luce ci è sembrato trovare il fattore ambiente, la cui importanza nell'economia della pianta, in quanto legata a una delle sue fondamentali attività fisiologiche, faceva più facilmente presumere possibili più generali ripercussioni; tali, d'altro lato, queste ultime da potersi prender a indice d'una vera e propria correlazione e non di un semplice trasporto a distanza dello stimolo.

Le ricerche sono state condotte sopra esemplari di *Solanum pseudo-capsicum* e di *Jasminum lucidum*, le specie, tra quelle tentate, che si sono dimostrate più adatte.

Il dispositivo sperimentale messo in atto consiste nell'esporre all'azione della luce alcuni rami d'una pianta, di cui i rimanenti — mediante un diaframma disposto in modo opportuno — restano contemporaneamente al buio, in una stanza, dove, nelle stesse condizioni di temperatura e di umidità, viene a trovarsi una seconda pianta di controllo. Si tratta, in tal modo, di ricercare, nelle foglie al buio della pianta parzialmente illuminata, possibili modificazioni indotte, per risonanza, dall'azione che la luce esercita sulle altre, in confronto con quanto si verifica nel controllo, rimasto completamente nell'oscurità.

Termine di riferimento, per esprimere una possibile azione della luce, è stato scelto il colore fogliare osservato per trasparenza al colorimetro, dal confronto di dischetti di dimensioni identiche — tali da occupare completamente il fondo della provetta — ottenuti da foglie, rispettivamente, dei rami illuminati e oscuri della pianta di saggio, e da foglie della pianta di controllo, mantenuta completamente al buio. I dischetti si prelevano su

foglie presumibilmente della stessa età e da punti corrispondenti della lamina, per evitare l'influenza perturbatrice di una diversa densità del reticolato delle nervature. Inoltre, a eliminare — per compensazione — possibili errori derivanti da quest'ultima causa, nonché da eventuali, sia pur minime, differenze di spessore, si sono in molte osservazioni utilizzati, contemporaneamente, parecchi dischi sovrapposti, provenienti da foglie diverse. Non disponendo d'un fotometro che, applicato al colorimetro, ci consentisse più precisi dati quantitativi, abbiamo dovuto in queste prime ricerche accontentarci di osservazioni qualitative, che sono tuttavia sufficienti a rilevare, nelle sue linee essenziali, l'andamento del fenomeno.

I risultati complessivamente ottenuti si possono così riassumere:

1°) la luce, nelle foglie ad essa esposte, modifica il colore verde di trasparenza, secondo una sorta di curva ciclica, nel corso delle 24 ore.

2°) all'azione locale, sopra una parte della pianta, risponde una diffusione della reazione, per cui, più o meno rapidamente, anche le foglie dei rami rimasti al buio seguono nella tonalità cromatica le foglie direttamente illuminate.

Nelle condizioni delle nostre esperienze, in mancanza di sicuri dati quantitativi, non è ancora possibile precisare l'andamento diurno della trasparenza fogliare, e neppure stabilire se la variazione ritmica di questa non persista, più o meno spiccatamente, nella pianta che è stata portata al buio e ha servito come termine di riferimento. Il che, peraltro, non turba la fisionomia dei risultati, in quanto, se pure una oscillazione diurna esistesse anche nella pianta al buio, con andamento parallelo a quello della pianta di saggio, l'oscillazione di quest'ultima è tuttavia, per l'azione stessa dei fattori esterni, assai più ampia, per il che appunto diviene riconoscibile; e ciò che interessa ai fini della ricerca è precisamente il fatto che, con tale più ampia oscillazione dei rami illuminati, si armonizzano i rami al buio della medesima pianta, anziché seguire l'eventuale ritmo che, nelle stesse condizioni di oscurità, segue invece la pianta controllo.

Più particolarmente, per quanto si riferisce alle variazioni del colore, l'osservazione colorimetrica, paragonata con l'esame istologico, dimostra come esse, contrariamente a quanto in un primo tempo sembrava verosimile, non siano da porsi in relazione con i diversi orientamenti dei cloroplasti, potendosi, a parità di colore osservato al colorimetro, aver posizioni differenti dei plastidi e, viceversa, per posizioni analoghe di questi, diversità di colore. Del resto gli spostamenti dei cloroplasti nelle cellule, in quanto si traducono in variazioni della superficie di ciascuno esposta alla luce che direttamente colpisce la superficie fogliare, se influiscono di fatto sul colore a luce riflessa della pagina superiore della foglia, non devono invece — tenuto conto anche delle dimensioni dei plastidi e della loro distribuzione — avere sensibile importanza sul colore effettivamente da noi osservato al colorimetro, che è verde di trasparenza. Onde le variazioni, che questo presenta nel corso

delle 24 ore, nelle foglie esposte alla luce, ci ha indotto a introdurre il concetto di trasparenza clorofilliana della foglia, legata all'intensità del verde, più brevemente diremo di « trasparenza verde » della foglia. Trasparenza sensibile, nella sua intensità, all'intensità luminosa, e che deve avere quindi, presumibilmente, importanza nella fisiologia fogliare, indipendentemente dagli spostamenti dei cloroplasti. A derminare allora le sue variazioni, potremmo, per quanto ci è noto dell'azione della luce sui colloidi, pensare a una modificazione del substrato colloidale del plastidio; nè forse è inverosimile ammettere differenze quantitative del pigmento, per una sorta di metabolismo clorofilliano, che potrebbe mettersi in rapporto con quanto ci è noto dell'importanza della luce, per la genesi e la distruzione della clorofilla (1).

Comunque se ne interpreti l'origine, ciò che — ripetiamo — interessa, ai fini delle presenti ricerche, è il fatto nuovo che le variazioni di trasparenza nelle parti illuminate sono parallelamente seguite dalle parti rimaste all'oscuro. Interessa, in altri termini, rilevare questo singolare parallelismo tra i due gruppi di rami diversamente esposti della medesima pianta, parallelismo che si manifesta, normalmente, con un certo ritardo dei rami oscuri rispetto a quelli illuminati, maggiore per i lunghi rami del *Jasminum* in confronto di quelli più brevi del *Solanum*, nel quale il comportamento è anche più regolare.

Mentre, nelle condizioni delle nostre esperienze e dato l'andamento del fenomeno, non molto probabile appare un intervento di eventuali differenze di temperatura — il che, peraltro, sposterebbe, ma non altererebbe sostanzialmente il risultato — tale concordanza è indizio, a nostro avviso, che lo stato particolare indotto localmente dalla luce sulla foglia diffonde alle altre parti non direttamente colpite dallo stimolo.

Quale poi, del fenomeno descritto, possa essere il meccanismo d'azione — se esso sia riferibile a fatti d'ordine fisico e di trasporto d'energia, o non piuttosto esprima una correlazione d'ordine umorale, che in tutte le parti verdi della pianta ridesti lontane risonanze fisiologiche, anche se una soltanto riceve l'invito della luce — ciò costituisce oggetto di ricerche in corso.

(1) Dovrebbe, in tal caso, trattarsi di variazioni globali del pigmento, analoghe forse alle differenze quantitative che intercedono (Lubimenko ecc.) tra foglie adattate all'ombra e foglie adattate a intensa illuminazione, mentre non sembra (Willstaetter) potersi parlare di spostamenti nel rapporto tra i diversi componenti del sistema clorofilliano.

Biologia. — *Sopravvivenza dei tessuti embrionali di pollo mantenuti in liquido di Ringer a bassa temperatura* ⁽¹⁾. Nota di L. BUCCIANTE, presentata ⁽²⁾ dal Socio GIUSEPPE LEVI.

Ricerche precedenti mi avevano permesso di dimostrare che negli embrioni di pollo dal 6° al 12° giorno, sottoposti durante la normale incubazione a basse temperature, gli elementi cellulari dei diversi tessuti prelevati dall'organismo e coltivati « in vitro » a varia distanza dalla morte di esso, si dimostrano viventi per un tempo considerevolmente lungo. Queste mie ricerche si accordano e si ricollegano con quelle compiute con indirizzo analogo da Bianchini ed Evangelisti sui tessuti fetali di Cavia, Coniglio e Gatto, e da Gandolfo sui tessuti di animali adulti; da W. Lewis e McCoy su organi di Ratto col metodo della colorazione vitale; da Strangeways su embrioni di pollo, da Zondek e Wolff su ovaia umane e con quelle condotte recentemente da Roffo ⁽³⁾, pure sui tessuti di embrione di pollo.

Dalle mie ricerche emerse peraltro la possibilità della sopravvivenza dei tessuti per una durata assai più cospicua di quella riferita dagli AA. ora citati e soprattutto fu posta in evidenza una netta diversità di comportamento nel periodo della sopravvivenza, non solo fra un tessuto e l'altro, ma anche fra i vari elementi di uno stesso tessuto. Colle attuali ricerche ho voluto estendere le mie osservazioni, ricercando se gli stessi risultati ottenuti colla permanenza dell'uovo a temperature inferiori a quelle normali di incubazione si ottengano pure mantenendo piccoli frammenti di tessuti embrionali in liquido di Ringer a varia temperatura (+ 5°, + 10°, + 20°, + 30°) ⁽⁴⁾. Dirò subito che i risultati furono diversi a seconda che gli espianti mantenuti a lungo nel liquido di Ringer venivano coltivati in plasma puro oppure in plasma ed estratto di embrioni.

Ho usato per questi esperimenti di embrioni di 8 a 12 g. di incubazione; il criterio della sopravvivenza dei tessuti mi era fornito, come per le precedenti ricerche, dalla loro coltivabilità in vitro, giudicando come soprav-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Anatomico della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 1° novembre 1931.

(3) Esprimo il rammarico per non aver ricordato, per omissione del tutto involontaria, nel mio precedente lavoro: *Sulla sopravvivenza alle basse temperature (fino a - 25°) dei vari tessuti di embrione di pollo ecc.* « Arch. f. exper. Zellforsch. », Bd. 11, 1931, le ricerche di Roffo attinenti all'argomento da me trattato.

(4) Mi sono servito per questi esperimenti di un termostato fornito di 6 scompartimenti, nei quali, con oscillazioni che non superano 1°, si ha la temperatura rispettivamente di 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°.

viventi soltanto quei frammenti nei quali potevasi constatare un evidente emigrazione di cellule dall'espianto nel coagulo di plasma.

Ho avuto cura di allestire frammenti di dimensioni assai piccole, in qualche caso della grandezza dei futuri espianti; acciocchè per tutti gli organi si verificasse un'eguale condizione nei riguardi della superficie di contatto con il liquido ambiente.

Riferisco per ora solo i risultati ottenuti a 5° e 10°, riservandomi una ulteriore dettagliata esposizione, quando anche i dati ottenuti alle altre temperature saranno più numerosi; poichè per ora non ho riscontrato sensibili differenze fra la temp. di 5° e quella di 10° unisco in un'unica tabella i risultati relativi a questi esperimenti.

TABELLA

Organi e tessuti coltivati		Durata della sopravvivenza in liquido di Ringer a 5° e a 10°	
Cute	epitelio	21 giorni	
	fibrociti	» »	
Cuore		13 »	
Vasi		13 »	
Muscoli scheletrici		10 »	
Cervello	fibre, neuroblasti	8 »	
	fibrociti	10 »	
Milza	Leucociti, istiociti	3 »	
	fibrociti	8 »	
Mesonefro	epitelio	8 »	
	fibrociti	8 »	
Fegato	cellule epatiche	3 »	
	endotelio	8 »	

Dall'esame di questa tabella risulta innanzi tutto che la sopravvivenza dei tessuti mantenuti in liquido di Ringer è possibile per un tempo considerevolmente lungo, e si approssima abbastanza a quella che avevo riscontrato per i tessuti lasciati « in situ » negli embrioni posti a 0°. Debbo intanto far presente come per la cute la sopravvivenza è probabilmente più lunga di quella riferita (21 giorni); poichè a questo limite ho ancora ottenuto colture assai rigogliose e non sono per ora nel caso di verificare se non

sia possibile una sopravvivenza per maggior durata, avendo in corso gli esperimenti relativi.

Di più ho riscontrato per il cuore e per i vasi una sopravvivenza più lunga (13 giorni) di quella constatabile per questi organi negli embrioni mantenuti a 0° oppure a 15°-20°, nei quali essa non superò il 10° giorno; ho osservato inoltre in coltura frammenti di cuore pulsanti ancora dopo 9 giorni di permanenza in Ringer a 5°. Gli epiteli del mesonefro si sono pure accresciuti in coltura dopo un periodo di permanenza in Ringer (8 giorni), alquanto maggiore di quello riscontrato nell'uovo lasciato a 0° (5 giorni).

Per gli elementi del fegato, per i fibrociti del mesonefro, per gli elementi del cervello, dei muscoli scheletrici, e della milza ho invece dimostrato una sopravvivenza di minor durata di quella che ho constatato negli stessi tessuti negli embrioni posti a 0°.

Nella quasi totalità dei tessuti la durata della sopravvivenza in Ringer a 5°-10° è risultata (eccezione fatta per i muscoli scheletrici) superiore a quella verificabile per i tessuti lasciati « in situ » negli embrioni mantenuti a 15°-20°.

Sarebbe peraltro indubbiamente desiderabile il confronto dei dati riferiti nella tabella, con quelli che possono ottenersi ricercando per quanto tempo sopravvivono i vari tessuti negli embrioni esposti alle medesime temperature usate per le esperienze con il liquido di Ringer, cioè a 5°, e 10°; queste ricerche sono attualmente in corso e saranno oggetto di una Nota ulteriore, e così pure saranno riferiti i risultati degli esperimenti sui frammenti dei tessuti immersi nel Ringer a 0° e 20°.

A questo punto, per quanto ciò emerga del resto da quanto finora ho esposto, mi sembra dover porre segnatamente in rilievo il fatto della spiccata diversità di comportamento che manifestano i vari organi e tessuti, sui quali, dopo permanenza in Ringer, ho saggiato la durata della sopravvivenza. La cute è l'organo che anche in queste condizioni sperimentali presenta la più lunga sopravvivenza e questa si manifesta di egual grado per gli elementi connettivali e epiteliali che ne fanno parte. Per gli altri organi e tessuti si ripete un comportamento approssimativamente analogo a quello riscontrato nelle mie ricerche precedenti sugli embrioni mantenuti a 0°, ed a 15°-20°, potendosi rilevare come i vari tessuti ed i diversi elementi di uno stesso tessuto si dimostrino atti a sopravvivere in grado sensibilmente differente.

Occorre che faccia notare, come già per le precedenti ricerche, che il dato di sopravvivenza riferito per gli elementi di ciascun organo o tessuto, (eccetto per la cute) rappresenta il valore massimo da me riscontrato, valore rilevabile soltanto in alcuni esperimenti, avendosi però nel maggior numero dei casi una durata di sopravvivenza molto vicina a detto limite. Ed ancora è da notarsi che le colture sono tanto più rigogliose, quanto minore è stata la permanenza in Ringer dei frammenti in esame: ciò indica evidentemente che soltanto una parte del tessuto sopravvive nelle dette condizioni e perciò

la durata della sopravvivenza varia anche per le cellule dello stesso tipo di un dato organo, avendosi l'esaurimento progressivo di essa.

Mi sembra ora degno di notevole rilievo il fatto da me constatato (sugli espianti di cuore, di cute, e di muscoli scheletrici) che il risultato favorevole delle colture è strettamente legato alla aggiunta al mezzo colturale (plasma di pollo) del succo embrionale, e ciò si verifica tanto più nettamente quanto più ci si avvicina ai limiti di sopravvivenza nel liquido di Ringer, indicati nella tabella; così, ad es. ho avuto sempre assenza assoluta o scarsità grandissima di elementi migrati nelle colture in plasma puro di espianti di cute, allestiti da frammenti mantenuti per 15-16-21 giorni in Ringer, mentre coll'aggiunta di succo di embrioni le colture risultavano assai rigogliose. Parimenti lo stesso si è verificato per colture di cuore e di muscoli scheletrici ai rispettivi limiti di sopravvivenza. Si tenga d'altro canto presente che tale comportamento non si è prodotto, quando coltivavo frammenti di quelli stessi organi non immersi in Ringer, ma lasciati « in situ » nell'organismo embrionale collocato a bassa temperatura: allora (ad es. in un embrione mantenuto per 22 giorni a $+5^{\circ}$) le colture allestite in solo plasma differiscono soltanto in lieve grado da quelle coll'aggiunta di succo embrionale, risultando appena un po' meno rigogliose di esse, in quella misura che comunemente si riscontra nella usuale tecnica delle colture. Il fatto ora esposto mi pare stia ad indicare che per opera dell'immersione in Ringer ha luogo un lavaggio con progressiva sottrazione dai tessuti di sostanze inerenti al trofismo cellulare, sostanze che l'aggiunta di succo embrionale nel mezzo di colture è capace di restituire alle cellule, determinando così risultato favorevole nelle colture, in cui esso viene apportato. Questo risultato conferma quanto sull'azione del succo embrionario è stato dimostrato dalle recenti ricerche di Olivo e Gomirato.

In appoggio alla detta supposizione sta precisamente il fatto che nelle colture dei tessuti lasciati « in situ » nell'embrione posto a basse temperature, e che non hanno perciò subito il lavaggio, l'azione del succo embrionale si fa risentire in grado incomparabilmente minore. Tutto ciò mi sembra adunque possa confermare la veduta per cui il succo embrionale viene considerato come un apportatore di principi nutritivi (trefoni) nel mezzo di coltura.

Una particolarità che spesso si rileva nelle colture dei frammenti prima mantenuti in Ringer è quella di una tendenza alla migrazione in massa degli elementi dell'espianto, producendosi così nella zona d'invasione un cospicuo scivolamento di tessuto; ciò si verifica soprattutto nelle prime 24 ore di coltura, dopochè di solito gli elementi si individualizzano in gran copia, invadendo il coagulo.

L'osservazione a luce ordinaria ed in campo oscuro degli elementi migrati in coltura mi ha dimostrato che non esistono modificazioni degne di nota nella loro struttura; il condrioma appare con i caratteri generalmente

conosciuti, le mitosi sono numerose e decorrono con velocità normale. Solo in qualcuna delle colture, allestite da frammenti di tessuti, che avevano subito la permanenza in liquido di Ringer per il massimo riportato nella tabella, ho osservato elementi precocemente vacuolizzati e ripieni di granuli. È da notarsi infine che nelle prime 24 ore di coltura, eccezione quasi costante per la cute, nel caso che il periodo di permanenza in Ringer abbia raggiunto od avvicinato i limiti indicati nella tabella, non si ritrovano di solito che scarsi elementi migrati; essi peraltro divengono assai numerosi alla 36^a-48^a ora di colture ed oltre; questo fatto mi sembra essenzialmente da attribuirsi alla morte di un buon numero di elementi degli espianti, ed anche al fatto che per ciò stesso viene meccanicamente ritardata la fuoriuscita degli elementi sopravvissuti.

Recentemente Roffo⁽¹⁾ ha ricercato col metodo della coltivazione « in vitro » quale sia la durata della sopravvivenza di organi embrionali di pollo (pelle, cuore, milza) immersi in soluzioni isotoniche (liquido di Ringer, Locke-Lewis, Aman, Biedermann, ed altri) e contemporaneamente quella degli stessi organi lasciati « in situ » nell'embrione dopo la morte di esso. L'Autore non riferisce i dati sulla temperatura di esperienza; ha trovato che la permanenza nei liquidi isotonici è piuttosto dannosa per la vitalità dei frammenti, risultando così un massimo di sopravvivenza di 17 giorni, per i tessuti immersi nelle soluzioni, di 23 giorni per quelli lasciati « in situ » nell'embrione.

Ritengo prematuro per parte mia pronunciarmi in merito a questa diversità di comportamento, essendo però piuttosto propenso a credere, in base ai risultati finora da me ottenuti, che essa sia di grado scarsamente apprezzabile. Noto come dai miei esperimenti la durata della sopravvivenza per i frammenti di cute immersi nel Ringer risulta alquanto più lunga (21 giorni) di quella riferita come valore massimo da Roffo (17 giorni) e soprattutto ricordo il fatto, di cui Roffo non fa cenno, della netta diversità di comportamento dei vari organi e tessuti ed ancora dei diversi elementi di uno stesso tessuto.

Concludendo, dalle mie presenti ricerche risulta che la permanenza dei tessuti embrionali di pollo nella soluzione di Ringer a bassa temperatura (5°-10°) permette per un tempo relativamente lungo la sopravvivenza degli elementi dei tessuti; essa peraltro risulta di grado notevolmente diverso per ciascun tessuto. La permanenza nella soluzione di Ringer porta probabilmente alla progressiva sottrazione di sostanze trofiche, che dalle cellule diffondono nel liquido; infatti l'aggiunta di succo di embrione è condizione pressochè indispensabile per la coltivabilità dei tessuti prima lavati in Ringer, mentre in mezzo colturale risultante di solo plasma essi non si accrescono affatto o lo fanno in misura estremamente ridotta.

(1) A. H. ROFFO, *Nachweis des Ueberlebens der Gewebe nach dem Tode des Tieres durch Kulturen*; «Rév. Méd. lat. amer.», 14, 591-608, 1929.

Questo dimostra che il risultato negativo, che si ottiene lasciando per lungo tempo le colture in liquido di Ringer e coltivandole poi in solo plasma, non dipende dalla circostanza che le cellule erano morte, bensì dall'aver esse perduto la proprietà di accrescersi per l'assenza nel mezzo colturale di trefoni, i quali erano usciti dal tessuto durante la permanenza in Ringer. Ciò vale naturalmente sino ad un certo limite di tempo, perchè dopo un soggiorno più protratto in Ringer si producono processi autolitici nei tessuti e questi non possono essere più salvati neppure dalla presenza di trefoni.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Ricerche su trapianti omoplastici di abbozzi oculari su parti isolate di embrioni di Rana esculenta* ⁽¹⁾. Nota III di ALDO SPIRITO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Tutto l'esteso gruppo di ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata di Roma hanno dimostrato, con la più ampia documentazione, la grande importanza della costituzione zoologica degli esemplari usati nelle esperienze, per la riuscita di certi trapianti embrionali xenoplastici. L'analisi successiva di queste ricerche ha permesso d'individuare nel metabolismo vitellino le ragioni d'incompatibilità o di compatibilità, per lo meno negli stadi embrionali.

Le mie ricerche, di cui ho esposto i principali risultati nella Nota II ⁽³⁾ della quale la presente è la logica conseguenza, hanno dato una valida riprova di questi concetti, che meritano sempre più di essere indagati. In verità la letteratura zoologica non si è preoccupata soverchiamente di trovare le ragioni biologiche di queste incompatibilità che molte volte non si verificano operando in un senso e che invece si attuano in senso inverso. Per quel che riguarda l'abbozzo lentogeno voglio solo ricordare un accenno dell'Harrison e dall'essenza di esso si può vedere come del resto non sarebbe stato vano indagare a fondo certi fenomeni di costituzione zoologica, lo studio dei quali tanto frutto ha dato nell'Istituto di Anatomia comparata di Roma.

Nella Nota II, pubblicata in agosto di quest'anno, descrivevo come, per la prima volta, avessi potuto ottenere il differenziamento dell'abbozzo olfattivo e della vescicola ottica primaria di embrioni di *Triton taeniatus* trapiantati su regioni cefaliche anteriori e su bottoni codali, isolati, di embrioni di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1º novembre 1931.

(3) In questi «Rendiconti», vol. XIV, 1931.

Rana esculenta, nel tempo stesso che si aveva distruzione degli stessi abbozzi posti nelle stesse regioni di esemplari interi, o nella regione ventrale isolata. La ragione di questo diverso comportamento fu attribuita, in relazione ai concetti del Cotronei sul valore del metabolismo del vitello, appunto alla scarshezza delle sostanze derivanti da esso nella testa e coda isolate, laddove sono ricche nel ventre isolato e anche ricche, perchè apportate dalla precoce circolazione embrionale, nelle regioni cefaliche e caudali degli esemplari interi.

Queste ricerche aprivano così la via a nuove esperienze che, mentre sarebbero valse di controllo alle precedenti, avrebbero potuto saggiare il valore dell'isolamento delle parti sullo sviluppo delle vescicole ottiche primarie trapiantate omoplasticamente in embrioni di *Rana esculenta*, allo stadio di bottone codale. Si sarebbe potuto avere infatti una esatta valutazione delle potenze insite di sviluppo dell'abbozzo oculare di *Rana* e inoltre della capacità delle varie zone d'impianto, in quanto fornitrici o meno all'abbozzo stesso di ciò che si è dimostrato necessario per il suo normale accrescimento embrionale.

Le esperienze sono divise in tre gruppi a seconda delle regioni usate nel trapianto.

I Gruppo. — *Trapianto omoplastico delle vescicole ottiche primarie nella regione cefalica anteriore isolata e nel ventre isolato di embrioni privati di tutta la parte anteriore, abbozzi branchiali inclusi, di Rana esculenta.*

Delle due vescicole ottiche della *Rana* adoperata, una era posta nel ventre di esemplari a cui era stata tolta tutta la parte anteriore, abbozzi branchiali inclusi, e l'altra nella regione cefalica anteriore isolata di embrioni di *Rana esculenta*, sviluppatisi dalla stessa covata d'ova. Le coppie di esemplari sono state fissate 6 giorni (giugno) dopo l'operazione e cioè al termine del riassorbimento vitellino.

Gli abbozzi oculari nei tronchi isolati sono molto sviluppati con le retine differenziate in tutti gli strati. Lo strato delle cellule ganglionari è cospicuo e si è formato il nervo ottico. Manca sempre la cavità del vitreo occupata dal cristallino ottimamente sviluppato. Sono state eseguite varie misure sia dell'occhio che del cristallino e la media dei diametri per i primi è uguale a $377\ \mu$ e per i secondi a $144\ \mu$ ⁽¹⁾.

Per quel che riguarda l'abbozzo oculare trapiantato nella regione

(1) Voglio qui notare per inciso però che non intendo dare a queste cifre, come alle altre esposte nel lavoro, altro valore che di un semplice e approssimativo indice relativo tra le varie esperienze fatte; dato che la grandezza complessiva dipende da molti fattori non valutabili con assoluta precisione da poche misure. Le differenze di grandezza si potranno meglio apprezzare nel lavoro in esteso in preparazione, dove saranno riportate le fotografie delle coppie, eseguite con lo stesso ingrandimento.

cefalica anteriore isolata si può dire che si è avuto anche qui il differenziamento degli strati retinici, tuttavia lo strato delle cellule ganglionari è esiguo e manca il nervo ottico. Manca ancora la cavità del vitreo la quale, come per gli occhi trapiantati sul tronco, è occupata dal cristallino. Anche esso si è differenziato in capsula e nucleo con le relative fibre, ma la capsula si presenta molto assottigliata. Sia gli occhi che i cristallini sono pochissimo cresciuti e le medie dei diametri per i primi danno un valore di $223\ \mu$ e per i secondi un valore di $55\ \mu$.

II Gruppo. — *Trapianto omoplastico delle vescicole ottiche primarie nel bottone codale isolato, o no, di embrioni di Rana esculenta.*

Le operazioni venivano eseguite nella maniera seguente: su due esemplari di *Rana esculenta* della stessa covata d'ova venivano poste le vescicole ottiche primarie di uno stesso embrione donatore. Dopo avvenuta la cicatrizzazione, in un esemplare veniva separato il bottone codale, laddove l'altro esemplare veniva lasciato intero. Le coppie degli animali sono state fissate 5 giorni (luglio) dopo l'operazione.

All'esame microscopico delle sezioni seriali si è potuto notare per gli occhi sviluppatasi nelle code degli esemplari interi un differenziamento perfetto di tutti gli strati, per quanto lo strato delle cellule ganglionari si presenti esiguo e spesso interrotto, e ciò indipendentemente alla presenza, o no, del nervo ottico. Il cristallino si è sviluppato benissimo e in alcuni casi occupa tutta la cavità del vitreo, che in altri casi è invece presente. La media dei diametri dà per gli occhi il valore di $360\ \mu$ e per i cristallini $127\ \mu$.

Gli occhi sviluppatasi nella coda isolata sono poco cresciuti. All'esame microscopico delle sezioni si nota però l'avvenuto differenziamento delle retine in tutti gli strati e anche qui la scarshezza dello strato delle cellule ganglionari indipendentemente alla presenza, o no, del nervo ottico. I cristallini si sono ben differenziati e occupano totalmente la cavità del vitreo. La capsula di essi è un po' sottile rispetto a quella notata negli esemplari interi. La media dei diametri dà per gli occhi il valore di $233\ \mu$ e per i cristallini il valore di $72\ \mu$.

III Gruppo. *Trapianto delle vescicole ottiche nel bottone codale isolato insieme ad un segmento del tronco o nel bottone codale di esemplari interi.*

Le operazioni venivano eseguite nella stessa maniera come per il gruppo II, con la differenza che nell'isolamento di un bottone codale, veniva ad esso assegnato un segmento di tronco. Le coppie degli esemplari sono state 5 giorni (luglio) dopo l'operazione.

L'esame microscopico degli occhi sviluppatasi nelle code degli esem-

plari interi ha fatto notare, come era ovvio, tutto quello che è stato descritto nelle identiche operazioni del gruppo II. Le medie dei diametri sono circa le stesse.

Per quel che riguarda gli occhi sviluppatisi nelle code isolate insieme ad un segmento del tronco, l'indagine microscopica ha fatto notare un buon differenziamento degli strati retinici con il solito scarseggiare degli elementi dello strato ganglionare. Manca in genere il nervo ottico. Il cristallino occupante tutta la cavità del vitreo è molto ben sviluppato con capsula buona. La media dei diametri dà per gli occhi e per i cristallini rispettivamente i seguenti valori: $270\ \mu$ e $94\ \mu$.

Questi sono, brevemente esposti, i fatti osservati e le misure eseguite. La prima delle conclusioni, che si può ricavare dall'insieme delle esperienze, riguarda il potere d'autodifferenziamento posseduto dagli abbozzi oculari. E infatti dalle esperienze suesposte risulta che la *vescicola ottica primaria di Rana esculenta, trapiantata omoplasticamente, si sviluppa in un calice con le retine differenziate in tutti gli strati* (come avviene normalmente per gli innesti su embrioni interi) *anche se la sede d'impianto è in forma di una piccola porzione isolata (regione cefalica anteriore, bottone codale, tronco compresa la coda) di embrioni allo stadio di bottone codale*. Nei riguardi del cristallino si può dire quanto è stato concluso per le retine. Esso infatti mostra in tutti i casi (trapianti su embrioni interi e su regioni isolate) un normale differenziamento del nucleo e della capsula.

Molto importante si è dimostrato — ed era quello che mi ero proposto di verificare nelle presenti esperienze — il fattore isolamento delle zone d'impianto per quel che riguarda la grandezza, cui può giungere durante la vita embrionale dell'ospite, la vescicola ottica primaria di *Rana esculenta* trapiantata omoplasticamente. Dall'esposizione antecedente risulta infatti che *l'abbozzo oculare primario di Rana trapiantato se possiede in sé, a prescindere da qualsiasi influenza dei territori limitrofi d'impianto, il potere di autodifferenziarsi, non ha in sé altrettante sostanze che gli possano permettere di raggiungere, durante il periodo embrionale, la grandezza propria normale*; e che esse sostanze (nutritive) sono ad esso fornite dal vitello del tronco o meglio dalle sostanze derivanti dal suo metabolismo, il quale tanta importanza ha nella prima vita dell'individuo (Cotronei). E infatti dove esse sostanze sono mancate o quasi (bottone codale e regione cefalica anteriore, isolati) si è avuto uno scarso ingrandimento dell'abbozzo oculare trapiantato; uno sviluppo un po' maggiore nel bottone codale isolato insieme ad un segmento di tronco, ciò che ha permesso un apporto di prodotti vitellini; e invece uno sviluppo quasi normale dove le suddette sostanze erano a diretto contatto (esemplari mancanti della sola parte anteriore, abbozzi branchiali inclusi) o quando si erano perfettamente stabilite le normali condizioni circolatorie (coda degli esemplari interi).

Il valore dei decrementi nello sviluppo riportati per ogni singolo gruppo sono inoltre una migliore prova dell'esattezza delle conclusioni alle quali si era giunti per i trapianti xenoplastici su parti embrionali isolate. Si era detto che la distruzione degli abbozzi oculari e olfattori di *Triton* posti in *Rana esculenta* dipendeva appunto dalle sostanze del ricambio vitellino, sostanze che nelle esperienze omoplastiche si sono dimostrate necessarie per una crescita normale degli abbozzi. E infatti dove esse sono presenti (esemplari mancanti della sola parte anteriore, abbozzi branchiali inclusi, o qualsiasi regione degli esemplari interi) si è avuta distruzione dell'abbozzo oculare di *Triton* e un ingrandimento normale dello stesso abbozzo di *Rana*; dove sono state un po' minori (bottone codale isolato insieme ad un segmento di tronco) si è avuto distruzione, sebbene rallentata, dell'abbozzo di *Triton* e notevole ingrandimento dell'occhio di *Rana*; e infine dove sono state scarse (bottone codale o regione cefalica anteriore, isolati) si sono avuti i migliori differenziamenti dell'abbozzo di *Triton* e i più scarsi ingrandimenti di quello di *Rana*.

In conclusione queste ricerche hanno mirato a mettere in risalto le attività di sviluppi inerenti alle proprietà intrinseche di singoli abbozzi embrionali in funzioni di territori isolati del germe, con le riserve nutritive che ciascuno di essi territori possiede.

Queste ricerche meritano di essere estese.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Ricerche complementari sui trapianti di abbozzi embrionali su organismi già differenziati (esperienze sugli Anfibi)* ⁽¹⁾. Nota di O. MARCUCCI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Le presenti osservazioni mirano a completare una parte delle ricerche di Cotronei e Guareschi, già riassunte in questo periodico. Mi limito in questa Nota ad esporre soltanto i punti essenziali che più mi hanno interessato. Nelle ricerche compiute durante gli ultimi anni nell'Istituto di Anatomia comparata di Roma, operando con trapianti di abbozzi embrionali su altri embrioni di diversa posizione sistematica, come di abbozzi embrionali su organismi già differenziati, larve o adulti della stessa o di diversa specie, sono risultati sia fenomeni di possibilità di sviluppo, sia fenomeni di incompatibilità biochimica, che in certi casi, operando cioè con certe forme, si sono dimostrati immediati.

È proprio su alcune questioni di quest'ultimo caso che si riferisce la presente Nota. Nelle mie esperienze io ho esteso agli stessi e ad altri ab-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° novembre 1931.

bozzi lo studio già iniziato da Cotronei e Guareschi: ho infatti sperimentato trapiantando abbozzi di vescicole encefaliche, di occhi, di organi olfattori, di vestibolo boccale e faringe, di otocisti, di corda, di midollo spinale, di somiti e di pinna dorsale. Con questi abbozzi naturalmente sono capitati vasi sanguigni e mesenchima con i relativi derivati.

Ho fatto esperienze di trapianto di abbozzi embrionali su girini, che già si nutrivano, di *Rana esculenta* e soprattutto di *Bufo vulgaris*, come pure di abbozzi embrionali di *Axolotl* su larve della stessa specie.

Ho compiuto anche altre esperienze di trapianti eteroe xenoplastici, ma questi non hanno fatto altro che confermare o meglio precisare i risultati già conseguiti da Cotronei e Guareschi.

Ho cercato di ridurre al minimo possibile il trauma operatorio portato all'innesto usando sia la tecnica già usata dall'Holtfreter, sia quella già indipendentemente adoperata da Cotronei e Guareschi. I girini venivano addormentati con una debole soluzione di cloridrato di cocaina, e poi portati in acqua di fonte. In seguito veniva praticata loro una ferita in una qualsiasi parte del corpo, e, attraverso questa, il pezzo da trapiantare era portato nella sede prescelta per mezzo di una sottile pipetta di vetro (Holtfreter). In altri casi, invece, esso veniva introdotto nella ferita per mezzo della punta delle forbici (Cotronei e Guareschi).

Le esperienze sulla *Rana esculenta* hanno dimostrato la possibilità della differenziazione degli abbozzi trapiantati nei vari casi sperimentali (pezzi di encefalo e di midollo spinale, vestibolo boccale, occhi, vasi, mesenchima, cartilagine, ecc.). In molti casi queste differenziazioni sono perfettamente tipiche; in altri il differenziamento organologico è deficiente (occhi pieni, ecc.). Tenendo i girini in vita per molto tempo si notano processi degenerativi, ma bisogna osservare che mai nella *Rana esculenta* ho ottenuto comunicazioni vasali tra ospite e trapianto. I processi degenerativi che si incontrano sono quindi in rapporto, evidentemente, a processi di asfissia e di mancato nutrimento. Nelle esperienze sul *Bufo vulgaris* ho ottenuto differenziazioni di pezzi di encefalo, otocisti con i gangli otici⁽¹⁾, occhi con cristallino, organi olfattori, tessuto muscolare, pezzi di intestino cefalico, midollo spinale con i suoi gangli, corda, tessuto mesenchimatoso, vasi con sangue, cartilagine, pinna dorsale. Ho ottenuto moltissimi casi di perfetta differenziazione tipica.

Queste esperienze sono state condotte sul *Bufo vulgaris* con maggiore estensione che non sulla *Rana esculenta* e sulle altre forme, per uno scopo ben determinato.

È risultato infatti da ricerche di Cotronei e Guareschi, già annunziate in Note precedenti e che saranno ulteriormente svolte, che mentre abbozzi

(1) Differenziamenti di otocisti fra embrioni e organismi differenziati erano già stati ottenuti dal dottor Guareschi (ricerche ancora inedite).

di *Rana esculenta* e dello stesso *Bufo vulgaris* si possono differenziare sulle larve che già assumono nutrimento di *Urodeli*, invece gli abbozzi degli *Urodeli*, della *Rana esculenta* e dell'*Hyla arborea* non si sviluppano sul *Bufo*. Si poteva sospettare che ciò fosse dovuto a una proprietà generale degli umori della larva di *Bufo vulgaris* verso gli abbozzi embrionali in genere. Questo però non si verifica, come dimostrano esaurientemente le mie ricerche, le quali, pur avendo io usato quei medesimi abbozzi e nelle stesse condizioni di sviluppo che nelle esperienze combinate con altre forme avevano dato risultati costantemente negativi⁽¹⁾, conducono invece al perfetto differenziamento quando si usi come datore lo stesso *Bufo vulgaris*. Quindi si tratta proprio di incompatibilità biochimica fra il *Bufo*, e le altre forme finora sperimentate.

Nelle esperienze sul *Bufo vulgaris* ho notato anche, qualche volta, una molto maggiore resistenza a quella distruzione che segue normalmente alla differenziazione degli abbozzi trapiantati, che non nella grande maggioranza dei casi: l'esame microscopico mi ha dimostrato la grande vicinanza dei vasi dell'ospite al trapianto. Quasi certamente si sono stabilite delle comunicazioni vascolari, il che spiegherebbe la maggiore resistenza; per decidere però se si tratti di una normale circolazione tra ospite e vasi del pezzo trapiantato, sarà necessario ricorrere a esperienze sussidiarie.

Nei trapianti di abbozzi embrionali su larve già nutrentesi di Axolotl, ho ottenuto perfetto differenziamento istologico di pezzi di encefalo e di midollo spinale, di corda, di muscolatura, e di pinna dorsale. Anche il differenziamento organologico è, molto spesso, tipico.

(1) In trapianti tra abbozzi embrionali di *Axolotl* su girini di *Bufo vulgaris* Cotronei e Guareschi, come Cotronei e Spirito su embrioni, hanno parlato di una maggiore resistenza. Dev'essere solo così perchè anche le mie esperienze dimostrano l'impossibilità di ogni differenziazione.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Costituzione zoológica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti)*⁽¹⁾. Nota VIII⁽²⁾ di GIULIO COTRONEI e CELSO GUARESCHI, presentata dal Socio F. SILVESTRI.

La presente Nota continua la descrizione dei risultati conseguiti quest'anno e che si riattaccano ai problemi esposti nella Nota V⁽³⁾ e VI⁽⁴⁾.

III) *Esperienze di trapianti eteroplastici di abbozzi embrionali su girini che già si nutrivano (Anuri).*

Precedentemente⁽⁴⁾ abbiamo accennato a risultati sfavorevoli che nei trapianti eteroplastici di abbozzi embrionali in organismi differenziati (girini) si notano quando l'ospite sia il *Bufo vulgaris*. Questo fatto ci aveva colpito già dall'anno scorso⁽³⁾; ed abbiamo quindi voluto estendere tali ricerche per valutare l'azione dannosa esercitata da questa specie sui pezzi trapiantati.

Nelle operazioni eseguite nel nostro Istituto, è risultato finora che il *Bufo vulgaris* è il materiale più sfavorevole, tra tutti quelli usati, tanto nella forma embrionale che in quella larvale, e che come ospite, e come donatore, può riuscire dannoso, nei trapianti embrionali, per alcune forme. Evidentemente ciò ha rapporto con la resistenza dell'ospite; e ci piace rammentare, a questo proposito che in una antica esperienza del Giardina⁽⁵⁾, che purtroppo abbiamo vista passare inosservata, veniva posta in risalto, seppur brevemente, un'azione sfavorevole del *Bufo* negli innesti eteroplastici *Bufo-Discoglossus*. A noi queste azioni, per i trapianti eteroplastici, risultano confrontando tra loro le varie combinazioni sperimentali realizzate:

1. *Rana esculenta* (datore embrione) su *Bufo vulgaris* (ospite girino);
2. *Hyla arborea* (datore embrione) su *Bufo vulgaris* (ospite girino);
3. *Bufo vulgaris* (datore embrione) su *Rana esculenta* (ospite girino);
4. *Rana esculenta* (datore embrione) su *Hyla arborea* (ospite girino).

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1931.

(3) Questi « Rendiconti »; Nota V, vol. XII, 1930, p. 180.

(4) Questi « Rendiconti »; Nota VI, vol. XV, 1931, p. 44.

(5) *Ricerche sperimentali sui girini di « Anuri »*; « Mon. Zool. Ital. », n. 16, 1905.

I risultati di queste combinazioni si possono riassumere come segue:

1° Differenziazioni istologiche tipiche, con possibilità minori o maggiori di differenziazioni organologiche nei trapianti di *Bufo vulgaris* (embrione) su *Rana esculenta* (girino).

2° Possibilità di differenziazioni istologiche nei trapianti di *Rana esculenta* (embrione) su *Hyla arborea* (girino), per quanto con risultati inferiori al caso precedente, come dimostrano i processi degenerativi che si riscontrano anche dopo pochi giorni.

3° Fenomeni di blocco, cui, di regola, seguono processi distruttivi delle cellule, nei trapianti di *Rana esculenta* (embrione) su *Bufo vulgaris* (girino) e di *Hyla arborea* (embrione) su *Bufo vulgaris* (girino).

Ci mancano ancora esperienze di trapianti di *Hyla arborea* (embrione) su *Rana esculenta* (girino), che tutto lascia ritenere daranno buoni risultati, e di *Bufo vulgaris* (embrione) su *Hyla arborea* (girino) e quelle che ci proponiamo di compiere colle *Rane temporarie* e col *Bufo viridis* per esaurire il nostro lavoro di saggiare, col metodo dei trapianti eteroplastici, la costituzione zoologica degli *Anuri* di cui ci riuscirà possibile avere gli stadi embrionali e i girini.

Questi risultati, riguardanti il *Bufo vulgaris*, ci mostrano con maggiori particolari quanto già risultava nelle due Note precedenti; è possibile il trapianto xenoplastico di abbozzi di organi tra embrioni e girini di ordini differenti (*Rana esculenta* embrione su *Triton taeniatus* larva), ed è impossibile, in certi casi, il trapianto tra embrioni e girini di specie vicine (la stessa *Rana esculenta* embrione su *Bufo vulgaris* larva).

Non dobbiamo però considerare questi risultati come una contraddizione della ricerca sperimentale alle nozioni sistematiche; tale sarebbe, ed avrebbe certamente il suo valore, se il *Bufo vulgaris* permettesse lo sviluppo di abbozzi embrionali di una forma lontana, e non quelli di una vicina; questo caso però a noi non si è mai verificato. L'unica conclusione possibile è perciò che il *Bufo vulgaris* per tutte le forme, sia di famiglia che di ordine diverso, è tossico. Nulla sappiamo del suo comportamento verso le specie dello stesso genere (quale il *Bufo viridis*) e della stessa famiglia.

Le osservazioni precedenti conducevano logicamente alla verifica di un'altra questione: la tossicità del girino di *Bufo vulgaris*, come ospite, verso i tessuti embrionali, è proprio in funzione degli umori e dei prodotti metabolici dei suoi tessuti differenziati verso tutti i tessuti embrionali? Come si comporta il girino di *Bufo vulgaris* verso i tessuti embrionali della sua stessa specie? Questa questione, da noi già iniziata, è stata svolta nel nostro Istituto dalla sig.na Marcucci, che ne riferisce a parte. Però diciamo subito che gli abbozzi embrionali di *Bufo vulgaris*, trapiantati in girini della stessa specie, si differenziano tipicamente e perfettamente.

IV) *Esperienze di trapianti omoplastici di abbozzì embrionali su larve che già si nutrivano (Anuri e Urodeli).*

Ai risultati già descritti di perfetti differenziamenti di occhi e di tessuto nervoso in *Rana esculenta*, possiamo aggiungere quelli ottimi ottenuti con svariati abbozzì embrionali di organi in *Rana esculenta*, in *Bufo vulgaris* e in *Axolotl* dalla sig.na Marcucci.

V) *Esperienze di trapianto di abbozzì embrionali su larve in metamorfosi.*

Allo scopo di verificare le influenze ambientali sulle proprietà di auto-differenziamento degli abbozzì embrionali ci è sembrato opportuno verificare il comportamento dei medesimi abbozzì su cui avevamo già sperimentato, trapiantandoli in organismi in metamorfosi. Queste operazioni si sono compiute:

a) In trapianti omoplastici (*Bufo vulgaris* embrione su *Bufo vulgaris* in metamorfosi, e *Rana esculenta* embrione su *Rana esculenta* in metamorfosi).

b) In trapianti eteroplastici (*Rana esculenta* embrione su *Hyla arborea* in metamorfosi). Queste operazioni purtroppo sono andate a male, quindi non sappiamo se si ottengano risultati positivi o negativi (intendendo noi come negativi i casi in cui è impossibile il differenziamento). Esse saranno naturalmente ripetute nelle varie combinazioni su cui sarà possibile sperimentare.

c) In trapianti xenoplastici (*Rana esculenta* embrione su *Triton taeniatus* in metamorfosi) di cui abbiamo già riferito nelle Note precedenti.

Finora non abbiamo creduto, dati i risultati sfavorevoli sempre ottenuti coi girini, di fare operazioni eteroplastiche e xenoplastiche usando come ospiti le larve in metamorfosi di *Bufo vulgaris* e *Hyla arborea*, ma esse saranno eseguite in una prossima estensione del lavoro.

Dei trapianti del tipo a) abbiamo ottenuto differenziazioni tipiche di tessuto nervoso, occhi, mesenchima, cartilagine, vasi sanguigni, parti della faringe in *Bufo vulgaris*; nella *Rana esculenta* i nostri reperti furono fissati quando mostravano già avanzati segni di degenerazione. Queste brevi osservazioni mirano soltanto a far rilevare la possibilità del differenziamento anche nelle condizioni umorali della metamorfosi (sostanze citolitiche in circolazione).

VI) *Esperienze di trapianto di abbozzì embrionali su organismi adulti.*

Le nostre esperienze ci hanno dimostrato che abbozzì embrionali di *Rana esculenta* trapiantati in adulti della stessa specie si differenziano in maniera tipica,

Esperienze di trapianti xenoplastici di embrioni di *Urodeli* su *Anuri* adulti sono stati fatti adoperando come donatore il *Triton cristatus* e come ospite l'*Hyla arborea*. I risultati raggiunti, per quanto non numerosi, confermano perfettamente quanto abbiamo ottenuto usando come ospiti i girini della stessa *Hyla arborea* circa lo stadio dell'embrione datore. Abbiamo cioè ottenuto molto maggiore resistenza dei tessuti, e forse possibilità di qualche ulteriore svolgimento di processi differenziativi, usando come datori gli stadi più avanzati. Evidentemente queste osservazioni rientrano nei problemi del metabolismo vitellino degli abbozzi trapiantati e della resistenza relativa (Cotronei).

Le operazioni di trapianti omoplastici su *Tritoni* adulti ci hanno sempre dato risultati negativi; con tutta probabilità ciò è dovuto a danneggiamenti subiti dai pezzi trapiantati per ragioni meccaniche.

RIASSUMENDO. — Se diamo un rapido sguardo di insieme alle ricerche compiute, possiamo innanzi tutto osservare che svariati abbozzi embrionali sottratti alle loro normali correlazioni, anche quando siano impiantati in organismi già differenziati, possono svilupparsi in maniera tipica e possono anche evolversi nei loro processi organologici. Questa conclusione non è certamente nuova e non è già per la verifica di tale processo che abbiamo compiuto queste ricerche.

È da lunghissimo tempo che si è cercato, col genere di esperienze da noi compiute, di far luce sugli innumerevoli problemi che riguardano la genesi dei tumori. Vana fatica questa, perchè tali problemi si mostrarono molto più complicati proprio quando queste ricerche furono estese! Tessuti embrionali possono condurre a differenziazioni tipiche e in molti casi anche a differenziazioni atipiche, ma in verità nessun fatto lascia pensare che queste ultime, almeno nel caso dei trapianti eseguiti sugli Anfibi, abbiano nulla a che fare con le proprietà dei tumori. Forse queste differenziazioni atipiche possono soltanto significare che nelle cellule trapiantate sono venute meno o sono state neutralizzate alcune sostanze che normalmente spingono le cellule a una differenziazione specifica di determinati tessuti; fors'anche possono essere dovute ad una incompleta o cattiva utilizzazione delle sostanze vitelline che potrebbero essere state alterate. Sta di fatto che alcune esperienze possono condurre, adoperando lo stesso materiale, ora a risultati di differenziazioni tipiche, ora ad altri di differenziazioni atipiche, le quali ultime spesso hanno i caratteri di epiteli primitivi. Evidentemente allora i differenti risultati sono da riferire a traumi subiti dagli abbozzi trapiantati, o a particolari condizioni dell'ospite, o alla sede dell'impianto.

La conclusione dei differenziamenti tipici che si hanno nei trapianti al di fuori delle correlazioni embrionali, non può avere un carattere generale che prescinda dalle forme zoologiche studiate, nè dallo stadio del pezzo trapiantato in funzione della condizione del vitello contenuto; ecco i compiti

principali delle nostre ricerche, che hanno voluto integrare quelle già in corso nel nostro Istituto dei trapianti di abbozzi embrionali in embrioni. Vi sono degli organismi (*Bufo vulgaris*) che non permettono il differenziamento degli abbozzi embrionali in essi trapiantati, a meno che tali abbozzi non appartengano, almeno nei risultati finora raggiunti, ad embrioni della loro stessa specie⁽¹⁾; in tali casi si tratta quindi di una evidente incompatibilità zoologica.

Interessanti sono stati i reperti finora ottenuti sull'*Hyla*. Mentre l'embrione di tale *Anuro* mostrò (Cotronei e Spirito), in contrapposizione ai risultati già ottenuti sulla *Rana esculenta*, il differenziamento degli abbozzi embrionali di *Urodeli* in esso trapiantati, nel girino e nell'adulto noi non siamo riusciti ad ottenere lo stesso risultato; operando però con abbozzi in condizioni uguali a quelli usati nel nostro Istituto dal Perri⁽²⁾ abbiamo ottenuto nel girino e nell'adulto di *Hyla arborea* risultati simili a quelli che quest'ultimo ricercatore andava estesamente studiando sull'embrione di *Rana esculenta*.

Dunque non soltanto casi di incompatibilità zoologica, ma anche casi di incompatibilità zoologica a seconda dello stadio e quindi delle diverse e successive condizioni biochimiche.

Queste esperienze permettono di mettere in risalto, coll'evidenza dei mezzi della Morfologia sperimentale, soltanto alcuni lati delle questioni, o meglio ancora ci lasciano scorgere l'esistenza di tali questioni; è soltanto però con l'ausilio degli altri metodi biologici che possiamo sperare di illustrare più a fondo i problemi che ci si sono rivelati. Così sarà da indagare, con tali metodi biologici, il perchè della facilità dei trapianti di *Anuri* in *Urodeli*, e delle gravi incompatibilità che abbiamo invece rilevato nei trapianti inversi: cosa che può ricordarci altri fenomeni biochimici.

Nelle nostre esperienze l'esito dei pezzi trapiantati è generalmente la distruzione, ma i vari risultati debbono essere meticolosamente scaverati, e questo è possibile solo con esperienze comparative, confrontando i diversi risultati. Vi sono certamente distruzioni dovute a traumi sofferti dal pezzo trapiantato nella sede in cui capita, non solo per l'operazione ma soprattutto a causa degli insulti continui che ai tessuti embrionali possono recare organi dotati di contrazione (stomaco, intestino, muscolatura) o particolari condizioni di lisi. Questi casi naturalmente non influiscono sulle conclusioni che il ricercatore deve trarre.

Vi sono altre distruzioni, che generalmente capitano dopo il differenziamento, dovute a condizioni di asfissia e di mal nutrizione dei tessuti sviluppatisi nell'organismo ospite; è questa una disposizione generale, quando

(1) Non riteniamo in contraddizione con questa conclusione generale quanto abbiamo riferito nella Nota precedente sul trapianto *Axolotl* (embrione) su *Bufo vulgaris* (girino), anche per le ulteriori osservazioni compiute dalla sig.na Marcucci.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XII, 1930, p. 66 e vol. XIV, 1931.

pezzi embrionali vengono impiantati in tessuti differenziati. Infatti è molto difficile che essi possano venire irrorati dal sangue dell'ospite per la reazione che l'ospite stesso esercita verso gli abbozzi trapiantati.

Quando però non si perdano di vista tutte queste possibilità di risultati sperimentali, non stancandosi di estendere e di approfondire le ricerche, non è impossibile scorgere nuovi dati che dimostrano l'interesse delle questioni affrontate.

Fisiologia. — *Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti albini ovariectomizzati*⁽¹⁾. Nota I⁽²⁾ di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le ricerche eseguite per studiare l'azione degli organi sessuali sul ricambio non hanno dato risultati concordi. Il problema è stato abordato da diversi punti di vista nell'uomo e negli animali, nei quali ultimi si sono studiate le conseguenze della castrazione o della somministrazione di estratti di organi sessuali prima e dopo l'intervento operatorio. Alcune osservazioni parlano per la diminuzione del consumo di O dopo la castrazione (Zuntz, Loewy e Richter, Korenchevsky, Paechtner, de Vita, Shebuneff, Murlin e Bailey, Kojima, Eckstein e Grafe, Heymans, Klein etc.); altre invece di Lüthje, Klein, Bertschi, Bacq etc, escludono un'azione diretta.

Così anche la somministrazione di estratti di ghiandole sessuali in alcuni casi ha fatto aumentare il ricambio materiale (Zondeck e Bernhard); in altri si sono mostrati inattivi (Bertschi etc.)

Osservazioni analoghe si possono in gran parte ripetere pel ricambio delle proteine, dei grassi, degli idrati di carbone e per il ricambio minerale.

Con le presenti ricerche si è cercato di condurre possibilmente le condizioni degli animali in esperimento ad un comune stato fisiologico e si è studiato il decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti castrati o no.

Le ricerche furono eseguite su ratti adulti di peso medio di grammi 170. Essi furono alimentati in un primo tempo con pane, formaggio e verdura a volontà. In un secondo tempo, durante la rialimentazione, con la seguente miscela alimentare: Amido di mais grammi 7, pane grattato gr. 10, formaggio gr. 2, ovoalbumina gr. 2, rosso d'uovo gr. 2. Il tutto si faceva cuocere lentamente in 60 cmc. di acqua potabile, dopo la cottura si aggiungevano un grammo di cavolo, gr. 0.2 di lievito di birra e gr. 0.05 di sali di Osborne così composti: Na Cl. gr. 100, $(\text{Po}^4)^2 \text{Ca}^3$ gr. 110, Citrato di Mg. gr. 65, K Cl. gr. 15, Citrato di Fe gr. 10, Iodio gr. 0.05, I K. gr. 0.10. Il cibo fu somministrato a volontà.

(1) Le notizie sull'azione degli ormoni sessuali sul ricambio sono state in parte desunte dalla memoria di W. Raab: «Hormone und Stoffwechsel» alla quale si rimanda per le indicazioni bibliografiche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1931.

I risultati degli esperimenti furono i seguenti:

RATTO A. — Femmina adulta del peso iniziale 195 e dell'età di 6 mesi. Dal 29-7-1928 al 3-8-1928 fu tenuta in laboratorio e alimentata a volontà con pane verdura e formaggio.

Ingerì in media cc. 25 di acqua, gr. 7 di pane e gr. 2 di formaggio e cavolo gr. 16, pari a calorie 31.50 al giorno e a calorie 0.17 gr. e giorno in media. Diminui da gr. 195 a gr. 182. Emise in media cc. 4 di urine e 28 gr. di feci. Il 3 agosto fu posto a digiuno; pesava gr. 182. L'11 agosto fu trovato morto; pesava gr. 125 era cioè diminuito del 36.8% del peso iniziale. All'autopsia non si notò nulla di patologico all'infuori del noto reperto dell' inanizione.

RATTO B. — Femmina adulta del peso iniziale di gr. 165 e dell'età di mesi 5. Tenuta in laboratorio dal 29-7-1928 al 3-8-1928, fu alimentata a volontà con pane, formaggio e verdura, che ingerì nelle proporzioni medie rispettive di gr. 8; 1.5; 1.6 pari a calorie 32.06 e a calorie 0.2 per gr. di peso e giorno. Bevve acqua cc. 25 ed eliminò urine cc. 4, feci gr. 1; diminui di peso da gr. 165 a 155. Il 3 agosto il ratto fu posto a digiuno, dopo 8 giorni pesava gr. 109. Aveva perduto cioè il 29.1% del peso iniziale. Durante il digiuno le condizioni dell'animale furono buone. Dall'11 agosto al 6 settembre l'animale ingerì in media acqua cc. 18.8; pane gr. 7.7; formaggio gr. 1.2; verdura gr. 14.7; emise orine cc. 5.1; feci gr. 0.46. In complesso il cibo fu ingerito in proporzione di calorie 29.61 al giorno, pari a calorie 0.22 per grammo di peso e giorno.

RATTO C. — Femmina di gr. 179. Il 3 settembre fu ovariectomizzato. Il 7 successivo, fu posto a digiuno. Dopo 8 giorni era diminuito del 27,3 % fino a gr. 130. Durante il digiuno bevve in media cmc. 13 di acqua ed eliminò orine cmc. 5,3, feci gr. 0.27. Dal 15 al 17 settembre fu rialimentato con pane, formaggio e verdura. Dal 18 al 26 con la miscela alimentare suddescritta, che ingerì in media in quantità corrispondente a gr. 16, pari a calorie 49.6 e a calorie 0.3 per gr. di peso e giorno. Bevve cmc. 7.7 di acqua, eliminò cmc. 21 di orine, feci gr. 0.6. In dieci giorni riacquistò il peso perduto e fu posto di nuovo a digiuno. In 7 giorni l'animale è diminuito del 35 % da gr. 180 a gr. 125. Bevve in media cmc. 6 di acqua ed eliminò orine cmc. 2.6, feci gr. 0.25. Il 4 ottobre il ratto fu alimentato con la miscela descritta e dopo soli 9 giorni riacquistò il peso iniziale. Allora mostrò modica dispnea. Ingerì progressivamente minore quantità di cibo e diminuì di peso fino a gr. 175 dopo 6 giorni. Ingerì dal 4 al 15 ottobre in media gr. 14 di miscela alimentare, pari a calorie 44, 6 al giorno e a 0.28 per grammi di peso e per giorno. Bevve acqua cmc. 6 al giorno, eliminò orine cmc. 18, feci gr. 0.67.

RATTO D. — Il 3 settembre fu laparatomizzato per procedere all'ovariectomia. Ma l'operazione non fu eseguita perchè si trovò l'utero gravido. Il 1° settembre il ratto pesava gr. 240, dopo l'operazione si osservò una lieve diminuzione di peso che raggiunse i gr. 232 il 6 settembre, poi il ratto aumentò fino al 15 settembre, quando pesava gr. 277. Durante questo periodo l'animale ingerì in media acqua cmc. 25, pane gr. 12.3, formaggio gr. 1.8, verdura gr. 15.9. Eliminò orine cmc. 12,8, feci gr. 0.8. Il 15 settembre l'animale fu posto a digiuno. Pesava gr. 277. Il 17 il ratto partorì due piccoli ratti del peso complessivo di gr. 8.5. Il 16 settembre il ratto pesava gr. 263, il 17 gr. 222, aveva cioè perduto il 18 % del peso. Il 21 settembre pesava gr. 188, la diminuzione del peso, quindi, era aumentata al 32,1 %. Durante questo periodo il ratto bevve in media cmc. 8,6 di acqua, eliminò orine cmc. 5,3, feci gr. 0.2. Il 24 settembre fu rialimentato con la miscela descritta, della quale ingerì in media gr. 17, bevve cmc. di acqua 5,8, eliminò in media orine cmc. 25, feci gr. 0.57. Il cibo fu ingerito in proporzione di calorie 0.26 per gr. e per giorno. Il giorno 30-9-1928 il ratto pesava gr. 220.

RATTO E. — Dal 10 settembre al 14 1928 fu alimentato con pane, formaggio e verdura, e crebbe da gr. 221 a gr. 231. Il 14 settembre fu posto a digiuno e dopo 7 giorni perse il 32.4 %, fino a gr. 150.

Bevve in media cmc. di acqua 19, eliminò urine cmc. 5.5, feci 0.18. Il 24 settembre il ratto fu rialimentato con la miscela descritta della quale ingerì in media gr. 17 pari a piccole calorie 0.31: bevve in media cmc. 5.9 di acqua ed eliminò cmc. 28 di urine e gr. 0.58 di feci. In 8 giorni il peso del ratto salì a gr. 185. Il 20 settembre il ratto fu ovariectomizzato, il 5 ottobre la ferita era completamente rimarginata e il ratto che pesava gr. 188 fu posto a digiuno; al 4° giorno l'animale fu trovato morto, dopo aver perduto il 29.7% del peso, fino a gr. 132. Alla autopsia si osservò qualche focolaio di bronco-polmonite.

RATTO F. — Il 16 agosto il ratto pesava gr. 154. Fu alimentato con pane e formaggio e verdura. Il 31 pesava gr. 186; il 17 settembre pesava gr. 244, e fu posto a digiuno. Dopo 4 giorni l'animale partorì 9 ratti del peso complessivo di gr. 42.

Rialimentato il 27 settembre il ratto pesava gr. 211, e fu sottoposto a digiuno. Dopo 7 giorni era diminuito fino a gr. 148, cioè aveva perduto il 29.8%. Il 4 ottobre fu rialimentato con la miscela alimentare che ingerì in media in proporzione di gr. 19.4 al giorno pari a piccole calorie 0.32 per gr. e giorno. Dopo 11 giorni l'animale aveva riacquisito il peso perduto; aveva ingerito in media cmc. 4.7 di acqua ed eliminato urine cmc. 13, e feci gr. 0.9.

RATTO H. — Il 30 settembre fu ovariectomizzato. Pesava gr. 175. Dopo 5 giorni era diminuito di soli 3 gr. e poichè la ferita laparatomica era in buone condizioni di cicatrizzazione il ratto fu posto a digiuno. L'11 ottobre pesava gr. 119, aveva cioè perduto il 30.7% del peso iniziale. L'11 ottobre fu rialimentato con la miscela della quale ingerì in media gr. 16. Il 21 aveva riacquisito il peso perduto. Il cibo fu ingerito in proporzione di piccole calorie 0.32. Il ratto bevve in media cmc. 7.15 di acqua ed eliminò cmc. 21.8 di urine e gr. 0.66 di feci.

Ratto A 1° digiuno			Ratto B 1° digiuno			Ratto C 1° digiuno			Ratto D		
Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %
3-8	182	—	3-8	155	—	7-9	179	—	15-9	277	—
4-8	173	4.2	4-8	143	7.7	8-9	170	5.0	16-9	263	5.0
6-8	160	12.08	6-8	133	14.7	10-9	160	10.6	18-9	212	23.1
8-8	147	19.2	8-8	123	20.6	12-9	153	14.5	20-9	195	29.6
10-8	137	24.7	10-8	111	28.3	14-9	142	20.6	21-9	188	32.1
11-8	125	36.8	11-8	109	29.1	15-9	130	27.3			
Morto			2° digiuno			2° digiuno					
			7-9	152	—	27-9	180	—			
			9-9	135	11.1	29-9	156	13.3			
			11-9	120	21.0	1-10	145	19.4			
			13-9	102	32.8	3-10	131	27.2			
			Morto			4-10	125	30.5			

Ratto E Digiuno in ratto femmina per controllo			Ratto F Digiuno			Ratto H Digiuno in ratto ovariecto- mizzato il 30 settembre		
Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %
14-9	231	—	17-9	244	—	5-10	172	—
16-9	203	12.1	20-9	214	12.3	7-10	148	13.3
18-9	184	20.3				9-10	153	22.1
20-9	168	27.2				11-10	119	30.7
Ovariectomizzato il 3-9 2° digiuno			2° digiuno					
5-10	188	—	27-9	211	—			
7-10	154	18.0	29-9	185	12.2			
9-10	132	29.7	2-10	166	21.3			
			4-10	148	29.8			
Morto								

[illegible]

Ratto F Miscela alimentare			Ratto F Miscela alimentare*			Ratto C 2 ^a rialimentazione con miscela alimentare			Ratto H Miscela alimentare		
Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %	Data	Peso gr.	Perdita %
20-9	214	12.3	1-10	164	22.2	5-10	139	22.7	12-10	142	17.4
21-9	197	19.2	6-10	175	17.6	6-10	145	19.4	13-10	145	15.6
22-9	206	15.5	8-10	190	9.9	8-10	159	11.6	14-10	152	11.6
24-9	198	22.9	10-10	202	4.2	10-10	160	11.1	15-10	158	8.1
25-9	200	18.0	12-10	205	2.8	12-10	171	5.0	17-10	159	7.5
26-9	219	10.2	14-10	208	1.4	14-10	170	5.5	19-10	167	2.9
27-9	211	13.5	19-10	165	8.3	21-10	167	7.2	21-10	172	2.9

Esaminando i dati su esposti si osserva che il decorso del digiuno non fu sostanzialmente diverso nei ratti normali e nei ratti ovariectomizzati. Questi ultimi resistettero o un po' più o un po' meno dei primi e in ogni caso le differenze non furono superiori a quelle che si osservano spesso tra ratti normali ad inanizione completa. Così anche non vi furono differenze essenziali nel decorso della rialimentazione. I ratti H, C, ovariectomizzati, dopo un digiuno fino alla perdita del 30 % del peso iniziale, durante la rialimentazione riacquistando il peso con una ritmo poco diverso da quello dei ratti di D e E, rialimentati dopo un uguale perdita di peso. Durante la rialimentazione il ratto E normale ha ingerito cibo nelle stesse proporzioni dei ratti C e H operati. Questi risultati fanno pensare o che le ovaie durante il digiuno e la conseguente rialimentazione cessano di esercitare l'azione sul ricambio che numerose ricerche hanno posto in evidenza, oppure che gli animali non abbiano risentito della mancanza degli organi asportati perchè i tessuti possedevano ancora ormoni di origine ovarica, precedentemente accumulati. A questa ipotesi si può pensare perchè gli esperimenti furono eseguiti subito dopo la cicatrizzazione della ferita dovuta all'intervento operatorio.

Fisiologia. — *Modificazioni dei tassi glicemico e idremico in seguito a somministrazione di glicosio e acqua.* Nota ⁽¹⁾ di A. GALAMINI e E. SERIANNI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Ricerche ⁽²⁾ eseguite somministrando glicosio a dosi frazionate di grammi 2.5-5 in soggetti sani avevano precedentemente mostrato che, entro certi limiti, il tasso glicemico non si modificava e avevano fatto pensare che la somministrazione frazionata della sostanza potesse essere un mezzo d'indagine utile per saggiare la capacità dell'organismo a mantenere costante il tasso glicemico. Con le presenti ricerche si è in parte ritornati sull'argomento e si è inoltre tenuto conto delle variazioni del tasso idremico.

Già Marx, Mayer-Bish avevano riferito di modificazioni del tasso idremico in seguito a ingestione di idrati di carbonio e Siebeck e Marx-Pellegrini avevano osservato che le variazioni del contenuto in acqua del sangue non corrispondevano all'acqua ingerita.

Nelle presenti ricerche si somministrarono a tre soggetti giovani sani nelle ore del mattino a digiuno 60 grammi di glicosio in 1, 3 e 6 volte, ogni 15'. Si misurarono i tassi idremico e glicemico con i rispettivi metodi di Bang. I risultati sono i seguenti:

GR. LAMANNA 13-8-1930.

Ore	9.30	11	11.40	12.50
Idremia	79 %	77.33 %	77.35 %	75.17 %
Glicemia	0.65	0.65	0.75	0.75

S. SBARIGIA 13-8-1930.

Ore	8.35	9.40	10.55	11.45	12.55
Idremia	78.58 %	79.16 %	79.38 %	79.35 %	79.73 %
Glicemia	0.75	0.75	0.75	0.75	0.69

A. GALAMINI 23-8-1930.

Ore	8.45	9.45	10.40	11.40	12.40
Idremia	79.65 %	79.92 %	80.11 %	80.69 %	79.69 %
Glicemia	0.85	0.85	0.80	0.85	0.85

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1931.

(2) A. GALAMINI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », vol. III, fasc. 4, 1928.

GR. LAMANNA 26-8-1930.

Alle ore 8.50 gr. 30 di glicosio in 150 cc. di acqua per os.

Ore	8.45	9	9.40	10.10	10.40	11.20
Idremia	77.63 ‰	77.63 ‰	77.66 ‰	77.98 ‰	77.07 ‰	77.34 ‰
Glicemia	1.05	1.29	1.10	1.05	0.94	0.91

GR. LAMANNA 30-8-1930.

Alle ore 7.45 gr. 60 di glicosio in 200 cc. di acqua per os.

Ore	7.40	7.55	8.15	8.45	9.15	9.45	10.15
Idremia	78.87 ‰	79.44 ‰	78.69 ‰	79.22 ‰	79.68 ‰	79.36 ‰	77.82 ‰
Glicemia	0.93	1.19	1.29	1.23	1.03	0.93	0.75

GR. LAMANNA 2-9-1930.

Alle ore 8.25, 8.40, 8.55 gr. 20 di glicosio in 68 cc. di acqua.

Ore	8.20	8.35	8.50	9.05	9.25	9.55	10.25	10.55
Idremia	78.14 ‰	78.29 ‰	78.98 ‰	78.07 ‰	77.79 ‰	88.09 ‰	76.86 ‰	76.80 ‰
Glicemia	0.94	0.94	3.5	1.58	1.32	1	1.1	

GR. LAMANNA 6-9-1930.

Alle ore 8.40, 8.50, 9, 9.10, 9.20, 9.30 gr. 10 di glicosio in 33-34 cc. di acqua.

Ore	8.35	8.45	8.55	9.05	9.15	9.25	9.35
Idremia	77.29 ‰	77.64 ‰	77.69 ‰	77.71 ‰	78.20 ‰	77.84 ‰	78.29 ‰
Glicemia	0.93	0.93	0.96	1.03	1.28	1.13	0.96
Ore	9.55	10.25	10.55	11.25			
Idremia	78.38 ‰	78.11 ‰	77.18 ‰	77.68 ‰			
Glicemia	1.03	0.86	0.69	0.96			

S. SBARIGIA 30-8-1930.

Alle ore 7.35 gr. 60 di glicosio in 200 cc. di acqua per os.

Ore	7.30	7.45	8.05	8.35	9.05	9.35	10.05
Idremia	79.58 ‰	80.12 ‰	79.34 ‰	79.81 ‰	79.76 ‰	79.81 ‰	79.59 ‰
Glicemia	0.75	0.82	1.40	1.40	0.93	0.95	0.82

S. SBARIGIA 2-9-1930.

Alle ore 8.20, 8.35, 8.50 gr. 20 di glicosio in 68 cc. di acqua.

Ore	8.15	8.30	8.45	9	9.20	9.50	10.20	10.50
Idremia	78.43 ‰	78.72 ‰	78.48 ‰	78.07 ‰	78.53 ‰	78.43 ‰	78.05 ‰	78.68 ‰
Glicemia	0.91	1.01	1.34	1.54	1.58	1.02	1.01	1

S. SBARIGIA 4-9-1930.

Alle ore 8.40, 8.50, 9, 9.10, 9.20, 9.30, 9.40 gr. 10 di glicosio in 32-34 cc. di acqua.

Ore	8.35	8.45	8.55	9.05	9.15	9.25	9.35
Idremia		78.45 %	78.63 %	78.67 %	78.74 %	78.46 %	78.51 %
Glicemia	1.05	0.98	0.95	0.98	1.12	1.19	1.28
Ore	10.05	10.35	11.05	11.35			
Idremia	80.25 %	79.65 %	79.64 %	79.06 %			
Glicemia	1.28	1.05	1.19	0.95			

A. GALAMINI 9-9-1930.

Alle ore 8.25 gr. 60 di glicosio in 200 cc. di acqua.

Ore	8.20	8.35	8.55	9.20	9.45	10.10	10.35
Idremia	80.33 %	80.71 %	80.33 %	80.39 %	81.13 %	80.77 %	81.15 %
Glicemia	1.01	1.11	1.48		1.51	1.11	0.80
Ore	11	11.25					
Idremia	81.31 %	81.02 %					
Glicemia	0.80	0.83					

A. GALAMINI 11-9-1930.

Alle ore 9.05, 9.20, 9.35 gr. 20 di glicosio in 68 cc. di acqua.

Ore	9	9.15	9.30	9.45	9.55	10.15	10.40
Idremia	80.20 %	80.24 %	80.53 %	81.13 %	80.27 %	80.56 %	81.27 %
Glicemia	0.90	1.01	1.34	1.48	1.51	1.37	0.80
Ore	11.05	11.30					
Idremia	80.22 %	%					
Glicemia	0.80	0.77					

A. GALAMINI 17-9-1930.

Alle ore 8.35, 8.45, 8.55, 9.05, 9.15, 9.25 gr. 10 di glicosio in 32-33 cc. di acqua.

Ore	8.30	8.40	8.50	9	9.10	9.20	9.30
Idremia	79.10 %	79.54 %	78.98 %	77.94 %	79.04 %	78.88 %	78.90 %
Glicemia	0.88	0.88	1.07	1.1	1.39	1.42	1.6
Ore	9.50	10.20	10.50				
Idremia	79.23 %	79.55 %	78.86 %				
Glicemia	1.39	0.88	0.75				

I risultati suesposti mostrano che, somministrando glicosio (60 gr. in 200 cc. d'acqua a dosi frazionate) entro certi limiti si ha come conseguenza un aumento del tasso glicemico maggiore di quando il glicosio è somministrato in una sola volta. Aumentando il frazionamento a ingestione di dosi successive non segue l'aumento del tasso glicemico o si osserva ipoglicemia; insistendo nelle somministrazioni l'iperglicemia è sempre inferiore a quella osservata con la ingestione massiva della sostanza. La dose di glicosio che, somministrata più volte a uguale distanza di tempo, non fa variare il tasso glicemico o dà anche ipoglicemia è diversa per i diversi soggetti. Il fatto che frazionando le dosi il tasso glicemico aumenta più che con una sola ingestione parrebbe indicare che, per la speciale modalità di somministrazione diminuisca l'attività di uno dei fattori, probabilmente l'epatico, che concorrono a mantenere costante il glicosio nel sangue. D'altro canto l'ipoglicemia, che talvolta si osserva senza precedente iperglicemia, indica la esistenza di meccanismi riflessi di regolazione chimica, che non hanno per stimolo adeguato aumenti glicemici del sangue. Alla esistenza di questi meccanismi riflessi fanno pensare anche alcune variazioni osservate del tasso idremico.

La somministrazione di 60 gr. di glicosio in 200 cc. di acqua o non fece variare il tasso idremico o lo fece aumentare di $+0.38$ a 0.54 e poi subito dopo diminuire di -0.38 a 0.78 : con la somministrazione in tre volte gli aumenti variarono da $+0.29$ a $+0.90$, le successive diminuzioni da -0.65 a -0.91 . Con la somministrazione in 6 volte in L. G. si ebbe un aumento di 1% circa, in Sb. G. un aumento di $+1.8$, seguito da diminuzione di -1.19 ; in G. A. una diminuzione di -1.6% . In generale in corrispondenza del maggiore aumento del tasso glicemico si è osservata la diminuzione maggiore del tasso idremico: l'aumento del tasso idremico ha coinciso con la diminuzione del tasso glicemico. Quando con la somministrazione del glicosio in 6 volte si ebbe un aumento del tasso glicemico inferiore a quello osservato con la somministrazione in una volta, allora il tasso idremico aumentò lievemente: nel caso opposto, in G. A., si ebbe diminuzione del tasso idremico non preceduta da alcun aumento. In complesso questi risultati si possono riassumere nel modo seguente:

Somministrando glicosio a dosi frazionate, a costanti intervalli di tempo, nella prova della iperglicemia alimentare, il tasso glicemico, entro certi limiti, aumenta di più che con una sola ingestione massiva. Frazionando ulteriormente la sostanza, il tasso glicemico aumenta meno, o può anche diminuire senza precedenti aumenti. Il tasso idremico in generale diminuisce, sebbene di poco, quando il tasso glicemico aumenta, aumenta quando il tasso glicemico diminuisce.

Commemorazione del Socio Straniero Albert Brachet

letta dal Socio GIUSEPPE LEVI nella seduta del 1° novembre 1931

ALBERT BRACHET, spentosi all'età di 61 anni alla fine del dicembre 1930; apparteneva a quella generazione di cultori di Morfologia vissuti nel periodo critico che quella scienza attraversò e che oggi si può ritenere superato. Brachet fu infatti iniziato agli studi morfologici da van Beneden in un periodo nel quale Hans Driesch e Wilhelm Roux avevano da poco fatto conoscere i risultati delle loro esperienze sugli embrioni di Echinodermi e di Anfibi; era l'epoca in cui Driesch incominciava a svolgere «ab imis» la tradizionale Morfologia a base evolucionistica introducendo i concetti di regolazione, di potenza prospettica e significato prospettico, di sistema armonico-equipotenziale; concetti che dovevano ben tosto avviare la Morfologia verso una via più fisiologica che morfologica; e prima ancora Guglielmo Roux, spirito incline, non meno di Driesch, all'indagine speculativa, ma con tendenze meccaniciste, fondava un periodico al quale dava il nome di Archivio per la meccanica dello sviluppo, accentuando con questo nome l'orientamento che egli credeva di dover dare alla nuova Morfologia. Oggi queste divergenze sovra nomi hanno perduto ogni interesse, ciò che importa è il grandioso rinnovamento della Morfologia che risale a quei due grandi biologi e l'Archivio fondato da Roux ha accolto nei trentacinque anni trascorsi dalla sua fondazione la parte migliore della produzione morfologica.

Fra coloro che in quel periodo erano iniziati agli studi morfologici, gli uni, e furono i più numerosi, manifestarono poca fiducia nell'avvenire dell'Embriologia sperimentale, se pur non si dichiararono nettamente avversi al nuovo indirizzo di studi; una schiera più esigua, alla quale appartennero Spemann, Braus in Germania, Morgan, Harrison, Warren Lewis negli Stati Uniti, Brachet in Belgio compresero che la crisi della Morfologia era qualche cosa di più di una questione di metodo — l'esperimento che doveva integrare i risultati dell'osservazione diretta — ma interessava tutto il programma di questa disciplina: non più semplice descrizione delle forme, ricerca dei fattori che le hanno determinate; Brachet parla di Embriologia causale; Braus estende questo principio a tutta la Morfologia (Morfologia causale).

Certamente l'ambiente intellettuale in cui Brachet fu educato sin dai primi anni nei quali iniziò gli studi di Medicina all'Università di Liegi era

atto a preparare la sua mente ad un movimento rinnovatore. Egli ebbe la fortuna di avere un Maestro sommo, Edoardo van Beneden, che la nostra Accademia si onorò di annoverare fra i suoi Soci; van Beneden assieme a Boveri, ai fratelli Hertwig ed a qualche altro, meglio di molti suoi contemporanei comprendeva che la Citologia e l'Embriologia appartengono al grande tronco della Scienza della Vita. Brachet seguì i corsi di van Beneden e sotto la sua guida apprese a lavorare nell'Embriologia.

A Liegi Brachet rimase per un lungo periodo: dal 1890, da quando ancor studente, fu nominato preparatore nel Laboratorio di van Beneden, sino al 1905. Conseguita la laurea in medicina nel 1894 fu accolto nell'Istituto anatomico di Liegi diretto allora da Swaen. In quel periodo Liegi era un focolare di fervido lavoro scientifico; fra i nomi che hanno lasciato maggior traccia, ricorderemo il fisiologo Frédéricq senior, l'anatomico Swaen, Cerfontaine, i fratelli Schreiner, Nolf, Selys-Longchamps, de Winiwarter, Julin, colleghi ed allievi di van Beneden; con costoro e soprattutto col grande Maestro van Beneden, per il quale Brachet conservò, come vedremo più oltre, la più grande devozione, Egli aveva continui contatti, ed è evidente che un ambiente così elevato non poteva non esercitare un'influenza sovra la mente di un giovane di vivacissima intelligenza ed appassionatissimo per le ricerche scientifiche.

Nel 1894 e nel 1895 trascorse qualche tempo all'estero: nell'Istituto anatomico di Edinburgo, a Freiburg presso Gaupp, a Breslau presso Born; quest'ultimo fu uno dei primi ad intraprendere ricerche di Embriologia sperimentale; colle sue concrescenze di embrioni di Anfibi egli preparò la via, tanto alla moderna tecnica dei trapianti, che a quella della coltivazione dei tessuti; il soggiorno di Brachet nell'Istituto di Born ed il contatto con quell'embriologo intelligentissimo ed abile tecnico fu per Lui un'ottima preparazione culturale e tecnica per il suo orientamento futuro verso l'Embriologia sperimentale.

Nel 1900 divenne « chef des travaux pratiques » nell'Istituto anatomico di Liegi, finchè nel 1905 fu nominato Professore di Anatomia umana nell'Università libera di Bruxelles; dapprima gli fu affidato l'insegnamento della sola Anatomia, tenuto prima di lui dai proff. Sacré e Hauben; poco dopo fu incaricato del corso di Embriologia e della direzione dell'Istituto Raoul Warocqué.

In quegli ambienti modesti, ma non indecorosi, Brachet lavorò indefessamente per un venticinquennio, se si eccettua il periodo della guerra; allora emigrò a Parigi approfittando dell'ospitalità offertagli da Nicolas.

Soltanto nel 1929, in grazia alla munificenza della Fondazione Rockefeller, Egli passava in un Istituto più grandioso, che egli inaugurò il 24 giugno 1930, cioè pochi mesi prima della sua morte, con un nobile discorso, che era tutto un programma di lavoro.

Passando ad analizzare l'opera scientifica del Nostro, vediamo che per

un lungo periodo; sino al 1904, Brachet non si occupò di Embriologia sperimentale; la sua produzione verte prevalentemente nel campo dell'organogenesi. In questo modo Egli diviene conoscitore profondo dell'Embriologia descrittiva affinando lo spirito d'osservazione rigoroso, indispensabile per tali ricerche.

Il suo primo studio (per ordine cronologico, 1894) si occupa del riassorbimento della cartilagine e dello sviluppo delle ossa lunghe negli uccelli.

Nei successivi (1895-1897) studia lo sviluppo del fegato e del pancreas, della cavità epatoenterica, della borsa omentale, delle cavità sierose toraciche ed addominali.

Sebbene queste ricerche costituiscano un'importante somma di lavoro, e sebbene da esse emerga quale salda tempra di ricercatore fosse Brachet, tralascio di parlarne, perchè non rappresentano certo la parte più essenziale della sua opera, ed anche perchè per la loro stessa natura non è possibile di riferirle succintamente: si tratta di uno dei capitoli più complessi dell'organogenesi, che era stato digià trattato dai pionieri dell'Embriologia, e che il Nostro ha ulteriormente svolto ed esteso con profondità ed acume.

In un periodo successivo pubblica in collaborazione con Swaen tre memorie sullo sviluppo degli apparati escretore e vascolare e sulla formazione dei foglietti nel tubercolo caudale e nella coda degli embrioni di Teleostei (1899, 1901, 1904).

Nel 1898 studia lo sviluppo del cuore, del sangue e dei vasi nel Triton, pervenendo alla conclusione che l'endotelio del cuore e dei primi vasi hanno origine entodermica; però questo non risultò convalidato dalle ricerche successive di Muthmann e Marcinowski, e Brachet stesso esprime nel suo trattato di Embriologia il dubbio di aver confuso l'abbozzo del cuore con quello della tiroide.

Nel 1903 scopre negli embrioni di Rana l'isolotto sanguigno medio-ventrale, interpretato da lui come l'organo ematopoietico nel quale si formano nella loro totalità gli eritrociti; venti anni più tardi le ricerche del nostro E. Federici, eseguite nell'Istituto anatomico di Bruxelles davano la conferma sperimentale di questo fatto importante.

Anche più tardi, quando Egli ha digià compreso la grande portata delle ricerche sperimentali, pubblica ad intervalli qualche memoria di argomenti di Embriologia descrittiva: Sul significato del diaframma dorsale (1906); Sullo sviluppo della testa e del tronco negli Anfibi (1907); Sull'origine dell'ipoblasto del canale alimentare in *Amia calva* (1912); Sull'embriologia dei rettili (acrogenesi, cefalogenesi, cormogenesi) e sull'origine dei gangli del trigemello in *Chrisemys* (1904); Sullo sviluppo dell'organo soprapericardico di *Spinax niger* (1926).

E per terminar di parlare della sua attività nel campo dell'Embriologia descrittiva, ricorderemo le due memorie postume di van Beneden apparse a cura di Brachet, il quale con pietà di discepolo volle riordinare i disegni

e gli appunti del grande Embriologo e darli alle stampe; ed infine il suo scritto critico apparso nel 1923 (Edouard van Beneden et son oeuvre) nel quale volle difendere l'opera scientifica del suo Maestro dalle critiche di Carl Rabl.

Nel campo dell'Embriologia causale, Brachet si è principalmente dedicato a tre argomenti: la polispermia, la partenogenesi e la localizzazione dei territori germinativi. Nei primi due Egli lavorò dapprima da solo, successivamente incaricò il suo valente discepolo M. Herlant, per sventura scomparso troppo presto, di continuare l'opera iniziata.

Nel 1910 scopre un metodo per rendere polispermiche le uova di Rana, ed assieme a M. Herlant studia la citologia delle uova tri-epolispermiche. Quando dieci e più spermatozoi penetrano nell'emisfero superiore dell'uovo di Rana, uno solo di questi copula col pronucleo femminile, ciascuno degli altri edifica un pronucleo maschile, prende possessione di una parte considerevole dell'ooplasma, la quale rimane indipendente dalle vicine e la mantiene sotto la propria sfera d'azione. Bentosto tutti i nuclei dell'uovo polispermico entrano in mitosi e l'uovo si divide in altrettanti blastomeri quanti furono gli spermatozoi penetrati. Le larve che si ottengono sono normali. Il destino di un pronucleo è sotto la dipendenza della quantità di citoplasma nella quale è immerso; ne consegue che lo spermatozoo non possiede né virtualmente, né allo stato latente le potenzialità necessarie alla formazione di un organismo simile a quello da cui proviene.

Le ricerche sulla fecondazione di uova di Echinodermi immature che Brachet intraprese molti anni più tardi (1922) confermarono questo fatto di grande importanza generale: la composizione e lo stato fisico del citoplasma impongono alla cromatina nucleare una struttura determinata; quando infatti i cromosomi femminili s'imbevono ed incominciano a costituire un pronucleo vescicoloso, tutti i pronuclei maschili si pongono all'unisono col femminile.

Subito dopo Brachet studia la citologia dei germi provenienti da uova di Rana partenogenetiche, ottenuti col metodo di Bataillon, dimostrando il carattere diploide degli embrioni così ottenuti; Herlant svolgerà poi ulteriormente questo capitolo in un'importante memoria.

E poco dopo che Carrel e Burrows avevano perfezionata la tecnica di Harrison di coltivazione in vitro di parti di organismi, rendendola applicabile agli uccelli e mammiferi, Egli si vale di questo metodo per lo studio dello sviluppo di blastocisti di coniglio (1912); le blastocisti al sesto giorno tolte dall'utero furono immerse in plasma sanguigno ed allevate nel termostato; l'esame microscopico dimostrò che tutta la blastociste si evolve, anche dopo aver perduto ogni rapporto coi tessuti uterini e che nella medesima l'ectoplacenta già abbozzata si differenzia in plasmodiblasto e citoblasto.

Questo di Brachet allora fu il primo tentativo di studiare col metodo della coltivazione dei tessuti un problema di Morfogenesi; ed a tutt'oggi, a

quasi venti anni di distanza, nonostante il grande sviluppo che assunse quella tecnica e la larga applicazione che questa ebbe nello studio di tanti problemi biologici, il tentativo di Brachet rimase quasi isolato.

E veniamo infine alle ricerche intraprese da Brachet sull'argomento che Egli predilesse ed al quale negli ultimi anni della sua vita si dedicò in modo quasi esclusivo: la localizzazione dei territori germinativi.

Per la prima volta tratta quest'argomento nel 1903 colle sue due memorie sulla gastrulazione dell'uovo di Anfibio e sulle relazioni fra piano di penetrazione dello spermatozoo nell'uovo, primo piano di divisione e piano di simmetria bilaterale.

Nel 1904, nello stesso anno in cui è nominato a Bruxelles, pubblica i risultati delle sue prime ricerche sperimentali sull'uovo di Rana. Brachet trattò in quell'epoca un problema d'importanza storica nell'Embriologia sperimentale; la potenzialità dei due primi blastomeri dell'uovo di Rana; i fatti posti in luce da Herlitzka e da Spemann nel Tritone erano allora una conquista recente. Ripetendo la celebre esperienza di Roux nell'uovo di Rana a due blastomeri, Egli conclude per la ripartizione simmetrica del materiale ovulare ai due lati d'un piano verticale; il destino dei due primi blastomeri dipende dalla sede che occupano nell'uovo; da questa sede dipende la qualità dei materiali che contengono; con altre parole, pur non accettando integralmente la teoria di Roux, ammette che lo sviluppo dell'uovo sia un lavoro di mosaico.

Dopo un intervallo di quasi venti anni, nel quale, come abbiamo veduto, si dedicò a tutt'altri argomenti di Embriologia descrittiva e causale, Brachet ritorna sul problema delle localizzazioni germinali. In due memorie apparse nel 1923 e nel 1927 adduce argomenti nuovi in favore della sua antica veduta che nel germe di Anuri, a differenza che in quello di Urodeli, si stabilisce una determinazione dei territori germinativi poche ore dopo la fecondazione, non appena diviene visibile la semiluna grigia; in blastule prossime alla gastrulazione distrugge la semiluna nella parte media e lateralmente, ed ottiene mostruosità varie. Secondo Brachet dal raffronto dei suoi risultati con quanto vide Spemann nel Tritone, in tutti gli Anfibi la regione del labbro dorsale del blastoporo è la sola il cui destino sia irrevocabilmente determinato.

Ritenne anzi di essere risalito nelle ricerche delle localizzazioni primarie in un periodo più precoce di quanto fosse stato fatto prima di lui, avendo potuto rintracciare in un punto determinato della semiluna grigia un potere morfogenetico che diviene manifesto soltanto negli stadi più inoltrati. La determinazione sarebbe oltre che qualitativa anche quantitativa; da distruzioni nella semiluna grigia consegue una riduzione nel volume degli organi assili, la quale non viene più regolata. Brachet ne deduce che, oltre che la forma, anche la grandezza del corpo è precocemente determinata.

Fra Anuri e Urodeli vi sarebbe, secondo Brachet, una differenza anche nella sede delle localizzazioni germinali; nei secondi la testa e la più gran

parte del tronco si formano al davanti del blastoporo, negli Anuri la parte precordale della testa è preblastoropica, tutto il rimanente è blastoropico e si edifica nell'emisfero inferiore.

Dalle ricerche di Vogt, intraprese col metodo di seguire nel germe vivente il destino del materiale, rendendolo visibile colla colorazione vitale di parti circoscritte, sembrerebbe che neppure in questo riguardo sussistano differenze fra Urodeli ed Anuri; negli uni e negli altri la chiusura del blastoporo è concentrica e tutto il dorso si formerebbe al davanti del blastoporo.

Nella sua memoria del 1927 Brachet riferisce di aver innestato il centro organizzatore blastoporico in giovani gastrule di Rana con risultato negativo; ne deduce che in uno stadio in cui l'ectoderma ventrale è negli Urodeli indifferente, non lo è più negli Anuri, nei quali la determinazione morfogenetica ha assunto lo stesso grado che nella neurula di Urodeli.

È doveroso aggiungere che neppure queste conclusioni si accordano con quanto alcuni allievi di Spemann e di Vogt hanno di recente dimostrato. Secondo Schmidt, suddividendo la semiluna grigia dell'uovo di Anuri col metodo del filo di seta, si ottengono, come nel Tritone, due embrioni gemelli completi, mentre il difetto si ottiene solamente se la suddivisione si produce in un piano ventrale. D'altra parte Schotté coll'impianto dell'orlo dorsale di gastrule precoci, ottenne evidente induzione anche in Anuri. Anche le esperienze di E. Bruns dimostrerebbero che negli Anuri non vi è determinazione stabile e che i germi di Anuri non differiscono nè in questo riguardo, nè nel potere di induzione da quelli di Urodeli.

Dalle sue opere didattiche e di volgarizzazione, la più importante è il suo magistrale trattato di Embriologia, il quale è la miglior prova della sicura padronanza che egli aveva in questa disciplina; il medesimo a tutt'oggi rappresenta il più moderno libro di Embriologia comparata che abbiamo. Invano il lettore cercherebbe in quell'opera ad impronta molto personale, un'esposizione sistematica ed imparziale di dottrine opposte; l'Autore vi esprime recisamente il suo punto di vista; e quest'è secondo me un grande pregio, per lo meno quando si tratta di un'opera che non ha la pretesa di essere completa e che non deve servire per consultazione.

Notevolissimo è il suo libro, piccolo di mole, ma denso di fatti e di idee: *L'uovo ed i fattori dell'ontogenesi*; poche volte dei problemi difficili come quelli desunti dalle ricerche sperimentali moderne sull'uovo di Anfibi sono stati svolti in modo così attraente ed accessibile a tutti; nella prima edizione di questo suo scritto sono raccolte le conferenze Michinois tenute nel 1915 al Collège de France per invito di Henneguy, mentre era ospitato da Nicolas a Parigi. La seconda edizione apparve poco prima della sua morte; i mutamenti profondi che le ricerche di Spemann, di Mangold, di Vogt avevano determinato nell'Embriologia generale richiedevano che quell'opera fosse del tutto rifatta; l'occasione gliene fu offerta dalle conferenze che Egli tenne durante il suo viaggio negli Stati Uniti.

Brachet partecipò attivamente alla collaborazione scientifica internazionale. Quando nel 1911 Keibel, Hubrecht ed Assheton fondarono ad Utrecht l'Istituto internazionale di Embriologia, destinato a raccogliere materiale embriologico raro ed a renderlo accessibile agli studiosi di tutto il mondo, Brachet fu chiamato fra i primi a farne parte. E quando diciannove anni più tardi dopo la guerra l'Istituto fu di nuovo posto in condizioni di funzionare, Brachet ebbe una parte nella sua ricostruzione e se ne compiacque.

I suoi grandissimi meriti di studioso e di Maestro ebbero ripetutamente riconoscimenti ufficiali. Nel 1918 fu nominato Membro corrispondente dell'Istituto di Francia e Dottore *honoris causa* dell'Università di Parigi; dal 1924 al 1927 fu Rettore dell'Università di Bruxelles e poté durante quel periodo concludere colla Fondazione Rockefeller un accordo per il finanziamento della costruzione degli Istituti scientifici di quell'Università.

Nel 1928-29 fu invitato a tenere una serie di conferenze nelle Università degli Stati Uniti.

Brachet fu certamente uno dei grandi morfologi del nostro tempo. Egli aveva una profonda conoscenza dell'Embriologia descrittiva ed era dotato dello spirito d'analisi e della precisione indispensabile al Morfologo; nello stesso tempo per la sua viva intelligenza, per il suo spirito sintetico e per il suo interesse per i problemi generali, aveva le maggiori attitudini a trattare la Morfologia causale. Anche nelle sue ricerche degli ultimi anni Egli non dimenticò mai di essere morfologo, bensì ebbe sempre di mira lo studio dei problemi della forma. Il suo indirizzo differiva in ciò da quello di alcuni moderni Morfologi, specialmente americani, i quali affascinati dal miraggio della Fisico-chimica non tengono forse in sufficiente conto il problema della forma organica.

Per parlare soltanto dell'opera da lui svolta nel campo dell'Embriologia causale, le sue ricerche sulla polispermia e sulla citologia delle uova partenogenetiche di Rana furono confermate e rimangono. Certamente nel suo argomento preferito, al quale si dedicò con maggior fervore, specialmente negli ultimi anni della sua vita, la localizzazione del materiale formativo prima e durante la gastrulazione, le sue idee sulla precoce determinazione dei territori germinali sono oggi superate, come abbiamo detto poco fa.

Soltanto un critico superficiale potrebbe essere indotto per questo a diminuire il valore dell'opera scientifica di Brachet; non certo chi giudica serenamente e chi sa come la ricerca scientifica proceda nel suo cammino ascendente attraverso errori innumerevoli.

Non va dimenticato che Brachet ha voluto cimentarsi con un problema formidabile per la sua complessità, e che apparve per decenni insolubile sia col metodo descrittivo, sia colla tecnica sperimentale fino allora seguita. Si aggiunga che nel 1903, quando Egli incominciò a lavorare sulla localizzazione dei territori germinali, i risultati di Wilson e della scuola ame-

ricana sulle uova a mosaico facevano pensare che la determinazione precoce fosse un fenomeno più generale di quanto è in realtà.

Dopo le prime scoperte di Spemann dalle quali appariva che anche nella fase di gastrula precoce la determinazione dell'uovo di Urodeli è suscettibile di essere modificata in condizioni particolari, Brachet ritenne che fra Urodeli ed Anuri vi siano differenze sensibili nell'epoca della determinazione. Invece le ricerche che ho sopra ricordato dimostrano che queste differenze non sussistono. Ma anche se, ripeto, una parte dell'opera del Nostro non è sfuggita al destino che incombe senza eccezione a quanti collaborano nella ricerca scientifica, che cogli anni la loro opera venga oltrepassata dal progredire nei tecnicismi, non per questo la sua grande figura di studioso viene diminuita, sia perchè, come ho detto, alcune delle sue scoperte rimangono, sia per la grande influenza che Egli ebbe sul movimento scientifico specialmente in Belgio ed in Francia. Si deve riflettere che Egli incominciò a lavorare di Embriologia sperimentale in un tempo ormai lontano, 25 anni fa, e che Egli a Bruxelles creò una vera scuola improntata al suo indirizzo.

Fra i suoi numerosi allievi ricorderemo oltre a Herlant, dell'opera del quale abbiamo parlato, Pol Gérard, attualmente Professore di Istologia a Bruxelles e Dalcq, le ricerche del quale erano molto apprezzate da Brachet e che ebbe l'onore di succedergli nell'insegnamento.

Nelle riunioni dell'Association des Anatomistes, alle quali egli quasi tutti gli anni era presente, e che ripetutamente presiedette, la sua vastissima coltura gli permetteva di intervenire spessissimo nelle discussioni esponendo lucidamente, in forma attraente e garbata e con abilissima dialettica il proprio pensiero; spirito equilibrato e sereno, anche nelle polemiche sapeva mantenere la misura.

Chi come me ebbe con lui dimestichezza e fu onorato della sua amicizia, non poteva non apprezzare la sua nobile e simpatica figura di uomo e di studioso. Egli aveva un altissimo concetto della ricerca scientifica; non la considerava, come molti, quale un dilettantismo che può dare soddisfazioni a chi la coltiva, ma ne apprezzava l'alta funzione civilizzatrice nel mondo. E per questo, pur essendo un ardente patriotta e pur essendosi reso utile durante la guerra con conferenze tenute al fronte, anche nei periodi più tristi seppe astenersi da quel nazionalismo gretto che è il peggiore nemico della Verità.

Egli sapeva mantenersi lontano da quella tendenza, prevalente specialmente durante gli anni di guerra e nel periodo immediatamente successivo, di introdurre nelle controversie scientifiche criteri nazionali, i quali spesso le inacerbiscono ed ostacolano la ricerca del vero. E quando nel 1923 Egli difende l'opera scientifica del suo Maestro van Beneden dalle critiche di Carl Rabl, lo fa con misura e imparzialità e col rispetto che quest'onesto studioso meritava; eppure i rancori, suscitati durante gli anni di guerra, non erano ancora sopiti.

Colle ultime parole che Egli pronunziò davanti ad un uditorio scientifico, in occasione del Congresso federativo di Anatomia ad Amsterdam, Egli salutò con gioia la ripresa delle relazioni fra i morfologi di tutti i paesi, ed espresse il convincimento che agli uomini di scienza spetti la funzione di mostrare ai popoli la via nella quale troveranno la propria salvezza.

Un comitato di personalità di tutto il mondo si è costituito dopo la morte di Brachet per una manifestazione destinata ad onorarlo; tale Comitato ha creduto di istituire un premio triennale o quadriennale Albert Brachet per il miglior lavoro di Embriologia causale, che potrà essere assegnato a studiosi di qualsiasi paese.

In modo meglio rispondente al pensiero del grande Embriologo non si sarebbe potuto rendere omaggio alla Sua memoria!

PUBBLICAZIONI DI A. BRACHET

1. « Étude sur la résorption du cartilage et le développement des os longs chez les oiseaux ». (Journ. Intern. Anat. et Physiol.), t. 10, f. 10, 1893.
2. « Recherches sur le développement de la cavité hépato-entérique de l'Axolotl et de l'arrière cavité du péritoine chez les Mammifères (Lapin) ». (Arch. de Biologie), t. 13, p. 559, 1895.
3. « Recherches sur le développement du diaphragme et du foie chez le lapin ». (Journ. Anat. et Physiol.), 31^e année, p. 511, 1895.
4. « Sur le développement de la cavité hépato-entérique chez les Amphibiens ». (Anat. Anzeiger). Bd. 40, p. 641, 1896.
5. « Recherches sur le développement du pancréas et du foie (Sélaciens, Reptiles, Mammifères) ». (Journ. Anat. et Physiol.), 32^e année, p. 620, 1896.
6. « Sur le développement du foie et sur le pancréas de l'Amnocoetes ». (Anat. Anz.), Bd. 13, p. 621, 1897.
7. « Die Entwicklung und Histogenese der Leber und des Pankreas ». (Ergebnisse Anat. u. Entw. gesch.), 1897.
8. « Recherches sur l'évolution de la portion céphalique des cavités pleurales et sur le développement de la membrane pleuro-péricardique ». (Journ. Anat. et Physiol.), 33^e année p. 421, 1897.
9. « Die Entwicklung der grossen Körperhöhlen und ihre Trennung voneinander ». (Ergb. Anat. u. Entw. gesch.), Bd. 7, p. 886, 1897.
10. « Recherches sur le développement des premiers vaisseaux et du sang chez les Amphibiens urodèles ». (Arch. Anat. microsc.), t. 2, f. 2, p. 251, 1898.
11. En collab. avec E. BENOIT: « Sur la régénération du cristallin chez les Amphibiens urodèles ». (Bibliog. anat.), f. 6, p. 277, 1899.
12. En collab. avec SWAEN: « Étude sur les premières phases du développement des organes dérivé du mésoblast chez les poissons Téléostéens ». (Arch. de Biologie), t. 16, p. 173, 1890.
13. « Sur l'incurvation en arrière de la tête du tibia chez le fœtus humain et le nouveau-né ». (Soc. médico-chirur. de Liège), mai 1900, p. 240.
14. « Sur la signification morphologique et physiologique de la segmentation de l'œuf fécondé ». (Soc. médico-chirur. de Liège), août-septembre 1900.

15. « Les îlots de Langerhans et la sécrétion interne du pancreas ». (Soc. médico-chirurg. de Liège), avril 1901.
16. En collab. avec SWAEN: « Etude sur les premières phases du développement des organes dérivés du mésoblaste chez les Poissons Téléostéens (2^e partie) ». (Arch. de Biologie), t. 18, p. 73, 1901.
17. « Recherches sur l'ontogénèse des Amphibiens urodèles et anoures ». (Arch. de Biol.), t. 19, p. 1, 1902.
18. « Les régénérations dans le règne animal ». (Soc. médico-chirurg. de Liège), août-septembre 1902.
19. « Les colorations vitales ». (Soc. médico-chirurg. de Liège), octobre 1903.
20. « Recherches sur l'origine de l'appareil vasculaire sanguin chez les Amphibiens ». (Arch. de Biol.), t. 19, p. 653, 1903.
21. « Sur les relations chez la grenouille entre le plan de pénétration du spermatozoïde dans l'oeuf, le 1^{er} plan de division et le plan de symétrie bilatérale ». (C. R. Assoc. Anat. Liège), 5^e session 1903.
22. En collab. avec SWAEN: « Étude sur la formation des feuillettes et des organes dans le bourgeon terminal et dans la queue des embryons des Poissons Téléostéens ». (Arch. de Biologie), t. 20 p. 461, 1904.
23. « Recherches expérimentales sur l'oeuf de *Rana fusca* ». (Arch. de Biol.), t. 21, p. 103, 1904.
24. « Gastrulation et formation de l'embryon chez les Chordés ». (Anat. Anz.), Bd. 27, p. 212, 1905.
25. « Sur l'histogénèse et la signification morphologique des fibres nerveuses périphériques ». (Bull. Soc. des Sciences méd. et natur.), Bruxelles, 2 octobre 1905.
26. « Recherches expérimentales sur l'oeuf non segmenté de *Rana fusca* ». (Arch. f. Entw. mech. d. org.), Bd. 22, p. 325, 1906.
27. « Contribution à l'étude de la signification morphologique du diaphragme dorsal ». (Bull. acad. Méd. belge), t. 19, f. 2, p. 3, 1906.
28. « La tête et le tronc chez les embryons d'amphibiens ». (C. R. Ass. Anat.), Lille 9^e Réunion, 1907.
29. « Recherches sur l'ontogénèse de la tête chez les Amphibiens ». (Arch. de Biol.), t. 23, p. 165, 1907.
30. « Le but et les méthodes de l'embryologie moderne ». (Revue des Idées), Paris, 4^e an., septembre 1907, p. 777.
31. « Les idées actuelles sur la potentialité des blastomères ». (Ann. Soc. roy. Zool. et Malac. de Belgique), t. 42, p. 98, 1907.
32. « Sur la signification morphologique de l'oeil des Vertébrés ». (Bull. Soc. roy. Sc. méd. et nat.), Bruxelles, Séance 4 novembre 1907.
33. « Sur l'origine ontogénétique de la différenciation de la tête et du tronc chez les Vertébrés craniotes ». (Ann. soc. roy. Zool. et Malac. Belg.), t. 42, p. 223, 1907.
34. « Sur la signification morphologique de la région occipitale du Crâne ». (Bull. Soc. d'Anthropol. de Bruxelles), t. 27, 1908.
35. « Sur un cas de polydactylie ». (Bull. soc. d'Anthrop. de Bruxelles), t. 27, 1908.
36. « La signification du diaphragme dorsal (réponse à Bertelli) ». (Anat. Anz.), Bd. 32, p. 62, 1908.
37. « La localisation des tendances héréditaires ». (Bull. Soc. Anthropol. Bruxelles), t. 28, 1909.
38. « L'hérédité dans l'oeuf ». (Revue des Idées), Paris, juin 1909.
39. « La polyspermie expérimentales comme moyen d'analyse de la fécondation (Festschrift f. Roux) ». (Arc. f. Entw. mech. d. Org.), Bd. 30, p. 261, 1910.
40. « Recherches sur l'influence de la polyspermie expérimentales dans le dévelop-

pement de l'oeuf de *Rana fusca*». (Arch. de Zool. expér. et gén.), vol. 46, t. 6, p. 1, 1910.

41. «Edouard van Beneden (note nécrologique)». (Biographie anatomique), f. 2, t. 20, p. 246, 1910.

42. «Edouard van Beneden (note nécrologique)». (Anat. Anz.), Bd. 36, p. 598, 1910.

43. «Les localisations germinales dans l'oeuf parthénogénétique de *Rana fusca* (note préliminaire)». (Bull. Soc. sc. méd. et natur. Bruxelles), n. 4, 3 avril 1911.

44. «Étude sur les localisations germinales et leur potentialité réelle dans l'oeuf parthénogénétique de *Rana fusca*». (Arch. de Biol.), t. 26, p. 337, 1911.

45. «La signification morphologique des grands organes des sens de la tête». (6^e Congrès de Neurologie et de Psychiatrie), Bruges 1911.

46. «On the development of the two first blastomeres of the frog's egg». (Anatomical record), vol. 5, n. 4, p. 183, 1911.

47. «La polyspermie expérimentale dans l'oeuf de *Rana fusca*». (Arch. f. mikr. Anat.), Bd. 79, p. 96, 1912.

48. «Recherches sur la gastrulation et l'origine de l'hypoblaste du tube digestif chez *Amia calva*». (Zool. Jahrb.) Suppl. 15, Bd. 2, p. 425, 1912.

49. «Quelques caractères primitifs de l'homme». (Bull. Soc. Anthropol.), t. 31, avril 1912.

50. «Développement "in vitro", de blastodermes de jeunes embryons de Mammifères». (C. R. Acad. Sciences Paris), t. 155, p. 1191, 1912.

51. «Recherches sur la déterminisme héréditaire de l'oeuf de Mammifères (développement "in vitro" des vésicules blastodermique de Lapin)». (Arch. de Biol.), t. 28, p. 447, 1913.

52. «Développement "in vitro" de blastodérms de jeunes embryons de Mammifères». (Anat. Soc. Zool. et Malac. Belg.), t. 49, p. 12, 1913.

53. «Action inhibitrice du sperme d'Annélide sur la formation de la membrane du fécondation de l'oeuf d'Oursin». (C. R. Acad. Sciences Paris), t. 157, p. 605, 1913.

54. «Recherches sur l'embryologie des Reptiles (acrogenèse, céphalogénèse, cormogénèse chez *Chrysemys marg.*)». (Arch. de Biol.), t. 29, p. 501, 1914.

55. «Sur l'origine des ganglions du trijumeau chez *Chrysemys marg.*». (Ann. Soc. Zool. et Malac., Belg., t. 43, p. 31, 1914.

56. «Bemerkungen zu j. Loebs: Artificial Parthénogénésis and fertilization». (Arch. f. Entw. mech. d. Org.), septembre 1914.

57. «L'action de l'acide butyrique et le premier temps de la fécondation». (C. R. Acad. Sciences Paris), t. 159, p. 642, 1914.

58. «Différenciations "spontanées", différenciations "provoquées" et leur intermédiaires au cours du développement embryonnaire». (C. R. Soc. Biol. de Paris), t. 77, p. 557, 1914.

59. «Sur la membrane de fécondation de l'oeuf d'Oursin». (Journ. Phys. et Pathol. gén.), t. 16, p. 1016, 1915.

60. «Sur l'évolution cyclique du cytoplasme de l'oeuf activé». (C. R. Associat. des Sciences, Paris), t. 161, p. 359, 1915.

61. «L'évolution d'une science: l'Embryologie». (Rev. gén. Sciences pures et appl.), 26^e année, p. 512, 1915.

62. «Variations individuelles précoces au cours du développement embryonnaire». (C. R. Soc. Biol. de Paris), t. 79, p. 27, 1916.

63. «L'oeuf et les facteurs de l'ontogénèse». (Encyclopédie Scientif. Doin), Paris, 1917.

64. «Sur le tractus bucco-pharyngien». (C. R. Soc. de Biol. de Belg.), t. 82, p. 923, 1919.

65. «L'hérédité dans ses manifestations générales et dans ses aspects particuliers». (14^e Congrès fr. de méd. Bruxelles), 25^e année, n. 7, p. 197, 1920.

66. « Quelques aspects du problème de l'hérédité ». (Soc. sc. méd. et nat. Bruxelles), Séance 6 décembre 1920.
67. « Traité d'embryologie des vertébrés ». Masson, Paris 1921.
68. « La science de la vie. Ses tendances actuelles ». (Séance de rentrée de l'Institut des Hautes Études de Belgique). Le Flambeau, 4^e année, novembre 1921.
69. « Sur la fécondation prématurée de l'oeuf d'Oursin ». (C. R. Soc. Belg. de Biol.), t. 86, p. 511, 1922.
70. « Recherches sur la fécondation prématurée de l'oeuf d'Oursin ». (Arch. de Biol.), t. 32, p. 205, 1922.
71. « Deux indices de la symétrie bilatérales dans l'oeuf d'Oursin ». (Bull. Soc. Sc. méd. et nat. Bruxelles), vol. jubilaire 1922.
72. « Recherches sur les localisations germinales et leur propriétés ontogénétiques dans l'oeuf de *Rana fusca* ». (Arch. de Biol.), t. 33, p. 343, 1923.
73. « Edouard van Beneden et son oeuvre ». (Arch. de Biol.), t. 33, p. 3, 1921.
74. « Génération et fécondation ». 75^e Anniv. Fondat. Soc. Biol. de Paris, 1923.
75. « La vie créatrice des formes et des fonctions (1^{er} Discours du Rectorat) ». (Revue de l'Université de Bruxelles), n. 1, octobre 1924.
76. « Les échelons de la vie (2^e Discours du Rectorat) ». (Revue de l'Université de Bruxelles), n. 1, octobre 1924.
77. « Coup d'oeil sur le présent et l'avenir du problème de l'hérédité (3^e Discours du Rectorat) ». (Revue de l'Université de Bruxelles), n. 1, octobre 1925.
78. « Sur le développement de l'organe suprapéricardique chez *Spinax niger* ». (C. R. Ass. Anat. Liège), 21 Réunion, mars 1926.
79. « Résumé de 4 conférences faites à l'Université d'Athènes ». (Athènes), année IV, n. 3, 1926.
80. « Étude comparative des localisations germinales dans l'oeuf des Amphibiens urodèles et anoures (Festschrift f. Driesch) ». (Archiv f. Entw-mech. d. org.), Bd. 3, p. 250, 1927.
81. « The localisation of développement factors ». (Quarterly Review of Biology), vol. 2, p. 204, 1927.
82. « Les causes et les facteurs de la morphogénèse. (Confér. faite à Bâle) ». (Actes de la Soc. helvét. des Sc. nat.), Bâle 1927. 2 P., p. 28.
83. « La vie créatrice des formes ». (Nouvelle Collection Scientifique), Alcan, Paris 1927.
84. « Éloge du prof. O. van der Stricht ». (Bull. Acad. roy. du Méd. Belg.), avril 1929, p. 149.
85. « Les sciences morphologiques depuis trente ans (Confér. faite à l'inauguration de la Nouvelle École de Médecine de l'Université de Bruxelles) ». (Revue de l'Univ. de Bruxelles), n. 1, octobre 1930.
86. « L'oeuf et les facteurs de l'ontogénèse (2^e édition) ». (Encyclopédie Scientifique), Doin, Paris 1930.
87. « Le but et la méthode de l'embryologie causale ». (Scientia), paru en février 1931.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il doloroso annunzio della morte dei Soci DIONISI, REPOSSI, BECKE, ERIKSSON scomparsi tutti durante le ferie.

Il Socio MILLOSEVICH invia un reverente saluto alla memoria di EMILIO REPOSSI di cui rievoca brevemente la figura di scienziato.

Il Presidente comunica che hanno ringraziato per la loro elezione i Soci Nazionali BLANC, RUSSO, SILVA. Presenta quindi tre plichi suggellati inviati perchè vengano conservati negli archivi dell'Accademia dai Signori Curatulo, Barricelli, Candiani.

Il Socio LEVI GIUSEPPE legge una dotta commemorazione dello scomparso Socio Straniero A. BRACHET.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario aggiunto prof. LO SURDO presenta i libri giunti in omaggio segnalando la terza edizione del trattato di « Anatomia dell'uomo » del Socio G. CHIARUGI; il volume commemorativo del centenario di M. Berthelot; le « Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova » pubblicate dal socio G. DAL PIAZ; « Jac. Berzelius Levnadsteckning di H. G. Söderbaum »; le « Leçons de géométrie projective » del Socio Straniero CARTAN, vari opuscoli dei Soci ABETTI, D'ACHIARDI, SILVESTRI, RONDONI; il vol. II degli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze »; il vol. II della « Storia delle Matematiche » del Socio G. LORIA; il vol. I, p. II dell'« Enciclopedia delle matematiche elementari » a cura di Berzolari, Vivanti e Gigli.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci E. CARANO, G. LEVI, V. VOLTERRA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° novembre 1931

- ABETTI G. — Altezza della cromosfera nel 1929 ed andamento del presente ciclo solare. (Estr. dai « Rend. della R. Accademia Naz. dei Lincei, classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Volume XI, pp. 921-923). Roma, 1931. 8°.
- ABETTI G. — Galileo Galilei as a Pioneer in the Physical Sciences. (Reprint. from the « Publications of the Astronomical Society of the Pacific ». Vol. XLIII, n° 251, 252, pp. 6-23, 130-144). s. l. 1931. 8°.
- AMORIN FERREIRA H. — A birrefrangência circular do quartzo e a teoria de Fresnel. Lisboa, 1930. 8°, pp. 1-48.
- AMORIN FERREIRA H. — Contribuição experimental para a estudo dos fenómenos de atrito lubrificado. Lisboa, 1931. 8°, pp. 1-48.
- ARTAZA PIÑUELA F. — Integración de expresiones diferenciales irracionales y transformaciones algebraicas de las diferenciales elípticas. Madrid, 1931. 8°, pp. 1-89.
- BARELLI LUIGI. — Il distretto epato-splenico ed il suo apparato reticolo estocitario nel metabolismo dei grassi. (Estr. dall'« Archivio dell'Istituto Biochimico Italiano », 1931, fasc. II). Milano, 1931. 8°, pp. 1-34.
- BARELLI LUIGI. — Il micrometro di Hagedorn et Jensen per la determinazione della glicemia ed una sua utile modificazione. (Estr. dalla « Rivista diagnostica e tecnica di laboratorio », n. 3, 1931). Napoli, 1931. 8°, pp. 1-17.
- BARELLI LUIGI. — Influenza di frazioni ematiche sullo sviluppo culturale del bacillo tubercolare. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto sieroterapico Milanese », 1931, fasc. V). Milano, 1931. 8°, pp. 1-11.
- BARELLI LUIGI. — Ricerche sulla febbre sperimentale. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto sieroterapico Milanese ». Fascicolo VIII, 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-38.
- BATTAGLIA M. — Le bacille de la tuberculose humaine et bovine sélectionnés pour la vaccinothérapie. (Estr. dal « Bollettino della Sezione italiana della Società internazionale di Microbiologia ». Fascicolo II, 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-7.
- BATTAGLIA M. — Méthode de conservation et d'emploi du bacille de la tuberculose humaine et bovine sélectionné pour la vaccinothérapie. (Estr. dal « Bollettino della Sezione Italiana della Società internazionale di Microbiologia ». Fasc. IV, 1931), Milano, 1931. 8°, pp. 1-5.
- BERTHELOT MARCELIN. — Centenaire de Marcelin Berthelot. 1827-1927. Paris, 1929. 4°, pp. 1-709.
- BERZELIUS JAC. — Levnadsteckning av H. G. Söderbaum. Bandet III. Uppsala, 1931. 8°, pp. I-XII, 1-567, 1-47.
- BONATTI STEFANO. — Rocce prasiniche di Bergiola Foscantina nelle Alpi Apuane. (Estr. dagli « Atti della Società Toscana delle Scienze naturali ». Vol. XLI). Pisa, 1931. 8°, pp. 1-10.
- BORGHI BRUNO. — L'azione dei leucociti omologhi ed eterologhi iniettati agli animali. (Estr. dal « Bollettino dell'Istituto sieroterapico Milanese ». Fasc. I, 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-23.

- CAHEN E. et MICHEL CH. — Leçons élémentaires sur le calcul numérique. Paris, 1931. 8°, pp. 1-110.
- CALDO L. — Sulle prime vicende della riforma giuliana del calendario. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei, classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali ». Vol. XII, pp. 104-108), Roma, 1931. 8°.
- CAMELIO ALFREDO. — Come il sole ci dà luce e calore. (Estr. dagli « Annali di Ingegneria ». Anno V, n. 6-7). Napoli, 1931. 8°, pp. 1-23.
- CANDURA G. S. — Studio sulla tignola del fieno (*Ptychopoda berbariata* F.). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 233-266). Portici, 1931. 8°.
- CARTAN E. — Leçons sur la géométrie projective complexe. (Cahiers scientifiques, fasc. X). Paris, 1931. 8°, pp. 1-325.
- CHIARUGI G. — Anatomia dell'uomo. Edizione III; Vol. I-III, IV sezione I, II. Milano, 1930-31, 8°, pp. 1-XV, 1-817; 1-XIX, 1-775; 1-XII, 1-844; 1-X, 1-489; 1-XI, 1-1166.
- CHINI VIRGILIO. — Influenza dell'acido urico sulle reazioni flogistiche articolari e importanza del territorio reticolo-istiocitario sinoviale nella patologia delle articolazioni. (Estr. da « Lo Sperimentale » Archivio di Biologia normale e patologica. Anno LXXXV, pp. 53-73). Siena, 1931. 8°.
- CIANI EDGARDO. — Introduzione alla geometria algebrica. (Lezione di geometria superiore nella R. Università di Firenze). Padova, 1931. 8°, pp. 1-X, 1-599.
- COLLA SILVIA. — Sugli organi di assorbimento di alcune termitarie. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore di Portici ». Vol. XXV, pp. 242-248). Portici, 1931. 8°.
- CUSCIANNA NICOLÒ. — La cocciniglia del susino *Eulecanium corni* (Bouché) in provincia di Trieste. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore di Portici ». Vol. XXIV, pp. 280-298). Portici, 1931. 8°.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — Fluorite nei marmi dell'Orto di Donna (Alta Valle del Serchio). (Estr. dal « Periodico di Mineralogia », anno II). s. l. 1931. 8°, pagine 1-2.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — I mineralogisti pisani dei tempi passati. (Conferenza tenuta nella R. Scuola normale superiore di Pisa il 28 marzo 1931). Pisa, 1931. 8°, pp. 1-16.
- D'ACHIARDI GIOVANNI. — Nuovi dati e ricerche sulla larderellite. (Estr. dal « Periodico di Mineralogia ». Anno I. 1930). Roma, 1930. 8°, pp. 1-8.
- DE CARO. — Gli errori sistematici della vite micrometrica del telescopio zenitale di Carloforte. (Estr. dalle « Memorie della Società astronomica Italiana ». Vol. V). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-20.
- DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE E. — Le determinazioni di gravità secondo il calcolo astromorfo. (Estr. dalla Rivista « L'Universo ». Anno XII, n. 8). Firenze, 1931. 8°, pp. 1-8.
- DEL GIUDICE ERNESTO. — Contributo alla conoscenza del Tonchio della sulla (*Bruchidius pygmaeus* Boh.). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 249-256). Spoleto, 1931. 8°.
- DE VONDERWEID EDOARDO. — È realtà il muoversi della terra? Il sistema del mondo. Genova, 1931. 8°, pp. 1-208.
- Enciclopedia delle matematiche elementari. Vol. I. Parte II. Milano, Ulrico Hoepli, 1931. 8°, pp. 1-XVI, 1-609.
- EREDIA FILIPPO. — Le salinelle di Paternò (Catania). (Estr. dal « Bollettino della Reale Società geografica Italiana ». Serie VI. Vol. VIII). Roma, 1931. 8°, pp. 19.
- EREDIA FILIPPO. — Sulla meteorologia delle rotte aeree (Estr. dalla « Rivista Aeronautica ». Anno VII n. 9). Roma, 1931. 8°, pp. 1-14.
- GIALANELLA L. — Sulle variazioni degli elementi dell'orbita nel problema dei due corpi corrispondente ad una parti-

- colare modifica della legge newtoniana. (Estr. dalle « Memorie della Società astronomica Italiana ». Vol. V). Pavia, 1931. 8°, pp. 1-16.
- GOLA G. — L'erbario micologico di P. A. Saccardo. Catalogo. Padova, 1930. 8°, pp. 1-XVI, 1-328.
- KRAGH AUGUST. — The Anatomy and Physiology of Capillaries. New Haven, 1928. 8°, pp. 1-XIII, 1-422.
- LEONE SALVATORE. — Profilassi del tracoma e visiva nelle provincie di Agrigento, Catania, Erma, Messina, Ragusa, Siracusa, Catanzaro 1930-31. Siracusa, 1931. 4°, pp. 1-80.
- LORIA GINO. — Storia delle matematiche. Vol. II. I secoli XVI e XVII. Torino, 1931. 8°, pp. 1-595.
- Memorie dell'Istituto geologico della Regia Università di Padova. Vol. VIII, pubblicato in onore del prof. C. F. Parrona. Padova, 1930. 4°, pp. 1-86, 1-31, 1-25, 1-21, 1-9, 1-80, 1-11, 1-16.
- MENOZZI C. — Contribuzione alla conoscenza del « Microgenton » di Costa Rica. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 259-274). Portici, 1931. 8°.
- MONTANARI D. — Contributo allo studio sul regime anemologico a Venezia. (Estr. da « L'Aerotecnica ». Vol. XI. n. 6-7). Roma, 1931. 8°, pp. 1-21.
- Mostra della illustrazione zoologica in opere a stampa dal XVI al XVIII. Catalogo. XI Congresso internazionale di zoologia. Padova, 1930. 8°, pp. 1-46.
- Nasini Raffaello (Estr. dal « Bollettino del Com. Naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica ». Anno I 1931). s. I. 1931. 8°, pp. 1-2.
- POZZI LUISA e VIDOLI MARINO. — Quadro ematologico e alterazioni midollari nella tubercolosi sperimentale della cavia. (Estr. dall' « Archivio dell'Istituto biochimico Italiano ». 1931, fasc. I). Milano, 1931. 8°, pp. 1-24.
- RANZI SILVIO. — Sviluppo di parti isolate di embrioni di Cefalopodi. Analisi sperimentali dell'embriogenesi. (Estr. dalle « Pubblicazioni della Stazione zoologica di Napoli ». Vol. XI, pp. 104-146). Napoli, 1931. 8°.
- Relazione del Comitato per un ricordo marmoreo da erigersi alla memoria del prof. Antonio d'Achiardi nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Pisa. Pisa, 1930. 8°, pp. 1-7.
- RONDONI PIETRO. — Experimentelle Beiträge zur Pathogenese der Gicht und der Gelenkerkrankungen. (Sonderdruck aus der « Krankheitsforschung ». Bd. IX, 1931, pp. 211-225). Leipzig, 8°.
- RONDONI PIETRO. — La chimica della tubercolosi. (Estr. dal « Giornale di Chimica industriale ed applicata ». Anno XIII). Milano, 1931. 8°, pp. 1-30.
- RONDONI P. — La patogenesi dell'uremia. (Estr. dalla « Rivista di Biologia medica ». N. 1-2, 1931). Milano, 1931. 8°, pp. 1-16.
- RONDONI PIETRO. — L'eliminazione purinica nel ratto. (Estr. dall' « Archivio di Scienze biologiche ». Vol. XV). Bologna, 1930. 8°, pp. 1-17.
- RONDONI PIETRO. — Lipoidolisi e tumori. (Estr. da « Minerva Medica ». Vol. I). Torino, 1931. 8°, pp. 1-16.
- RONDONI PIETRO. — Recherches expérimentales sur le métabolisme purinique. (Extr. de l' « Archives italiennes de Biologie ». Tome LXXXV, pp. 101-108). Pisa, 1931. 8°.
- RONDONI PIETRO. — Ricerche sulla sierodiagnosi del cancro fatte nella sezione biologica dell' « Istituto del cancro » di Milano. (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere ». Serie II, vol. LXIV, pp. 978-982). Pisa, 1931. 8°.
- RUBIA NINO. — Igiene nuova ossia salute e longevità per tutti. Torino, 1931. 8°, pp. 1-241.
- SILVESTRI F. — A Contribution to a Knowledge of the South African Japygidae (Insecta, Thysanura). (Reprinted from the « Annals of the South African Museum ». Vol. XXX. Part. I, pp. 61-88). s. d. t. 8°.
- SILVESTRI F. — Campodeidae (Insecta, Thysanura) di Cuba. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale

- ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici». Vol. XXIV, pagine 299-319). Portici, 1931. 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — La difesa integrale dell'agricoltura. (Estr. dagli « Atti del Raduno dei tecnici agricoli del Mezzogiorno e delle Isole d'Italia ». Marzo, 1931). 8°, pp. 1-6.
- SILVESTRI F. — Notes on *Grylloblatta campodeiformis* and a description of a new variety (Crylloblattidae). (From the « Transactions of the American Entomological Society ». Vol. LVII, pp. 291-295). Philadelphia, 1931. 8°.
- SMITH H. D. — Description of a new species of Ichneumon-Fly parasitic on *Pyrausta Nubilalis* Hbn. in Europe. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXV, pp. 257-258). Spoleto, 1931. 8°.
- TOLMATCHOFF I. P. — Faune du calcaire carbonifère du bassin houiller de Kousnetz. Partie II, avec 11 planches. Moskva, 1931. 8°, pp. 321-662.
- TROTTARELLI G. e CIANFARINI G. — Carta agronomica del territorio di Terni. Terni, 1931. 4°, pp. 1-24, I-XVIII.
- TUCCI FRANCESCO. — Gli allevamenti del bestiame in Tripolitania. (Collezione di opere e di monografie a cura del Ministero delle Colonie, n. 14). Roma, 1931. 8°, pp. 1-256.
- VISALLI DANTE. — Le cariche elementari Memoria n. 2. Livorno, 1931. 8°, pagine 1-32.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 novembre 1931 (anno X)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur la généralisation des fonctions conjuguées.*
Nota di GR. C. MOISIL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio V. VOLTERRA.

M. V. Volterra a montré que l'extension de la notion de fonctions conjuguées

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

(qu'on peut écrire

$$(2) \quad \frac{du_1}{ds_1} = \frac{du_2}{ds_2}$$

où ds_1, ds_2 sont deux éléments d'arc orthogonaux) dans les espaces à plusieurs dimensions, conduit à employer des fonctions de lignes ⁽²⁾. Nous voulons préciser cette généralisation en cherchant ses relations avec la théorie des fonctions harmoniques, fondamentale pour le système (1).

(1) Nella seduta del 18 gennaio 1931.

(2) Voir par exemple: VOLTERRA, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Blackie & Son, London & Glasgow, 1930, chapt. III.

1. Considérons le système d'expressions

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = U \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = U_{ij} \end{cases}$$

la condition d'intégrabilité est

$$(4) \quad \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial x_j} = 0.$$

On voit que

$$(5) \quad \Delta u_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k}$$

où

$$(6) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

Si $U = U_{ij} = 0$, u_i sont des fonctions harmoniques; (3) remplace le système (1). Puisque

$$(7) \quad \int_{\Sigma} \left[\vec{u} (\vec{v} \cdot \vec{n}) + \vec{v} (\vec{u} \cdot \vec{n}) - \vec{n} (\vec{u} \cdot \vec{v}) \right] d\sigma + \int_{\Omega} \left[(\vec{v} \cdot \vec{U}) + \vec{v} U + (\vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}) + \vec{u} \text{ div } \vec{v} \right] d\omega = 0$$

où Ω est un domaine, Σ sa frontière, \vec{n} la normale à Σ intérieure à Ω , \vec{U} le tenseur symétrique gauche U_{ik} et

$$(8) \quad (\vec{v} \cdot \vec{U})_i = \sum_k v_k U_{ik}$$

sont les composantes du vecteur $(\vec{v} \cdot \vec{U})$ si l'on pose

$$(9) \quad \vec{v}_M = \text{grad}_M \frac{1}{MP^{m-2}}$$

on peut écrire la formule

$$(10) \quad \vec{s}_M = \int_{\Sigma} \left[\frac{\vec{MP}}{MP^m} (\vec{u}_M \cdot \vec{n}_M) + \vec{u}_M \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{n}_M)}{MP^m} - \vec{n}_M \frac{(\vec{u}_M \cdot \vec{MP})}{MP^m} \right] d\sigma_M + \int_{\Omega} \left[\frac{\vec{MP}}{MP^m} U_M + \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{U})}{MP^m} \right] d\omega_M$$

où s_m est l'aire de la sphère unité dans l'espace à m dimensions. Cette formule généralise une identité donnée par M. Pompéiu ⁽¹⁾ pour les intégrales du système (1) à second membre.

Si on considère le système (3) sans second membre, la formule (10) devient

$$(11) \quad \vec{u}_P = \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \left[\frac{\vec{MP}}{MP^m} (\vec{u}_M \cdot \vec{n}_M) + \vec{u}_M \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{n}_M)}{MP^m} - \vec{n}_M \frac{(\vec{u}_M \cdot \vec{MP})}{MP^m} \right] d\sigma$$

qui généralise la formule de Cauchy. Lorsque $\vec{u} = \vec{OP}$ la formule (10) devient

$$(12) \quad \vec{OP} = \frac{1}{s_m} \int_{\Sigma} \left[\frac{\vec{MP}}{MP^m} (\vec{OM} \cdot \vec{n}_M) + \frac{\vec{OM}}{MP^m} (\vec{MP} \cdot \vec{n}_M) - \vec{n}_M \frac{(\vec{OM} \cdot \vec{MP})}{MP^m} \right] d\sigma_M + \\ + \frac{m}{s_m} \int_{\Omega} \frac{\vec{MP}}{MP^m} d\omega_M.$$

Le système (3) sans second membre peut être remplacé par les conditions que :

$$(13) \quad I_1 = \int_{\Sigma(\Gamma_0, \Gamma_1)} \sum_i u_i d\sigma_i$$

prise sur toutes les variétés Σ à $m - 1$ dimensions, limitées aux deux variétés Γ_0, Γ_1 à $m - 2$ dimensions est fonction de Γ_0 et Γ_1 ; et que

$$(14) \quad H_1 = \int_{M_0}^{M_1} \sum_i u_i dx_i$$

est fonction des points M_0, M_1 . C'est la généralisation de l'intégrale de Cauchy.

2. Soit alors le système

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = U_i \\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} = U_{ijk} \end{cases}$$

où u_{ij} sont symétriques gauches ($u_{ij} + u_{ji} = 0$). On remarque la manière de le construire à partir de (4) et (5).

(1) Voir les Mémoires de M. D. POMPEIU publiés dans les « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 33, 1912, p. 108, et 35, 1913, p. 277.

La condition d'intégrabilité de (15) est

$$(16) \quad \frac{\partial U_{jkl}}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{kli}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{lij}}{\partial x_k} - \frac{\partial U_{ijk}}{\partial x_l} = 0.$$

Puisque

$$(17) \quad \begin{cases} \Delta u = \sum \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \\ \Delta u_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial U_{ijk}}{\partial x_k} \end{cases}$$

on conclut que le système (15) sans second membre ($U_k = U_{ijk} = 0$) conduit à des fonction u, u_{ij} harmoniques.

Ce système (15) sans second membre équivaut à une double condition:

a) une condition de M. Volterra qui exprime que la fonction de point u est conjuguée à la fonction de variété à $n - 2$ dimensions

$$(18) \quad I_2 = \int \sum_{(ij)} u_{ij} d\sigma_{ij}$$

— où $d\sigma_{ij}$ sont les éléments de volume à $n - 2$ dimensions.

Cette condition est

$$(19) \quad \frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\delta I_2}{\delta p_{n-i}}$$

p_i, p_{n-i} sont deux éléments à 1 et $n - 1$ dimensions, orthogonaux, $\frac{\delta I_2}{\delta p_{n-i}}$ est la dérivée fonctionnelle de I_2 suivant l'élément p_{n-i} .

Elle équivaut à l'intégrale de Cauchy:

$$(20) \quad \int_{\Sigma} \left[u n_i + \sum_j u_{ij} n_j \right] d\sigma = 0$$

sur toute Σ à $(n - 1)$ dimensions fermée.

b) une condition supplémentaire qui exprime que

$$(21) \quad H_2 = \iint_{S(c_0, c_1)} \sum_{ij} u_{ij} dx_i dx_j$$

est une fonction des deux courbes c_0, c_1 qui delimitent la surface arbitraire S .

Puisque

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[u \sum_i v_i n_i + \sum_{ij} u_{ij} v_i n_j \right] d\sigma + \\ & + \int_{\Omega} \left[\sum_i v_i U_i + u \operatorname{div} v + \sum_{ij} u_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\omega = 0 \\ & \int_{\Sigma} \left[u_{ij} \sum_k v_k n_k + \sum_k \begin{vmatrix} u & u_{ki} & u_{kj} \\ n_k & n_i & n_j \\ v_k & v_i & v_j \end{vmatrix} \right] d\sigma + \\ & + \int_{\Omega} \left[\sum_k v_k U_{ijk} + v_j U_i - v_i U_j + u_{ij} \operatorname{div} v + \sum \begin{vmatrix} u & u_{ki} & u_{kj} \\ \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ v_k & v_i & v_j \end{vmatrix} \right] d\omega = 0. \end{aligned} \right.$$

On conclut que

$$(23) \quad + s_m u_p = \int_{\Sigma} \left[u_M \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{n}_M)}{\overline{MP}^m} + \sum_{ij} u_{ijM} \frac{\vec{MP}_i \cdot \vec{n}_{jM}}{\overline{MP}^m} \right] d\sigma_M + \int_{\Omega} \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{U}_M)}{\overline{MP}^m} d\omega_M$$

(où \vec{MP}_i est la composante suivant ox_i de \vec{MP} et U_i celle de \vec{U})

$$(23') \quad + s_m u_{ijP} = \int_{\Sigma} \left[u_{ijM} \frac{(\vec{MP} \cdot \vec{n}_M)}{\overline{MP}^m} + \sum_k \frac{1}{\overline{MP}^m} \begin{vmatrix} u_M & u_{kiM} & u_{kjM} \\ n_{kM} & n_{iM} & n_{jM} \\ \vec{MP}_k & \vec{MP}_i & \vec{MP}_j \end{vmatrix} \right] d\sigma_M + \\ + \int_{\Omega} \left[\frac{\sum \vec{MP}_k U_{ijkM}}{\overline{MP}^m} + \frac{\vec{MP}_j U_i - \vec{MP}_i U_j}{\overline{MP}^m} \right] d\omega_M.$$

Ces formules généralisent l'intégrale de M. Pompeiu et pour $U_i = U_{ijl} = 0$ la formule de Cauchy.

3. Soit alors le système

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = U \\ & \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_{ijk}}{\partial x_k} = U_{ij} \\ & \frac{\partial u_{jkl}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{kli}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{lij}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{ijk}}{\partial x_l} = U_{ijkl} \end{aligned} \right.$$

construit à l'aide des systèmes (16) et (17); u_{ijk} sont complètement anti-symétriques. La conditions d'intégrabilité est

$$(25) \quad \frac{\partial U_{ijkl}}{\partial x_m} + \frac{\partial U_{jklm}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{klmi}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{lmij}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{mijk}}{\partial x_l} = 0.$$

Les laplaciens sont formés de la manière suivante:

$$(26) \quad \begin{cases} \Delta u_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} \\ \Delta u_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial U_{ki}}{\partial x_j} - \sum_l \frac{\partial U_{ijkl}}{\partial x_l}. \end{cases}$$

Le système provient:

a) en conjuguant les fontions de ligne

$$(27) \quad \begin{cases} I_3 = \int \sum_{(ijk)} u_{ijk} d\sigma_{ijk} \\ H_1 = \int \sum_i u_i dx_i \end{cases}$$

au sens de M. Volterra

$$(28) \quad \frac{\delta H_1}{\delta p_2} = \frac{\delta I_3}{\delta p_{n-2}}$$

ou bien écrivant l'intégrale de Cauchy

$$(29) \quad \int [u_i n_j - u_j n_i + \sum u_{ijk} n_k] d\sigma = 0;$$

b) en écrivant les deux conditions supplémentaires

$$(30) \quad \begin{cases} \int \sum_{ijk} u_{ijk} dx_i dx_j dx_k = 0 \\ \int \left[\sum_i u_i n_i \right] d\sigma = 0. \end{cases}$$

On peut donner des systèmes de formules du type Cauchy-Pompéiu.

4. À partir de (25) et (26) construisons

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = U_i \\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j} - \sum_l \frac{\partial u_{ijkl}}{\partial x_l} = U_{ijk} \\ \frac{\partial u_{ijkl}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_{jklm}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{klmi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{lmij}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_{mijk}}{\partial x_l} = U_{ijklm} \end{cases}$$

u_{ij}, u_{ijkl} étant complètement antisymétriques. Si les U sont nuls, les u sont harmoniques. Ce système provient des deux conditions suivantes :

a)

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_2 = \int \sum_{(ij)} u_{ij} d\sigma_{ij} \\ I_4 = \int \sum_{(ijkl)} u_{ijkl} d\sigma_{ijkl} \\ H_2 = \int \sum_{(ij)} u_{ij} dx_i dx_j \end{array} \right.$$

et u sont conjuguées au sens de M. Volterra :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial p_1} = \frac{\delta I_2}{\delta p_{n-1}} \\ \frac{\delta H_2}{\delta p_2} = \frac{\delta I_4}{\delta p_{n-2}} \end{array} \right.$$

b) Condition supplémentaire relative à H_4

$$(34) \quad \int \sum_{(ijkl)} u_{ijkl} dx_i dx_j dx_k dx_l = 0.$$

5. On voit comment à partir des conditions d'intégrabilité et de la forme des laplaciens pour un système, on en déduit un autre. Pour tous ces systèmes on peut écrire une intégrale de Cauchy et une formule de Cauchy-Pompéiu.

L'exposé qui précède montre que la méthode proposée diffère à peine de celle de M. Volterra. Notre généralisation considère comme essentielles deux propriétés des fonctions monogènes.

a) le fait que la partie réelle et imaginaire sont deux fonctions conjuguées. L'extension à l'espace à m dimensions est donnée par la manière de conjuguer les fonctions de lignes, due à M. Volterra.

b) le fait que la partie réelle et imaginaire sont des fonctions harmoniques. Cette propriété est traduite par la supposition que les composantes u d'une fonction qui doit généraliser les fonctions monogènes doivent satisfaire à un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui a pour conséquence l'harmonicité de leurs intégrales. Ce système, généralisation du système de Cauchy (1) est de la forme

$$(35) \quad U = Fu = 0$$

où F est un opérateur à dérivées partielles du premier ordre, qui conduit

des fonctions u aux fonctions U (en nombre différent), tel qu'il existe un autre opérateur \bar{F} donnant lieu à

$$(36) \quad \bar{F}F \equiv \Delta.$$

Ces systèmes contiennent comme cas particuliers les systèmes étudiés dans cette Note et les systèmes d'équations de M. Dirac⁽¹⁾ pour la mécanique ondulatoire de l'électron tournant (lorsque $\bar{F} \equiv F$); leur étude sera développée dans un autre travail.

Matematica. — *L'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue et deux variables indépendantes.* Nota⁽²⁾ di M. KOURENSKY, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. J'ai étudié l'intégration de l'équation $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ dans mes articles précédents⁽³⁾. Nous avons obtenu le résultat suivant. Si nous prenons l'équation nouvelle

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.}$$

et si nous recherchons les conditions de compatibilité du système de ces deux équations, nous en viendrons à la condition d'annuler les deux déterminants du 4^{ème} ordre de la matrice connue; c'est la matrice (4) de ma Note précédente dans ce Journal.

Il faut partir d'un déterminant non nul parmi les 40 déterminants du 3^{ème} ordre Δ_{pq}^r ($r = 1, \dots, 4$; $p, q = 1, \dots, 5$, $p \neq q$), où r, p, q signifient, que dans la matrice sont effacées la $r^{\text{ème}}$ ligne horizontale et les $p^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ colonnes. Ensuite il faut égaler à zéro les déterminants du 4^{ème} ordre, qu'on peut former par l'adjonction à Δ_{pq}^r d'une horizontale et d'une colonne.

Étant posé $X = \frac{\partial F}{\partial x}, \dots, Q = \frac{\partial F}{\partial q}$; et $(rs), [xr], \dots$ les jacobians de ma Note précédente;

(1) Voir mes Notes aux « Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 191, 1930 pp. 984 et 1292.

(2) Pervenuta all'Accademia il 29 ottobre 1931.

(3) M. KOURENSKY, « Atti della R. Acc. Naz. dei Lincei (Rendiconti) », vol. X, 1929, pp. 148-154; *Traité de la théorie d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1^{er} et du 2^{me} ordres avec plusieurs fonctions inconnues*, I, « Mémoires de l'Acad. des Sc. d'Ukraine », n. 11, 1931, pp. 72-74, 76-84.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \end{vmatrix} = (rs) ; \quad \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dr} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{d\Phi}{dr} \end{vmatrix} = [xr], \dots$$

$$(1) \quad \frac{dF}{dx} \equiv \Xi = X + Zp + Pr + Qs ; \quad \frac{dF}{dy} \equiv H = Y + Zp + Ps + Qt,$$

nous obtiendrons les conditions de compatibilité pour une quelconque $\Delta_{pq}^r \neq 0$, si nous écrivons l'égalité des rapports suivants :

$$(2) \quad \frac{(rt)}{(rs)} = \frac{[rx] + [sy]}{[ry]} = \frac{[yt]}{[rx]} = \frac{[tx]}{[ty] + [sx]} = \frac{(ts)}{(tr)};$$

le nombre des combinaisons possibles des deux relations est 10.

La détermination de la fonction Φ se réduit à l'intégration d'un système de deux équations linéaires du 1^{er} ordre, q'on peut obtenir de l'égalité de trois rapports (2); nous indiquons ces rapports par λ . Le système des équations linéaires dépend d'une des racines λ_1, λ_2 de l'équation quadratique connue. Les formes explicites des systèmes de deux équations linéaires ont été données dans mes articles cités.

Les déterminants $(rs), [xr], \dots$ sont les déterminants de la matrice, qui contient deux lignes horizontales est cinq colonnes.

Comme on sait⁽¹⁾, parmi les 10 déterminants d'une telle matrice il existe $C_2^2 + 2 \cdot 3 = 7$, c. à d. 7 relations indépendantes du second degré, ce qui donne la possibilité d'écrire encore $C_8^2 - C_5^2$, c. à d. 18 combinaisons pour deux conditions de compatibilité des équations $F = 0$; $\Phi = \text{const.}$

Pour déterminer la fonction χ des relations

$$(3) \quad dp = rdx + sdy ; \quad dq = sdx + tdy ; \quad d\chi = pdx + qdy,$$

il faut trouver des intégrales $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, qui soient compatibles avec l'équation proposée $F = 0$. On peut vérifier les conditions de compatibilité ou pour chaque couple des trois équations, ou à la fois pour les trois. Dans le premier cas il faut étudier par la méthode précédente la compatibilité du couple $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$, vu que $\Phi_1 = C_1$, $F = 0$ et $\Phi_2 = C_2$, $F = 0$ sont compatibles. Dans le deuxième cas, quand le système est donné, par exemple, sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 ; & F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ & \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.}, \end{cases}$$

(1) HAMBURGER, «Crelle Journ.», Bd. 100, 1886, p. 390; E. PASCAL, *Die Determinanten*, Leipzig, 1900, pp. 115-124; M. KOURENSKY, «Mémoires de l'Acad. des Sc. d'Ukraine», t. V, liv. 3, 1927, pp. 114-119.

on écrit les conditions de compatibilité sous la forme⁽¹⁾:

$$(5) \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, x, t}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{y, s, t}\right) ; \quad D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, s, x}\right) = D\left(\frac{F_1, F_2, \Phi}{r, y, t}\right).$$

Tout ce qui se rapporte aux conditions de compatibilité de deux équations peut être aussi généralisé pour le système (4).

§ 2. Pour l'intégration de l'équation $F(x, y, z, p, q, r, t) = 0$, nous chercherons une deuxième équation

$$(6) \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, t) = \text{const.},$$

compatible avec l'équation proposée $F = 0$. Des 40 déterminants Δ_{pq}^r de la matrice 12 déterminants disparaissent identiquement. Les 8 déterminants $\Delta_{12}^1, \Delta_{12}^2 ; \Delta_{13}^3, \Delta_{13}^4 ; \Delta_{14}^1, \Delta_{14}^2 ; \Delta_{15}^3, \Delta_{15}^4$ conduisent à des équations impossibles, comme, par exemple, pour le premier des ces déterminants nous aurons $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0, (rt) \neq 0$, tandis que les déterminants correspondants du 4^{ème} ordre conduisent à l'équation $(rt) = 0$. L'hypothèse qu'un des 4 déterminants $\Delta_{24}^1, \Delta_{24}^2 ; \Delta_{35}^3, \Delta_{35}^4$ soit $\neq 0$ conduit aussi à des conditions impossibles. P. ex., le premier couple donne les inégalités suivantes:

$$\frac{d\Phi}{dx} \neq 0 \quad \text{et} \quad (rt) \neq 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dF}{dx} \neq 0 \quad \text{et} \quad (rt) \neq 0,$$

et en même temps l'égalité à zéro des déterminants correspondants du 4^{ème} ordre donne un système d'équations qui contredisent les inégalités précédents:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\Phi}{dx} = 0 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Ainsi, nous arrivons à la considération des 16 déterminants réstants. Si

$$(7) \quad \Delta_{23}^1 \neq 0, \quad \text{ou} \quad \Delta_{23}^2 \neq 0, \quad \text{c. à d.} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0, \quad [yt] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0, \quad [yt] \neq 0$$

les conditions de compatibilité s'écrivent: $[xr](rt) = 0 ; \quad [yt](rt) = 0$; par conséquent la recherche de l'équation $\Phi_1 = C_1$ se réduit à l'intégration d'une équation linéaire seulement

$$(8) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

ou à la détermination d'une intégrale particulière du système des équations linéaires

(1) A. R. FORSYTH, *Theory of differential equations*, vol. VI, Cambridge, 1906, pp. 325-327.

$$(I) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad T \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Tp \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + Tr \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Ts \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Au cas de $\Delta_{23}^3 \neq 0$ ou $\Delta_{23}^4 \neq 0$, c. à d.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0, [xt] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0, [xt] \neq 0,$$

nous viendrons aux conditions de compatibilité $[xt](rt) = 0$; $[yt](rt) = 0$, c. à d. nous aurons l'équation (8) et le système de deux équations sous la forme :

$$(II) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad T \frac{\partial \Phi}{\partial v} + Tq \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + Ts \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Ti \frac{\partial \Phi}{\partial q} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Quand

$$(9) \quad \Delta_{25}^1 \neq 0, \text{ ou } \Delta_{25}^2 \neq 0, \text{ c. à d. } \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0, [yr] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0, [yr] \neq 0;$$

$$(10) \quad \Delta_{25}^3 \neq 0 \text{ ou } \Delta_{25}^4 \neq 0, \text{ c. à d. } \frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0, [xt] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0, [xt] \neq 0$$

les conditions de compatibilité seront: $[xr](rt) = 0$; $[yr](rt) = 0$; l'équation linéaire ne change pas, mais le système de deux équations linéaires pour le cas (9) est

$$(III) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Rp \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + Rr \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Rs \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

et pour le cas (10) s'écrit :

$$(IV) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad ; \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Rq \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + Rs \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Rt \frac{\partial \Phi}{\partial q} - H \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0.$$

Quand $\Delta_{34}^1 \neq 0$ ou $\Delta_{34}^2 \neq 0$, c. à d.

$$(11) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0, [yt] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0, [yt] \neq 0;$$

$$(12) \quad \Delta_{34}^3 \neq 0 \text{ ou } \Delta_{34}^4 \neq 0, \text{ c. à d. } \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0, [xr] \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0, [xr] \neq 0,$$

nous avons

$$(13) \quad [xr](rt) = 0 \quad ; \quad [yt](rt) = 0.$$

Les inégalités (10) donnent l'équation (8) et le système (III), les inégalités (12) conduisent à l'équation (8) et au système (II). Quand

$$(14) \Delta_{45}^1 \neq 0 \text{ ou } \Delta_{45}^2 \neq 0, \text{ c. à d. } \frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0, [yr] \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0, [yr] \neq 0;$$

$$(15) \Delta_{45}^3 \neq 0 \text{ ou } \Delta_{45}^4 \neq 0, \text{ c. à d. } \frac{\partial \Phi}{\partial r} \neq 0, [xr] \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial r} \neq 0, [xr] \neq 0,$$

nous avons $[yr](rt) = 0$; $[xr](rt) = 0$.

Pour tous ces cas d'inégalités l'équation (8) ne change pas, mais le système des équations linéaires pour le cas (14) est (III), pour le cas (15) est (IV).

Par conséquent, pour tous les cas, l'équation $\Phi_1 = C_1$, compatible avec l'équation proposée $F = 0$, se détermine par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dt}{dr} + \frac{R}{T} = 0.$$

Comme l'équation (8) a une seule intégrale $\Phi_1 = C_1$, pour trouver la deuxième équation $\Phi_2 = C_2$, compatible avec les équations $\Phi_1 = C_1$, $F = 0$, on peut chercher l'intégrale particulière d'un des systèmes (I)–(IV) ou du système de la forme (5). Si d'un des 4 systèmes (I)–(IV) nous trouvons l'intégrale $\Phi_2 = C_2$, qui ne contient pas la variable s , et si les équations $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ sont compatibles, le résultat de l'élimination des variables r, t des équations $F = 0$, $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ conduit à l'intégrale intermédiaire

$$f(x, y, z, p, q, C_1, C_2) = 0.$$

Si tous les quatre systèmes (I)–(IV) sont incompatibles, il faut chercher la troisième équation $\Psi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.}$ du système de la forme (5), et la fonction inconnue se déterminera d'après les relations (3).

§. 3. Pour l'intégration de l'équation, $F(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, nous pouvons chercher une deuxième équation

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.},$$

compatible avec l'équation $F = 0$. La première condition de compatibilité est $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$. La deuxième condition est :

$$(16) \quad (st) \{ [xs] + [yt] \} = 0.$$

Cette condition est satisfaite, quand se vérifie une au moins des équations

$$\text{c. à d.} \quad (st) = 0 \quad ; \quad [xs] + [yt] = 0,$$

$$(17) \quad S \frac{\partial \Phi}{\partial t} - T \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0;$$

$$(18) \quad S \frac{\partial \Phi}{\partial x} + T \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Sp + Tq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (Sr + Ts) \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \\ + (Ss + Tt) \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial s} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

A la condition de compatibilité (16) correspondent les 16 déterminants Δ_{2p}^r ($r = 1, \dots, 4$; $p = 1, 3, 4, 5$) ; les 4 déterminants $\Delta_{21}^1, \Delta_{21}^2, \Delta_{21}^3, \Delta_{21}^4$ ont le multiplicateur (st) et, par conséquent, quand un des déterminants est nul, en même temps le système des équations $F = 0$, $\Phi = \text{const.}$ est compatible.

Alors, l'équation $\Phi_1 = C_1$, compatible avec l'équation donnée $F = 0$, se détermine par l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dt}{ds} + \frac{S}{T} = 0.$$

Pour trouver la deuxième équation $\Phi_2 = C_2$, compatible avec les équations $F = 0$, $\Phi_1 = C_1$, on peut chercher l'intégrale particulière du système d'équations (17)–(18) ou du système de la forme (5). On peut, enfin, se borner à la recherche de deux intégrales particulières compatibles $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ d'une seule équation linéaire (18); ces intégrales ne doivent pas contenir la variable r .

Pour l'intégration de l'équation $F(x, y, z, p, q, r, s) = 0$ nous avons la première condition de compatibilité sous la forme $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. La deuxième condition de compatibilité est

$$(19) \quad (rs) \{ [xr] + [ys] \} = 0.$$

Cette condition est remplie, quand est satisfaite au moins une des deux équations $(rs) = 0$; $[xr] + [ys] = 0$, c. à d.

$$(20) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial s} - S \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

$$(21) \quad R \frac{\partial \Phi}{\partial x} + S \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Rp + Sq) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (Rr + Ss) \frac{\partial \Phi}{\partial p} + (Rs + St) \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \\ - \Xi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - H \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0.$$

L'équation $\Phi_1 = C_1$ se détermine par l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dr}{ds} + \frac{S}{R} = 0;$$

on peut chercher l'équation $\Phi_2 = C_2$ sous la forme d'une intégrale particulière du système des équations (20)–(21) ou du système de la forme (5). On peut

chercher aussi deux équations compatibles $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ comme intégrales particulières, ne contenant pas la variable t , d'une seule équation linéaire (21).

§ 4. Pour l'intégration de l'équation $F(x, y, z, p, q, r) = 0$, par l'adjonction de l'équation $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{const.}$, nous avons la première condition de compatibilité sous la forme $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. La deuxième condition de compatibilité conduit à une intégrale particulière, qui contient la variable s , de l'équation linéaire

$$R \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Rp \frac{\partial \Phi}{\partial z} + Rr \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Rs \frac{\partial \Phi}{\partial q} - E \frac{\partial \Phi}{\partial r} - H \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

et nous pouvons chercher deux équations $\Phi_1 = C_1$, $\Phi_2 = C_2$ comme les intégrales du système d'équations différentielles ordinaires.

Pour l'équation $F(x, y, z, p, q, t) = 0$ nous aurons la condition $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$ et les intégrales particulières, qui contiennent la variable s , de l'équation

$$T \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Tq \frac{\partial \Phi}{\partial z} + Ts \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Tt \frac{\partial \Phi}{\partial q} - E \frac{\partial \Phi}{\partial s} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Pour l'équation $F(x, y, z, p, q, s) = 0$ nous obtiendrons la deuxième équation compatible $\Phi = \text{const.}$, comme l'intégrale particulière, qui contient la variable t et ne contient pas r , de l'équation linéaire

$$S \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Sp \frac{\partial \Phi}{\partial z} + Sr \frac{\partial \Phi}{\partial p} + Ss \frac{\partial \Phi}{\partial q} - E \frac{\partial \Phi}{\partial s} - H \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

ou l'intégrale particulière, qui contient r et ne contient pas t , de l'équation

$$S \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Sq \frac{\partial \Phi}{\partial z} + Ss \frac{\partial \Phi}{\partial p} + St \frac{\partial \Phi}{\partial q} - E \frac{\partial \Phi}{\partial r} - H \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0.$$

Matematica. — *Sur les fonctions n -métaharmoniques.* Nota ⁽¹⁾
di M. GHERMANESCO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Dans un Mémoire relativement récent ⁽²⁾, M. F. Sbrana détermine deux solutions fondamentales de l'équation

$$(1) \quad \Delta u = \lambda u$$

dont il fait usage ensuite pour calculer la moyenne de la fonction u sur une hypersphère de rayon R et de centre P , contenus dans le domaine D d'existence de la fonction u .

Je vais considérer l'équation

$$(2) \quad \Delta^n u + \lambda_1 \Delta^{n-1} u + \lambda_2 \Delta^{n-2} u + \dots + \lambda_n u = 0$$

dont je vais déterminer n solutions fondamentales, régulières dans D et autres n solutions fondamentales, régulières dans D , à l'exception du point P , où elles présentent une discontinuité de la même nature que la fonction r^{2-p} , r étant la distance du point P à un point quelconque de D et p étant le nombre de dimensions de l'espace dans lequel est considéré D . Nous déterminerons aussi ces $2n$ fonctions de telle manière qu'elles soient des fonctions de la distance r seulement.

2. Soit v une telle fonction; on trouve facilement, en posant $r^2 = 4\rho$

$$\Delta v = \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{2-\frac{p}{2}} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{\frac{p}{2}-1} v \right) \right]$$

et en général

$$\Delta^k v = \frac{d^k}{d\rho^k} \left[\rho^{k+1-\frac{p}{2}} \frac{d^k}{d\rho^k} \left(\rho^{\frac{p}{2}-1} v \right) \right]$$

l'équation (2) devient, avec $\lambda_0 = 1$

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{d^{n-k}}{d\rho^{n-k}} \left[\rho^{n-k+1-\frac{p}{2}} \frac{d^{n-k}}{d\rho^{n-k}} \left(\rho^{\frac{p}{2}-1} v \right) \right] = 0.$$

(1) Nella seduta del 1° novembre 1931.

(2) F. SBRANA, *Sulle funzioni metaarmoniche in n variabili*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LIII, 1929, pp. 428-436.

Pour intégrer (3) cherchons à y satisfaire par une solution de (1) ou ce qui est la même chose, de (3) pour $n = 1$, qui se réduit alors à l'équation de Bessel

$$(4) \quad \rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{p}{2} \frac{dv}{d\rho} = \lambda v.$$

Une solution de (4) satisfait à (3) si λ est racine de l'équation

$$(5) \quad x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \lambda_2 x^{n-2} + \dots + \lambda_n = 0.$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ces racines, supposées distinctes on a n intégrales particulières de (3) données par la fonction $J(\gamma, \rho)$ de Bessel, que nous désignerons par

$$(\alpha) \quad v_i = J\left(\frac{p}{2}, \alpha_i \rho\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

solutions régulières dans D. Les solutions, ayant une singularité dans P, seront alors

$$(\beta) \quad w_i = (\alpha_i \rho)^{1-\frac{p}{2}} J\left(2 - \frac{p}{2}, \alpha_i \rho\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si p est impair. Si p est pair, on trouvera une seconde intégrale de (4) par la méthode classique, en cherchant la limite, pour $\varepsilon = 0$ de l'expression

$$Y_i = \lim_{\varepsilon=0} \frac{(\alpha_i \rho)^{1-\frac{p}{2}+\varepsilon} J\left(2 - \frac{p}{2} + \varepsilon, \alpha_i \rho\right) - (\alpha_i \rho)^{-\varepsilon} J\left(\frac{p}{2} - \varepsilon, \alpha_i \rho\right)}{\varepsilon}$$

on trouve

$$(\gamma) \quad w'_i = \sum_{m=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} - m - 1\right) (\alpha_i \rho)^{m+1-\frac{p}{2}}}{\Gamma(m+1)} + \\ + \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha_i \rho)^m}{\Gamma(m+1) \Gamma\left(m + \frac{p}{2}\right)} \left[2 \log(\alpha_i \rho) - \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} - \frac{\Gamma'\left(m + \frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{p}{2}\right)} \right]$$

qui présente la même singularité dans P.

Si l'équation (5) a des racines multiples, on aura pour une racine α , de multiplicité k , $2k$ intégrales particulières, savoir

$$(\gamma') \quad v'_i = \frac{\partial^j v_i}{\partial \alpha^j} \quad , \quad w''_i = \frac{\partial^j w_i}{\partial \alpha^j} \quad , \quad w'''_i = \frac{\partial^j w'_i}{\partial \alpha^j} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1)$$

on prendra w'_i ou w'''_i suivant que p est impair ou pair.

Réciproquement, on démontre que les fonctions données par (γ') sont des intégrales de (3) si, en désignant par $D_n(x)$ le premier membre de (5), on a

$$\frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} [\alpha^m D_n(\alpha)] = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

ce qui conduit aux relations

$$\frac{d^{k-i}}{d\alpha^{k-i}} [D_n(\alpha)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

3. Soient maintenant $U(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et $V(x_1, x_2, \dots, x_p)$ deux fonctions régulières dans le domaine D , c'est à dire continues, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au $2n^e$ ordre.

En posant

$$(B) \quad \begin{cases} \Phi_k = \Delta^{n-k} U + \lambda_1 \Delta^{n-k-1} U + \dots + \lambda_{n-k} U \\ \Psi_k = \Delta^{n-k} V + \lambda_1 \Delta^{n-k-1} V + \dots + \lambda_{n-k} V \end{cases}$$

et en désignant par $F_n(u)$ le premier membre de (2), nous avons démontré⁽¹⁾ la formule

$$(C) \quad \int_D [VF_n(U) - UF_n(V)] d\omega_p + \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \left(\Delta^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} - \Delta^{k-1} U \frac{d\Psi_k}{dN} \right) d\sigma_p = 0$$

Σ étant la frontière de D . Si U et V sont deux fonctions n -métaharmoniques, c'est à dire, solutions de (2), régulières dans D et sans point singulier, l'intégrale de volume disparaît et il reste

$$(D) \quad \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \left(\Delta^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} - \Delta^{k-1} U \frac{d\Psi_k}{dN} \right) d\sigma_p = 0.$$

4. Supposons que la fonction V ait une singularité des celles que nous avons considérées plus haut au point P , c'est à dire, qu'elle soit de la forme

$$(a) \quad A_1 \rho^{1-\frac{p}{2}} + B_1$$

A_1 et B_1 étant des fonctions de ρ , régulières en P et $A_1(P)$ étant égale à un; nous pouvons appliquer la formule générale (D) au domaine D' , limité par Σ et par une hypersphère S , de centre P et de rayon très petit ρ_1 , qu'on fait ensuite tendre vers zéro. On aura

(1) « Comptes-Rendus », Paris, to. 193, 1931, pp. 477-479.

$$(D') \quad \sum_{k=1}^n \int_S \left(\Delta^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} - \Delta^{k-1} U \frac{d\Psi_k}{dN} \right) d\sigma_p + \\ + \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \left(\Delta^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} - \Delta^{k-1} U \frac{d\Psi_k}{dN} \right) d\sigma_p = 0.$$

Or, si V est de la forme (a), les $\Delta^i V$ commenceront par un terme en ρ_r de degré supérieur à $(2 - p)$; les intégrales

$$\int_S \Delta^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} d\sigma_p$$

tendent donc vers zéro, en même temps que ρ_r . D'autre part, si V est solution de (3), donnée par (4), on a

$$\Psi_k = (\lambda^{n-k} + \lambda_1 \lambda^{n-k-1} + \dots + \lambda_{n-k}) V = a_k V$$

λ étant l'une des racines de l'équation (5). On aura

$$\lim_{\rho_1=0} \int_S \Delta^{k-1} U \frac{d\Psi_k}{dN} d\sigma_p = -a_k (p-2) S_p \Delta^{k-1} U(P)$$

S_p étant la surface de l'hypersphère qui a l'unité pour rayon. La relation (D') devient

$$(F) \quad \sum_{k=1}^n a_k \Delta^{k-1} U(P) = \frac{1}{(p-2) S_p} \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \left(a_k \Delta^{k-1} U \frac{dV}{dN} - \lambda^{k-1} V \frac{d\Phi_k}{dN} \right) d\sigma_p$$

qui équivaut à n relations, puisque V est l'une des n solutions fondamentales de (2), données par (β) , (γ) ou (γ') , suivant le cas.

5. Supposons maintenant qu'il existe une fonction

$$G(M, P) = g(M, P) + V$$

qui satisfasse à l'équation (2) et qui soit nulle, ainsi que ses laplaciens $\Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^{k-1}$ sur Σ . La fonction

$$g(M, P) = G(M, P) - V$$

étant n -métaharmonique et régulière dans D , on peut lui appliquer la formule (D), ce qui donne

$$0 = \frac{1}{(p-2) S_p} \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \left[\Delta^{k-1} U \left(\frac{dG_k'}{dN} - a_k \frac{dV}{dN} \right) - (\Delta^{k-1} G - \lambda^{k-1} V) \frac{d\Phi_k}{dN} \right] d\sigma_p$$

qui ajoutée à (F) et tenu compte que G et les $\Delta^i G$ sont nuls sur Σ , nous conduit à la relation fondamentale

$$(G) \quad \sum_{k=1}^n a_k \Delta^{k-1} U(P) = \frac{1}{(p-2) S_p} \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \Delta^{k-1} U \frac{dG'_k}{dN} d\sigma_p$$

avec

$$G'_k = \Delta^{n-k} G + \lambda_1 \Delta^{n-k-1} G + \dots + \lambda_n G.$$

Il suffit maintenant de remplacer V successivement par les n solutions fondamentales de (2), pour avoir un système linéaire en

$$U(P), \Delta U(P), \dots, \Delta^{n-1} U(P),$$

qui nous fera connaître ces fonctions.

On a résolu de cette manière le problème de Dirichlet pour l'équation (2).

Trouver une intégrale de l'équation (2) régulière dans D et se réduisant, ainsi que les laplaciens $\Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^{n-1} u$, à des valeurs données sur la frontière Σ de D .

En désignant par A_i la somme du deuxième membre de (G) pour $\lambda = \alpha_i$, de même que par a_{ik} les a_k correspondants, on a

$$(H) \quad U(P) = \frac{(-1)^n}{(p-2) S_p \nabla_{\alpha}} \begin{vmatrix} A_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

∇_{α} étant le déterminant de Vandermonde des racines α_i .

La fonction $G(M, P)$ peut être déterminée en suivant la méthode de E. E. Levi⁽¹⁾ ou de M. M. Gevrey⁽²⁾, avec des simplifications notables, dues à la particularité du cas que nous avons étudié.

6. On peut procéder encore autrement, en cherchant une solution de (2), nulle, ainsi que $\Delta u, \Delta^2 u, \dots, \Delta^{n-1} u$ sur Σ à l'aide d'une équation intégrale en l'écrivant

$$(2') \quad \Delta^n u + \lambda [\lambda_1 \Delta^{n-1} u + \lambda_2 \Delta^{n-2} u + \dots + \lambda_n u] = 0$$

(1) E. E. LEVI, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », XXIV, 1907.

(2) M. GEVREY, « Journal de Mathématiques », 1930 et « C.-R. », Paris, tomes 173,

et en posant $\Delta^n u = v$; on obtient

$$\Delta^{n-i} u = - \frac{1}{(p-2) \omega_p} \int_D v(P) G_i(M, P) d\omega_p \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

avec

$$G_i(M, P) = \int_D G_1(M_1, P_1) G_1(P_1, P_2) \dots G_1(P_i, P) d\omega_{p_1} d\omega_{p_2} \dots d\omega_{p_i}$$

$G_1(M, P)$ étant la fonction classique de Green pour les fonctions harmoniques. L'équation (2') devient

$$(v) \quad v(M) + \lambda \int_D \Gamma_1(M, P) v(P) d\omega_p = 0$$

avec

$$\Gamma_1(M, P) = - \frac{1}{(p-2) \omega_p} [\lambda_1 G_1(M, P) + \\ + \lambda_2 G_2(M, P) + \dots + \lambda_n G_n(M, P)].$$

Mais l'équation (v) n'a de solution que pour les valeurs de λ qui sont des pôles pour la résolvante et on voit facilement que les pôles sont réels et simples, Γ_1 étant symétrique.

7. Pour finir, reprenons l'application de M. F. Sbrana. Mettons dans (D) v_i , donnée par (α) , et dans (F) w_i , donnée par (β) au lieu de V . Il vient

$$\sum_{k=1}^n \int_D \left(\alpha_i^{k-1} v_i \frac{d\Phi_k}{dN} - a_{ik} \Delta^{k-1} U \frac{dv_i}{dN} \right) d\sigma_p = 0 \\ \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta^{k-1} U(P) = \frac{1}{(p-2) S_p} \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \Delta^{k-1} U \frac{dw_i}{dN} - \alpha_i^{k-1} w_i \frac{d\Phi_k}{dN} \right) d\sigma_p.$$

Supposons que le domaine D se réduise à une hypersphère de centre P et de rayon R ; on peut éliminer alors $\frac{d\Phi_k}{dN}$ entre ces relations et il vient, en remarquant avec F. Sbrana que

$$w_i \frac{dv_i}{dR} - v_i \frac{dw_i}{dR} = (p-2) \frac{\sigma(R)}{S_p} \quad \frac{d}{dN} = - \frac{d}{dR} \\ \frac{1}{\sigma(R)} \sum_{k=1}^n a_{ik} \int_D \Delta^{k-1} U d\sigma_p = v_i \sum_{k=1}^n a_{ik} \Delta^{k-1} U.$$

Donnons à i les valeurs $i = 1, 2, \dots, n$, on obtiendra un système linéaire

qui nous donnera les moyennes des fonctions $U, \Delta U, \dots, \Delta^{n-1} U$. En particulier, pour la moyenne μ de U , on obtiendra la relation

$$\begin{vmatrix} \mu & u & \Delta u & \Delta^2 u & \dots & \Delta^{n-1} u \\ v_1 & 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ v_2 & 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ v_n & 1 & \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

que nous avons trouvée à une autre occasion⁽¹⁾. Cette démonstration a l'avantage d'exclure l'analyticité de la fonction u .

Matematica (Geometria). — *La transformation T des congruences de droites*. Nota di S. FINIKOFF, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

La transformation asymptotique des surfaces emploie des congruences W pour obtenir la surface transformée. Or la congruence comme un être géométrique, elle même peut être l'objet de la transformation qui a beaucoup de ressemblance avec le procédé inventé par L. Bianchi.

Nous disons que deux congruences C et C_1 sont reliées par la transformation T si les droites qui joignent les foyers homologues des deux congruences touchent leurs nappes focales.

Quelle que soit la congruence C , il existe ∞ congruences transformées T , la congruence générale dépendant de deux fonctions d'un argument.

La transformation T conserve les congruences W et admet en ce cas le théorème de la permutabilité.

§ 1.

Soit $(x_1 x_2)$ une congruence C rapportée aux développables u, v . Les déplacements projectifs du tétraèdre Δ dont les deux sommets (x_1) et (x_2) coïncident avec les foyers du rayon $(x_1 x_2)$ et deux autres (x_3) et (x_4) sont situés dans ses plans focaux sont déterminés par le tableau⁽³⁾

(1) « Rendiconti dei Lincei », 1931.

(2) Nella seduta del 15 novembre 1931.

(3) Sur les congruences stratifiables, « Rend. Palermo », t. 53, p. 313, 1929. J'ai changé légèrement les notations

$$\frac{\rho \quad \sigma \quad Q \quad Q_1 \quad M \quad N \quad R \quad S \quad p \quad q}{\delta \quad \delta_1 \quad \Delta \quad \Delta_1 \quad m \quad n \quad -R \quad -N \quad -p \quad -q}.$$

$$(I) \begin{cases} x_{1u} = \delta x_2 & x_{1v} = p x_1 + q x_2 + x_3 \\ x_{2u} = q_1 x_1 + p_1 x_2 + x_4 & x_{2v} = \delta_2 x_1 \\ x_{3u} = m x_1 + n x_2 - q x_4 & x_{3v} = R x_1 + N x_2 - P x_3 - \Delta x_4 \\ x_{4u} = N_1 x_1 + R_1 x_2 - \Delta_1 x_3 - P_1 x_4 & x_{4v} = n_1 x_1 + m_1 x_2 - q_1 x_3. \end{cases}$$

En choisissant convenablement les fonctions p, q, p_1, q_1 nous plaçons les sommets $(x_3), (x_4)$ aux points d'intersection du rayon homologue de la congruence transformée C_1 avec les plans focaux de la congruence C .

Il suit de la définition de la transformation T que ces points sont les foyers du rayon (x_3, x_4) de la congruence transformée C_1 ainsi que des congruences complémentaires (x_1, x_3) et (x_2, x_4) . Le tableau (I) nous donne tout de suite la condition nécessaire et suffisante pour que les arêtes (x_1, x_2) et (x_3, x_4) du tétraèdre Δ engendrent deux congruences en transformation T

$$(2) \quad n = 0 \quad , \quad n_1 = 0 \quad , \quad N = 0 \quad , \quad N_1 = 0.$$

Admettons que la congruence C soit donnée par les composants des déplacements projectifs d'un tétraèdre Δ quelconque lié avec ses rayons, par exemple, du tétraèdre de Wilczynski avec les coefficients p, q, p_1, q_1 égaux à zéro, et surlignons les autres composants du tétraèdre choisi⁽¹⁾. Comme les composants des déplacements de chacun des autres tétraèdres Δ s'expriment par les composants du premier et par les quatre coordonnées p, q, p_1, q_1 du rayon (x_3, x_4) , les conditions (2) se transforment en un système d'équations différentielles

$$(3) \begin{cases} q_u + p_1 q + p \delta = \delta_v & q_{1u} + p \Delta_1 + p_1 q_1 = \Delta_{1v} - \bar{P} \Delta_1 - \bar{P}_1 q_1 \\ q_v + p_1 \Delta + p q = \Delta_u - \bar{P}_1 \Delta - \bar{P} q & q_{1v} + p q_1 + p_1 \delta_1 = \delta_{1u}. \end{cases}$$

Les équations (3) contiennent p et p_1 en termes finis. En les éliminant nous obtenons pour q et q_1 deux équations du premier ordre. On peut les résoudre par rapport aux dérivées q_u, q_{1u} à moins que $\delta_1 q - \Delta q_1$ ne soit nul. Le système (3) est vérifié par trois équations finies dont l'une est

$$\delta_1 q - \Delta q_1 = 0$$

si

$$\Delta \Delta_1 - \delta \delta_1 = 0 \quad , \quad (\log \delta_1)_{uv} = (\log \Delta)_{uv}.$$

Cela nous ramène aux congruences appartenant à un complexe linéaire⁽²⁾.

(1) Les quantités $\delta, \delta_1, \Delta, \Delta_1$ restent les mêmes pour tous les tétraèdres Δ aux mêmes sommets $(x_1), (x_2)$. Elles dépendent du choix des paramètres u, v et de la normalisation des coordonnées (x_1) et (x_2) .

(2) Loc. cit. (1), p. 348.

Inversement, quelle que soient deux congruences du même complexe linéaire, la congruence des tangentes communes de deux nappes quelconques de l'une et de l'autre des surfaces focales établit une correspondance entre leurs rayons qui est une transformation T.

En effet, si $(x_1 x_2)$ et $(x_3 x_4)$ sont les rayons correspondants et $(x_1 x_3)$ est le rayon de la congruence qui établit la correspondance en jeu, les points $(x_1), (x_2), (x_3)$ en sont les foyers, les plans $(x_1 x_2 x_4), (x_2 x_1 x_3), (x_3 x_2 x_4)$ y sont respectivement conjugués par rapport au complexe en question. (Le dernier, parce que $(x_2 x_3)$ et $(x_3 x_4)$ appartiennent au complexe). Les deux droites $(x_1 x_3)$ et $(x_2 x_4)$ sont donc réciproques, et le point (x_4) est conjugué au plan $(x_4 x_1 x_3)$; d'où suit que (x_4) est le second foyer du rayon $(x_3 x_4)$ ainsi que du rayon $(x_2 x_4)$ et le quadrilatère $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ engendre la configuration T.

THÉORÈME. — *Quelle que soit une congruence C donnée, il existe ∞ congruences transformées T, la congruence générale dépendant de deux fonctions d'un argument. La congruence d'un complexe linéaire peut être transformée en outre en chaque congruence du même complexe.*

§ 2.

Selon le beau théorème de M. Fubini⁽¹⁾, si les deux congruences sont en transformation T et correspondent par leurs développables, toutes les deux sont les congruences R composant un couple stratifiable conjugué, les congruences complémentaires de la configuration sont les congruences de M. Jonas.

Le théorème de M. Fubini suppose que la correspondance des développables est directe c.-à-d. les arêtes de rebroussement des développables correspondantes sont situées sur les deux nappes de la surface focale de la même congruence complémentaire.

Si les développables des congruences complémentaires correspondent inversement, le tableau (I) nous donne

$$\delta q_1 - \Delta_1 q = 0 \quad , \quad \delta_1 q - \Delta q_1 = 0.$$

Si q et q_1 sont égaux à zéro, les quatre congruences forment une suite de Laplace périodique à période 4. S'ils ne le sont pas, le choix convenable des paramètres u, v rend q égal à q_1 , d'où suit $\delta = \Delta_1$, $\delta_1 = \Delta$, donc⁽²⁾ les deux congruences appartiennent au même complexe linéaire, — à moins que les congruences complémentaires ne dégénèrent en génératrices rectilignes des deux surfaces gauches et la transformation T ne relie une congruence W à focales réglées avec elle-même.

(1) « Annali di Mat. » (4), t. 1, p. 241, 1924.

(2) Loc. cit. (1), p. 349.

THÉOREME. — *Les développables des deux congruences en transformation T correspondent inversement: 1° si la configuration T est une suite de Laplace périodique à période 4 ou bien; 2° si les deux congruences sont réciproques par rapport à un complexe linéaire.*

§ 3.

THÉOREME. — *La congruence transformée T d'une congruence W est une congruence W.*

La congruence (x_1, x_2) étant une congruence W, nous avons ⁽¹⁾

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$$

et les conditions d'intégrabilité du système (1) nous donnent

$$(m - m_1)(q\delta_1 - q_1\Delta) = 0$$

si

$$(4) \quad m = m_1,$$

les asymptotiques sur toutes les quatre nappes focales correspondent, toutes les quatre congruences sont des congruences W et la configuration est celle du théorème de permutabilité des transformations asymptotiques de Bianchi.

Le second facteur nul, les développables des congruences complémentaires correspondent et nous revenons aux configurations du § 2. Or la suite de Laplace périodique à période 4 contenant une congruence W, la congruence opposée l'est aussi et toutes les deux appartiennent au même complexe linéaire ⁽²⁾.

Donc, si la congruence primitive d'une transformation T est une congruence W, la congruence transformée l'est aussi et les congruences complémentaires le sont, à moins que ce ne soit la transformation de la congruence d'un complexe linéaire en une congruence du même complexe ou la transformation de la congruence W à focales réglées en elle-même.

La condition (4) elle-même nous conduit à la configuration de Bianchi, à moins que les quantités R, R₁ ne soient nulles, auquel cas les deux congruences en transformation T sont polaires-réciproques par rapport à un complexe linéaire.

Le couple des congruences stratifiables qui est un cas particulier de la configuration T est caractérisé par la condition

$$m + m_1 = 0.$$

(1) Loc. cit. (1), p. 332.

(2) Sur les suites de Laplace périodiques contenant une congruence W, « Comptes-Rendus », Paris, t. 188, p. 1647, 1929.

En la rapprochant de l'équation (4) nous voyons que m et m_1 sont égaux à zéro, donc les deux congruences sont les congruences R ⁽¹⁾. En rappelant le théorème sur la transformation des congruences W , nous verrons que *les seules congruences W stratifiables sont: 1° les congruences R ; 2° les congruences d'un complexe linéaire et 3° les congruences W à focales réglées.*

Cette dernière fait un couple stratifiable avec elle-même ⁽²⁾.

§ 4.

Une congruence $C(x_1 x_2)$ et ses deux transformées $T C_1(x_3 x_4)$ et $C'_1(x'_3 x'_4)$ données, s'il existe une congruence $C_2(\zeta_1 \zeta_2)$ qu'on peut atteindre en appliquant une transformation T convenable, soit à la congruence C_1 soit à la congruence C'_1 , nous disons que les deux transformation T sont permutables.

Comme les foyers (ζ_1) et (ζ_2) de la congruence C_2 sont évidemment situés dans les plans focaux des congruences C_1 et C'_1 et vice-versa, nous avons

$$(5) \quad \begin{cases} \zeta_1 = x_1 + \lambda [(p_1 - p'_1) x_3 - (q - q') x_4] \\ \zeta_2 = x_2 + \lambda [-(q_1 - q'_1) x_3 + (p - p') x_4] \end{cases}$$

où λ est une fonction auxiliaire et les composants du second tétraèdre sont indiqués par l'accent.

Il ne nous reste qu'à mettre en équation que les plans $(\zeta_1 \zeta_2 x_3)$ et $(\zeta_1 \zeta_2 x_4)$ sont les plans tangents des surfaces (ζ_1) et (ζ_2) c.-à-d. qu'ils contiennent le points $(\zeta_{1u}), (\zeta_{1v})$ et $(\zeta_{2u}), (\zeta_{2v})$ respectivement. Cela nous conduit à deux équations pour λ

$$(6) \quad \begin{cases} (\log \lambda)_u = p'_1 + P_1 + \lambda [m(p_1 - p'_1) + R_1(p - p')] \\ (\log \lambda)_v = p'_1 + P + \lambda [R(p_1 - p'_1) + m_1(p - p')] \end{cases}$$

Deux équations (6) ne sont pas, en général, compatibles, mais il existe des congruences qui admettent le théorème de permutabilité pour certaines transformations T . Les seules congruences dont toutes les transformations T sont permutables sont les congruences W .

Deux transformations T_1 et T_2 d'une congruence W données, le système (6) correspondant est complètement intégrable. Il existe donc ∞ congruences $(\zeta_1 \zeta_2)$ qu'on obtient en appliquant à la congruence primitive, soit le produit des transformations $T'_2 T_1$, soit le produit $T'_1 T_2$ où T_1 et T_2 sont les deux transformations fixes.

(1) Loc. cit. ⁽¹⁾, p. 336.

(2) *Congruences W ayant le long des rayons correspondants même complexe linéaire osculateur*, « Comptes-Rendus », Paris, t. 190, p. 999, 1930.

Les formules (5) montrent que, la constante de λ variant, les points (\tilde{x}_1) et (\tilde{x}_2) se déplacent le long des droites $(x_1 \tilde{x}_1)$ et $(x_2 \tilde{x}_2)$. Comme les rayons $(\tilde{x}_1 \tilde{x}_2)$ interceptent aussi les droites $(x_3 x'_3)$ et $(x_4 x'_4)$ qui sont situées dans les plans $(x_3 x'_3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2)$, $(x_4 x'_4 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2)$ respectivement, ils engendrent une demiquadrique D.

La configuration de 8 points $(x_1), (x_2), (x_3), (x_4), (x'_3), (x'_4), (\tilde{x}_1), (\tilde{x}_2)$ et 8 plans $(x_1 x_2 x_3 x'_3)$, $(x_3 x_1 x_4 \tilde{x}_1)$ etc. est une configuration 8_4 de Möbius. Les droites qui joignent deux sommets dans la même face engendrent, quand le polyèdre varie, une congruence W dont les deux nappes de la surface focale sont les surfaces — lieux des sommets pris ⁽¹⁾. Chaque face de la configuration est un plan tangent de la surface engendrée par son centre. La ligne d'intersection de deux plans voisins et la droite qui joint leurs centres engendrent un couple stratifiable, etc.

Cela nous donne un moyen de construire une transformation des couples de congruences stratifiables ⁽²⁾.

L'infinité de congruences intermédiaires C_i qui correspondent aux mêmes congruences C et C_2 forme un faisceau ⁽³⁾ de congruences transformées T. Les rayons homologues $(x_3 x_4)$ des toutes les congruences du faisceau composent la même demiquadrique D.

§ 5.

Une congruence W générale $(x_1 x_2)$ transformée en une congruence $(x_3 x_4)$, leurs transformées de Laplace $(x_1 y_1)$ et $(x_3 y_3)$ ne peuvent être reliées par aucune transformation T. La suite de Laplace de congruences R est une seule suite qui se transforme en une suite de Laplace, chaque surface de la suite étant liée avec la surface homologue de l'autre par une congruence de M. Jonas.

Nous désignons cette transformation sous le nom de transformation de M. Jonas. Elle est déterminée, les paramètres bien choisis, par le système

$$(7) \begin{cases} p_u = \delta \delta_1 - q q_1 & p_v = -p^2 - q \delta_1 - q_1 \delta + \bar{R} - R \\ p_{1u} = -p_1^2 - q \delta_1 - q_1 \delta + \bar{R}_1 - R & p_{1v} = \delta \delta_1 - q q_1 \\ q_u = -p_1 q - p \delta + \delta_v & q_v = -p q - p_1 \delta + \delta_u \\ q_{1u} = -p_1 q_1 - p \delta_1 + \delta_{1v} & q_{1v} = -p q_1 - p_1 \delta_1 + \delta_{1u} \end{cases}$$

où R est une constante arbitraire.

(1) L. BIANCHI, *Sulle configurazioni mobili di Möbius*, « Rend. Palermo », t. 25, p. 306, 1908.

(2) Transformation des couples de congruences stratifiables, « Comptes-Rendus », Paris, t. 191, p. 642, 1930.

(3) Cfr. TORTORICI, *Sulle deformazioni infinitesime ecc.*, « Rend. Palermo », t. 35, p. 289, 1913.

Le système (7) est complètement intégrable et détermine la transformation de M. Jonas avec 5 constantes arbitraires, y compris la constante R.

Deux transformations de M. Jonas pour une même congruence R étant données, le théorème de permutabilité du § 4 nous donne ∞ congruences W qui ne sont pas, en général, des congruences R.

Or si les constantes R qui déterminent les transformations données sont différentes, il existe une congruence R et une seule qui peut être atteinte par des transformations T convenables de la première et de la seconde congruence transformée. Les deux constantes R égales, il n'existe pas de congruences R parmi les transformées communes du second ordre si

$$\vartheta = (q - q')(q_1 - q'_1) - (p - p')(p_1 - p'_1)$$

n'est pas nul et il en existe ∞ au cas contraire. Les quantités p', q' etc. marquées par l'accent correspondent à la seconde transformation de M. Jonas donnée.

Il suit de là que les transformations du premier ordre connues, l'application suivante du procédé de M. Jonas n'exige pas même de quadratures. En partant de la congruence linéaire qu'on peut traiter comme une congruence R dégénérée on peut construire par les seules différentiations et opérations algébriques une suite illimitée de congruences R.

Fisica. — *Metodo per ridurre all'equatore ed all'equinozio le singole durate di colorazioni vespertine e mattutine di nubi.* Nota ⁽¹⁾ di P. BARRECA, presentata dal Corrisp. M. LA ROSA.

1. Le colorazioni delle nubi e di ogni altro oggetto terrestre, al vespero ed all'aurora, son dovute ad anelli colorati invisibili, segnalati per la prima volta dall'A. circondanti il globo e tagliati (biquotidianamente nei nostri paesi) dalle nubi od altri oggetti, nella rotazione diurna, restando gli anelli immobili rispetto al sole. Il disordine apparente, nel nostro campo visivo, delle nubi diversamente colorate, è un puro effetto delle prospettive diverse, le quali cambiano se si cambia il posto dell'osservatore, pur restando inalterata ogni altra circostanza, cosicchè egli proietta col suo sguardo, in modo vario e accidentale, le diverse nubi o una sull'altra, od una in mezzo alle altre. Le durate poi delle singole colorazioni nei diversi paesi ed epoche, essendo le durate delle singole intersezioni, possono dapprima in un certo modo, ridursi al caso che il sole si supponga puntiforme, giacchè secondo una certa premessa l'estensione del disco solare non produce che la sovrapposizione par-

(1) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1931.

ziale e nei bordi, degli anelli dovuti a ciascun suo punto. Poi si possono anche ridurre le durate osservate a quelle che si otterrebbero all'equatore in equinozio, cioè con nube che tagli ortogonalmente gli anelli, onde renderle comparabili e (se chiamiamo orli dell'anello quelli della zona sferica che esso distacca sulla sfera sulla quale sensibilmente si muove la nube) tale problema coincide quasi con quello di determinare la larghezza ortogonale, secondo arco di cerchio massimo, tra tali orli, ad un'altezza sul mare uguale alla altezza che aveva la nube della osservazione. Per una certa media altezza, abbiamo di tali larghezze ortogonali in km. già una prima determinazione dovuta parimenti all'autore ⁽¹⁾.

2. Per il nostro argomento merita chiarimento il concetto di media altezza delle nubi, ammesso già però comunemente dai meteorologi. È noto che l'altezza delle nubi può variare moltissimo, ma che oscilla intorno a certi valori medii, i quali per ogni tipo di nube sono anche riportati dai manuali ⁽²⁾. Essa può bensì scostarsene talvolta assai, ma ciò non avviene frequentemente. Questa altezza media è notoriamente alquanto più grande in estate che in inverno, nelle tarde ore del giorno anzichè nelle prime, nel giorno anzichè nella notte, all'equatore anzichè a latitudini notevoli. È dunque perfettamente fondato nel parlare non delle singole durate di colorazione delle nubi (a rigore funzioni delle loro altezze), ma più semplicemente di una loro media, di far corrispondere questa ad una certa altezza media ignota, ma fissa o poco variabile nel caso di osservazioni abbastanza numerose. Ciò almeno fino a che non conosceremo chiaramente la legge di dipendenza tra durata di colorazione ed altezza ⁽³⁾ e non si faranno osservazioni che fissino ogni volta il valore di quest'ultima.

Del resto, anche deduttivamente ed *a priori*, possiamo concludere che la media statistica (cioè di numerosi casi) dell'altezza delle nubi deve pre-

(1) Per la colorazione delle nubi, gli anelli e la riduzione a sole puntiformi: 1° P. BARRECA, *Osservazioni qualitative di nubi colorate nei vesperi ed aurore*, «Nuovo Cimento», 1926, p. 153. - 2° *Osservazioni quantitative di nubi colorate*, ivi 1926, p. 281. - 3° *Lois de écarts des durées des colorations crepusculaires des nuages*, «Archives des sciences physiques et naturelles», 1927, p. 307.

Per la colorazione degli oggetti terrestri a debite ore: 4° P. BARRECA, *Sulle colorazioni crepuscolari degli oggetti terrestri*, «Atti della Soc. ital. per il progresso delle scienze», Congresso del 1929, vol. 2°, p. 92.

Per le larghezze ortogonali e la riduzione all'equatore ed equinozio: 5° P. BARRECA, *Deduzione della legge sperimentale delle durate dei colori crepuscolari delle nuvole*, ecc. «Rendiconti della R. Accademia nazionale dei Lincei», gennaio 1929, p. 54. - 6° *Riduzione all'equatore ed equinozio delle osservazioni di durate medie di colorazioni*, ecc. «Nuovo Cimento», 1930, p. 225.

(2) Ad es. A. ANGOT, *Traité élémentaire de Météorologie*, Paris, Gauthier-Villars, 1916, p. 206; A. BALDIT, *Études élémentaires de météorologie*, stesso editore, 1923, p. 118.

(3) Per alcune ragioni alle quali non ho potuto finora dare forma rigorosa, dipendenti da considerazioni di casi di diffrazione luminosa, sarei anche propenso a ritenere che il cambiamento delle durate di colorazione al mutare delle altezze, sia debole.

sentare un valore definito. Invero, l'umidità dell'aria, nel rinnovarsi continuamente, proviene dalla superficie del suolo e dei mari e siccome (salvo rare eccezioni e non stabili) le temperature decrescono con il crescere delle altezze, così le cause termiche di impoverimento del contenuto in acqua e della sua condensazione stanno, invece, in alto. Ciò non solo perchè la temperatura colà è più bassa, ma anche perchè vi regna pressione minore e l'aria che vi giunge dal basso deve espandersi rapidamente, cioè raffreddare. Più sale l'aria e più (di solito e salvo eccezioni) ha occasione di espandersi, presso a poco adiabaticamente. Infine anche il pulviscolo che deve fornire i nuclei solidi per la facile condensazione, come è noto dopo T. R. Wilson ed altri, abbonda di più in basso e perciò colà facilita di più la formazione di nuvole. Ma negli strati a contatto col suolo (irradiante e cedente alla convezione il calore solare) la temperatura è ordinariamente troppo elevata per dar luogo alla formazione di nebbie (nubi) e così queste in definitiva abbondano ad altezze moderate e non nulle. Oltre i dieci o quindici km. dal suolo la temperatura è normalmente così bassa che possono trovarvisi solo cirri, cioè polvere cristallina di ghiaccio, agitata e tenuta sospesa dal moto dell'aria. Ma i cirri, se viene a mancare tale moto, discendono e perdono la eccezionale altezza, mentre le nubi più basse, formate di goccioline, conservano quasi automaticamente la propria se l'aria è calma, poichè condensasi talvolta nelle loro parti superiori il vapore delle loro goccioline più basse, se esse discendono ed il vapore condensato in goccioline e finalmente suddiviso ridiscende, per poi rievaporare in questi strati più bassi e più caldi di nuovo, ecc. È noto che la pressione massima dei vapori prodotti direttamente dal ghiaccio è piccola ⁽¹⁾ e che a — 50 centigradi sarebbe di 0.05 mm., mentre appunto circa — 50 a — 60 centigradi e 100 a 120 mm. di mercurio di pressione atmosferica complessiva, ha constatato a circa 15 km. di altezza il prof. Pickard, nella sua recente ascensione con navicella ermetica; è poi piccola la velocità di evaporazione quando è piccola la tensione massima e così i cirri evaporano ben poco.

3. Il metodo già proposto dall'autore (ultima Nota citata) per ridurre le durate delle colorazioni all'equatore ed equinozio, concerneva certe durate medie θ , misurate in modo da eliminare la diversità che si produce in un medesimo luogo di osservazione se la declinazione del sole conserva la grandezza e cambia segno. Esso richiedeva una serie di osservazioni fatte prima e dopo l'equinozio, aggruppate per cinque di giorni successivi, o per decadi, due a due egualmente distanti dal giorno di equinozio. La media delle durate, per un dato colore ed un dato ordine di colori, doveva essere combinata, in una nuova media aritmetica, con la analoga media della cinquina simmetrica rispetto all'equinozio (dopo la riduzione a sole puntiforme per tutte) e

(1) Risultati di diversi sperimentatori (Regnault, Thiesen, Scheel, Magnus, Graetz); vedi ad esempio WINKELMANN'S, *Handbuch der Physik*, III, pp. 915, 916, 929, ecc.

questo risultato finale era la θ , la quale in via approssimativa e per latitudini φ minori di 50° , poteva ridursi al valore che avrebbe avuto all'equatore ed equinozio, mediante la formula:

$$\theta(0, 0) = \theta(\varphi, \delta) \cos \varphi \cos \delta \sqrt{1 - \tan^2 \varphi \tan^2 \delta},$$

nella quale δ è la declinazione del sole nel giorno di mezzo della cinquina. Questo metodo però, specialmente se non venisse usato mediante una serie sufficientemente lunga di osservazioni, condurrebbe a perdere senza utilità un certo numero di queste già eseguite, se esse non trovassero nella cinquina, o nella decade, simmetrica le corrispondenti di identico colore ed ordine, con le quali dovrebbero fornire la media $\theta(\varphi, \delta)$. La riduzione così ottenuta si intende riferita ad una media altezza delle nubi, eguale a quella media delle osservazioni fatte.

4. È scopo del presente lavoro di esporre un metodo più semplice, che riduce all'equatore ed equinozio ogni singola osservazione, separatamente, dopo o prima della riduzione a sole puntiforme. Richiede l'uso del tempo solare vero e locale nella registrazione esatta entro un mezzo minuto del cominciare e del finire della singola colorazione. È il tempo locale del sole vero quello che interessa, giacchè non si tratta se non del moto relativo tra nube e sole, trasportante seco gli anelli che produce; l'osservatore può essere dovunque. Possono dunque bastare un orologio da tasca non cattivo (controllato ogni paio di giorni sull'ora legale esatta) insieme a effemeridi astronomiche che diano, ogni giorno, l'ora civile del mezzogiorno vero per un altro luogo, aggiungendosi algebricamente in minuti di tempo la differenza di longitudine tra i due luoghi ⁽¹⁾. È trascurabile che la velocità angolare del moto apparente o relativo del sole vero varii, a rigore, nell'annata, poichè la differenza di intervalli tra coppie di successivi passaggi del sole vero al meridiano può rilevarsi dalle stesse effemeridi e diversifica pochi secondi da un giorno all'altro e da ventiquattro ore, valore che riterremo, in quanto il cangiamento di colore della nube avviene con lentezza e non si può assegnarne l'istante con esattezza di secondi.

Ciò posto, sia a , in ore e minuti di tempo solare vero e locale, l'istante nel quale comincia una data colorazione e b l'analogo in cui termina; così che siano $\alpha = 15 a$, $\beta = 15 b$, in gradi e primi di arco gli angoli corrispondenti, misurati a partire da quel mezzo meridiano mobile che segue il moto apparente del centro del sole e lo contiene. Siano α_0 , β_0 le analoghe gran-

(1) Come si vede il metodo suppone che la longitudine e la latitudine della nube siano non sensibilmente diverse da quelle del luogo di osservazione, che si useranno nel calcolo; pertanto le nubi assai basse all'orizzonte non devono essere osservate. Esse potrebbero distare più centinaia di km. dall'orizzonte dell'osservatore, tanto quanto sarebbe il raggio dell'esteso orizzonte di un altro osservatore nascosto nella nube, alta perfino 10 o 15 km. sul mare.

dezze (per lo stesso colore ed ordine di colori) nel caso particolare dell'equatore ed equinozio ($\delta = \varphi = 0$). La (1) della nostra Nota citata sesta ⁽¹⁾, avendo ora chiamato α (oppure β) un caso particolare dell'angolo colà detto τ , dà:

$$(1) \quad -\frac{d}{R} = \cos \delta \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \delta$$

e per $\delta = \varphi = 0$ dà:

$$-\frac{d}{R} = \cos \alpha_0,$$

cioè:

$$\cos \alpha_0 = \cos \delta \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \delta.$$

Trovati α_0 e β_0 si hanno i tempi corrispondenti $\frac{\alpha_0}{15}$ e $\frac{\beta_0}{15}$ e dalla loro differenza le durate, cioè:

$$(2) \quad 15 t_0 = \text{val ass } (\beta_0 - \alpha_0) = \text{val ass } \{ \text{arc cos } (\cos 15 b \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta) - \text{arc cos } (\cos 15 a \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta) \}.$$

Osservazione I. I valori così trovati di α_0 e β_0 caratterizzano la posizione degli anelli e se ne possono dedurre facilmente i valori d_1 e d_2 (della d) in km. Le larghezze ortogonali in km. secondo archi di cerchio massimo, da noi già date, son poco diverse dalle differenze tra due d consecutive (per sole puntiforme); la prima di tutte queste d è ancora ignota.

Osservazione II. Abbiamo considerato gli istanti a e b nei quali comincia o cessa una data colorazione, senza spiegare se si intende già fatta su di essi la riduzione a sole puntiforme. Se il sole si riducesse ad un punto nel proprio centro, gli anelli dei diversi colori, supposti pochi ed a unica lunghezza d'onda ciascuno, sarebbero nettamente limitati; invece la estensione del disco di circa 16' tutto intorno al proprio centro, fa sì che 16' dentro e 16' fuori di ciascuno antico orlo di separazione degli anelli e concentricamente con essi, vi siano quelli nei quali ora comincia o cessa del tutto una data colorazione, ma mischiata colà con la prossima. Perciò se l'attenzione dell'osservatore è ben fissata a sceverarla come farebbe un pittore abile nella miscela ed avvertire l'istante in cui comincia ed in cui cessa il dato colore (per es. il rosso), non vi è che da prenderlo come istante a o b , calcolare con le formule precedenti e poi togliere alla intera larghezza ($\beta_0 - \alpha_0$) della (2) 32' circa. Diversamente andrà la cosa se la seconda volta la sua

(1) In quella Nota si deve nella figura 2 dove dice polò scrivere polo nord e in essa fig. e nella successiva equaz. capovolgere il doppio segno di δ e di φ . Ma la (1) e successive rimangono inalterate.

attenzione si rivolgerà invece all'apparire nel miscuglio del colore successivo, anziché allo sparire del primo. Potrebbe anche essere seguito il sistema già da me usato nella seconda Nota citata, il quale correggerebbe ora inizialmente i valori di a e b ; ma è più complicato.

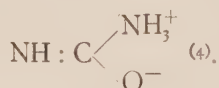
Osservazione III. Il metodo esposto, che si potrebbe chiamare *dei due tempi locali veri*, è semplice, ma usa un dato in più di quelli strettamente necessari, giacché considera inizio e fine di colorazione, mentre dovrebbe bastare la conoscenza della loro differenza che è la durata. Ci se ne accorge scrivendo due volte la (3) della nostra Nota citata sesta, una in generale e una per $\delta = \varphi = 0$, poi eliminando tra le due eq. le due incognite $\frac{d_1}{R}, \frac{d_2}{R}$.

Ma, anche usando particolari semplificazioni, la equazione coi soli t, t_0, δ, φ , così ottenuta è troppo complicata, mentre la misura sperimentale del dato in più usato in questa Nota non offre difficoltà.

Chimica (Chimica-Fisica). — *Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi*. — VI. *Soluzioni acquose di solfammide*⁽¹⁾. Nota di G. DEVOTO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. CAMBI.

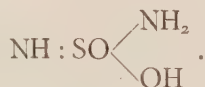
In una recente Nota⁽³⁾ avevo accennato a ricerche in corso sulla solfammide, $\text{SO}_2(\text{NH}_2)_2$. Espongo ora i risultati ottenuti.

La ragione dello studio delle proprietà dielettriche delle soluzioni di questa sostanza si ricollega alla sua analogia con l'urea, per la quale si è proposta or non è molto la formula, in soluzione acquosa,



Era dunque interessante determinare se anche per altre diammidi si poteva ammettere una formula dello stesso tipo.

La cosa era tanto più probabile per la solfammide, in quanto Traube e Reubke⁽⁵⁾ avevano osservato che essa, in soluzione acquosa, reagiva con le basi secondo una forma iso



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 15 novembre 1931.

(3) « Berichte », 64, p. 1329 (1931).

(4) « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 520, (1930).

(5) « Berichte », 56, p. 1656 (1923).

Orbene i risultati sperimentali hanno confermato le previsioni: per la solfammine in soluzione acquosa è indubbia una forma polare.

La *preparazione* di una certa quantità di solfammine (oltre 25 grammi) presenta qualche difficoltà per gli scarssissimi rendimenti che si hanno in prodotto puro.

Colla collaborazione del laureando Alberto Tamburini, ho provato i metodi proposti dai varî autori. Dopo numerose esperienze ho potuto constatare come il metodo di Ruff — azione del cloruro di solforile sull'ammoniaca acquosa concentrata ⁽¹⁾ — sia di gran lunga il migliore.

I metodi più recenti, di Ephraim e Gurewitsch ⁽²⁾ e di Traube e Reubke ⁽³⁾ danno risultati meno soddisfacenti.

Il prodotto ottenuto in queste varie prove è stato generalmente cristallizzato da acetato di etile più volte; si è ottenuta in tal modo una solfammine a punto di fusione 91°.

Ulteriori cristallizzazioni da etere acetico non sono convenienti: si è trovato invece che una cristallizzazione finale dall'acqua nella quale la solfammine è estremamente solubile, dà magnifici cristalli, p, f. 93.

Su alcune proprietà fisiche della sostanza, sarà riferito più tardi.

Le misure di *costante dielettrica* in soluzione acquosa sono state eseguite col già descritto apparecchio ⁽⁴⁾.

Come nei precedenti lavori ⁽⁵⁾, nella tabella I, c indica la concentrazione, ϵ la costante dielettrica ridotta a 25°, $\frac{d\epsilon}{dc}$ il coefficiente dielettrico, sensibilmente costante: i punti si allineano infatti assai bene su una retta nel diagramma ϵ, c . Come al solito si è assunta per l'acqua una costante dielettrica a 25° $\epsilon_0 = 77.85$.

TABELLA I.

c	ϵ	$\frac{d\epsilon}{dc}$
0.000	77.85	+ 7.0
0.097	78.52	
0.145	78.87	
0.181	79.10	

(1) « Berichte », 36, p. 2970 (1903).

(2) « Berichte », 43, p. 138 (1910).

(3) « Berichte », 56, p. 1656 (1923).

(4) DEVOTO e STEVENSON, « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 199 (1930).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 521 (1930).

I risultati, come ho già detto, confermano pienamente le previsioni: il coefficiente dielettrico nettamente positivo, è certo segno dell'esistenza di uno stato polare.

Si può però essere in dubbio tra due forme:



i dati che si hanno finora non permettono di scegliere fra le due. La prima tuttavia risponde meglio al comportamento chimico⁽¹⁾.

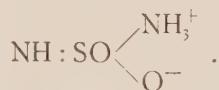
È interessante rilevare anche l'influenza del gruppo solfonico quale appare nelle coppie urea-solfammide e β-alanina-aurina. Il gruppo =SO₂ ha evidentemente un raggio maggiore del gruppo =CO; provoca così un allungamento nel braccio del dipolo, come si vede dai coefficienti dielettrici:

SO ₂ (NH ₂) ₂	7
CO(NH ₂) ₂	3.3 ⁽²⁾
NH ₂ CH ₂ CH ₂ SO ₃ H	41 ⁽³⁾
NH ₂ CH ₂ CH ₂ COOH	36 ⁽⁴⁾

Questa netta influenza del gruppo =SO₂ che appare in egual misura in due casi sensibilmente differenti è una ulteriore, confortante prova della fiducia che si può avere nei risultati dell'indagine dielettrica nei solventi polari.

RIASSUNTO.

Da misure di costante dielettrica in soluzione acquosa è definita per la solfammide SO₂(NH₂)₂ una formula polare, assai probabilmente



(1) TRAUBE e REUBKE, loc. cit.

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 60, p. 522 (1930).

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 61, p. 887 (1931).

(4) Dati di DEVOTO non ancora pubblicati.

Chimica (Cristallografia chimica). — *Ricerche chimiche e cristallografiche sui nitrili complessi*⁽¹⁾. Nota I di A. FERRARI e C. COLLA, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In un lavoro precedente⁽³⁾ abbiamo dimostrata l'analogia cristallografica del cobaltinitrito potassico [$K_3Co(NO_2)_6$]^{III} coi nitriti tripli: di potassio, piombo e nichelio [$K_2PbNi(NO_2)_6$]^{II}; di potassio, piombo e cobalto [$K_2PbCo(NO_2)_6$]^{II} e di potassio, piombo e rame [$K_2PbCu(NO_2)_6$]^{II}.

Questa analogia cristallografica ci ha permesso di concludere che l'acqua, spesso ritrovata mediante l'analisi chimica nel cobaltinitrito, non è direttamente legata alla molecola del nitrito complesso ma è acqua di impregnazione del reticolo. Inoltre l'esistenza di un anione complesso $Co(NO_2)_6$ ^{III} nel cobaltinitrito porta ad ammettere quella di ioni $Me(NO_2)_6$ ^{II} (dove Me è Ni, Co o Cu) nei nitriti tripli.

L'analogia cristallografica di questi nitriti complessi è comprensibile se si considera che le loro molecole contengono lo stesso numero di atomi e che inoltre il raggio dell'ione K^+ e quello dell'ione Pb^{++} secondo i valori calcolati da V. M. Goldschmidt⁽⁴⁾ sono assai vicini ($K^+ = 1,33 \text{ \AA}$, $Pb^{++} = 1,32 \text{ \AA}$).

Le analogie chimiche e la grandezza non molto diversa degli ioni piombo e di quelli dei metalli alcalino terrosi rendevano probabile che i nitriti tripli in cui al piombo si sostituisce rispettivamente il calcio, lo stronzio e il bario fossero isomorfi con $K_2PbMe(NO_2)_6$ ^{II} e quindi con $K_3Co(NO_2)_6$ ^{III}. Nel presente lavoro confermiamo questa veduta coll'esame di alcuni di questi nitriti tripli.

NITRITI TRIPLI DI METALLO ALCALINO TERROSO DI POTASSIO E DI NICHELIO.

a) Nitrito di potassio, di calcio e di nichelio. $K_2CaNi(NO_2)_6$.

Fu preparato per la prima volta da Künzel⁽⁵⁾ e successivamente da Erdmann⁽⁶⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica-Fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 1° novembre 1931.

(3) Questi « Rendiconti », 6^a serie, XI (1930), p. 755.

(4) *Geochemische Verteilungsgesetze*, VII, « Vid. Akad. Skr. », M.-N. Kl., 1926, n. 2.

(5) « J. B. », 1864, p. 717, e « Z. f. anal. Chem. », 3, 1869, p. 161.

(6) « Journ. f. prakt. Chem. », 97 (1866), p. 387; « J. B. », 1866, p. 254.

L'abbiamo ottenuto mescolando soluzioni di $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (21.90 gr. in 100 di H_2O), di $\text{NiCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (16.5 gr. in 100 d'acqua), e di KNO_2 (85 gr. in 200 gr. d' H_2O).

Si presenta in ottaedri giallo chiari ben formati. All'analisi dà i seguenti risultati:

	calcolato per $\text{K}_2\text{CaNi}(\text{NO}_2)_6$	trovato
Potassio	17.26	17.58
Calcio	8.85	8.95
Nichelio	12.96	12.25
NO_2	60.93	—

b) Nitrito di potassio, di stronzio e di nichelio. $\text{K}_2\text{SrNi}(\text{NO}_2)_6$.

Fu ottenuto per la prima volta da Erdmann⁽¹⁾ in seguito da Przibylla⁽²⁾.

È stato da noi ottenuto sotto forma di piccoli ottaedri o cubi di color giallo rossiccio nella reazione di due soluzioni:

1) gr. 15 di KCl e gr. 16.5 di $\text{NiCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ in 50 cm^3 di NaNO_2 2 : 1 (gr. 25);

2) gr. 13.25 di $\text{SrCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ in 50 cm^3 di NaNO_2 (2 : 1).

L'analisi ha dato i seguenti risultati:

	calcolato per $\text{K}_2\text{SrNi}(\text{NO}_2)_6$	trovato
Potassio	15.63	15.85
Stronzio	17.50	17.40
Nichelio	11.72	11.65
NO_2	55.15	—

c) Nitrito di potassio, di bario e di nichelio. $\text{K}_2\text{BaNi}(\text{NO}_2)_6$.

Fu ottenuto la prima volta da Lang⁽³⁾ successivamente da Erdmann⁽⁴⁾. La nostra preparazione è stata fatta trattando una soluzione di $\text{BaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (24.5 gr. in 100 d'acqua) con una di $\text{NiCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (gr. 16.50 in 100 d'acqua) e con eccesso di KNO_2 (gr. 85 sciolti in 200 d'acqua).

Si presenta in cubetti assai piccoli giallo bruni. L'analisi di questo prodotto ha dato i risultati:

(1) « Journ. f. prakt. Chem. », 97 (1866), p. 387; « J. B. », 1866, p. 245.

(2) « Zeitschr. f. anorg. Chem. », 18 (1898), p. 455; « C. B. », 1899, I, p. 165.

(3) « K. Sv. Vet. Akad. Handl. », 1860; « J. B. », 1862, p. 101; « Pogg. », 118, 1863, p. 296.

(4) « Journ. f. prakt. Chem. », 97 (1866), p. 387; « J. B. », 1866, p. 245.

	calcolato per $K_2BaNi(NO_2)_6$	trovato
Potassio	14.21	14.47
Bario	24.97	23.90
Nichelio	10.67	10.23
NO_2	50.15	—

I composti sopra descritti esaminati col metodo di Debye impiegando la radiazione X proveniente da un anticatodo di ferro hanno dato i fotogrammi calcolati nella tabella I.

La cella elementare contiene 4 molecole come quella del cobaltinitrito potassico.

NITRITI TRIPLI DEI METALLI ALCALINO TERROSI

DEL POTASSIO E DEL COBALTO.

a) Nitrito di potassio, di calcio e di cobalto. $K_2CaCo(NO_2)_6$.

Fu ottenuto da Erdmann⁽¹⁾. Abbiamo ripetuto la preparazione di questo autore mescolando una soluzione contenente $CoCl_2 \cdot 2H_2O$ (gr. 16.58 in 75 d'acqua) con soluzioni di $CaCl_2 \cdot 6H_2O$ (gr. 21.9 in 75 gr. d'acqua) e di $NaNO_2$ misto a KCl (gr. 69 del primo e gr. 15 del secondo in 150 d'acqua). È costituito da una polvere microcristallina verde cupo. All'analisi dà i seguenti risultati:

	calcolato per $K_2CaCo(NO_2)_6$	trovato
Potassio	17.25	17.40
Calcio	8.84	8.79
Cobalto	13.00	12.89
NO_2	60.91	—

b) Nitrito di potassio, di stronzio e di cobalto. $K_2SrCo(NO_2)_6$.

È stato pure preparato da Erdmann⁽²⁾ col metodo analogo al precedente. Nella nostra preparazione abbiamo sostituito al cloruro di calcio gr. 13.25 di $SrCl_2 \cdot 2H_2O$ sciolti in 100 d'acqua.

Il composto si presenta di color verde grigio e all'analisi dà i seguenti risultati:

(1) « Journ. f. prakt. Chem. », 97 (1866), p. 385; « J. B. » (1866), p. 247.

(2) Loc. cit.

	calcolato per $K_2SrCo(NO_2)_6$	trovato
Potassio	15.62	15.89
Stronzio	17.49	17.36
Cobalto	11.75	11.63
NO_2	55.14	—

c) *Nitrito di potassio, di bario e di cobalto.* $K_2BaCo(NO_2)_6$.

Abbiamo ottenuto questo composto col solito procedimento e impiegando gr. 24.5 di $BaCl_2$ sciolti in 16.58 d'acqua, gr. 75 di $CoCl_2 \cdot 2H_2O$ in 75 d'acqua, gr. 69.0 di $NaNO_2$ e gr. 15 di KCl sciolti in 150 d'acqua. Il composto ottenuto per la prima volta da Erdmann⁽¹⁾ è una polvere microcristallina verde che all'analisi ci diede:

	calcolato per $K_2BaCo(NO_2)_6$	trovato
Potassio	14.20	14.38
Bario	24.95	24.79
Cobalto	10.70	10.55
NO_2	50.15	—

Dopo alcuni mesi questo nitrito appare profondamente alterato con tendenza a trasformarsi in una polvere gialla, non abbiamo finora studiato questa trasformazione, tuttavia il colore del prodotto farebbe pensare alla formazione di cobaltinitriti per passaggio del cobalto bivalente a trivalente.

Questi tre composti, ed in modo particolare quello contenente il bario, danno fotogrammi poco belli. Essi si possono tuttavia interpretare come provenienti da reticoli monometrici di tipo analogo ai precedenti. Il calcolo di questi fotogrammi è esposto nella tabella II.

I nitriti tripli di un metallo alcalino terroso, di potassio e di rame hanno dato fotogrammi con molte più linee dei fotogrammi dei nitriti tripli precedenti e che sembrano potersi ordinare in due reticoli monometrici

Questo comportamento anormale richiede ulteriori ricerche che saranno oggetto di una successiva Nota.

(1) Loc. cit.

TABELLA I.

K ₂ CaNi(NO ₂) ₆		K ₂ SrNi(NO ₂) ₆		K ₂ BaNi(NO ₂) ₆		<i>b</i> ₁ <i>b</i> ₂ <i>b</i> ₃	Costante <i>a</i> per		
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità		K ₂ CaNi(NO ₂) ₆	K ₂ SrNi(NO ₂) ₆	K ₂ BaNi(NO ₂) ₆
3.065	dd	—	—	—	—	311	10.14	—	—
2.806	dd	—	—	—	—	320	10.12	—	—
2.559	f	2.617	f	2.670	mf	400	10.24	10.47	10.68
2.298	f	2.350	f	2.374	mf	420	10.27	10.51	10.62
2.101	f	2.145	f	2.173	mf	422	10.29	10.50	10.64
1.821	d	1.860	md	1.883	d	440	10.30	10.52	10.65
—	—	1.754	dd	1.778	d	442-600	—	10.52	10.67
1.632	d	1.660	md	1.690	mf	620	10.31	10.49	10.69
1.380	dd	1.405	d	1.425	d	642 (β)	10.32	10.51	10.68
1.426	dd	1.456	dd	—	—	640	10.29	10.50	—
1.380	f	1.402	ff	1.425	f	642	10.32	10.49	10.68
1.289	d	1.312	d	—	—	800	10.31	10.50	—
1.211	d	1.235	mf	1.225	md	822-660	10.28	10.49	10.65
—	—	1.204	d	—	—	662	—	10.50	—
1.151	m	1.168	mf	1.190	m	840	10.29	10.45	10.65
1.122	d	—	—	1.163	d	842	10.28	—	10.66
1.097	md	1.116	mf	—	—	664	10.29	10.48	—
—	—	1.065	d	—	—	844	—	10.44	—
1.010	f	1.025	ff	1.047	mf	862-10.20	10.29	10.45	10.67
Valore medio . . .							10.29	10.49	10.67
Densità calcolata . . .							2.75	2.88	3.02

TABELLA II.

K ₂ CaCo(NO ₂) ₆		K ₂ SrCo(NO ₂) ₆		K ₂ BaCo(NO ₂) ₆		<i>h</i> ₁ <i>h</i> ₂ <i>h</i> ₃	Costante <i>a</i> per		
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità		K ₂ CaCo(NO ₂) ₆	K ₂ SrCo(NO ₂) ₆	K ₂ BaCo(NO ₂) ₆
2.510	f	2.534	f	2.595	f	400	10.04	10.14	10.37
2.257	mf	2.263	f	2.331	m	420	10.08	10.13	10.43
2.070	f	2.070	f	2.140	f	422	10.14	10.14	10.48
1.792	d	1.808	d	—	—	440	10.14	10.23	—
—	—	1.707	dd	—	—	442-600	—	10.25	—
1.605	d	1.613	d	—	—	620	10.15	10.20	—
—	—	1.424	dd	—	—	640	—	10.27	—
1.360	ff	1.370	f	1.400	f	642	10.17	10.25	10.47
1.273	d	—	—	—	—	800	10.17	—	—
1.198	d	1.210	d	—	—	822-660	10.17	10.27	—
—	—	1.180	dd	—	—	555-751	—	10.22	—
1.138	d	1.149	dd	1.168	dd	840	10.17	10.27	10.45
1.116	d	1.124	dd	—	—	753-911	10.17	10.25	—
1.086	m	1.096	d	1.117	dd	664	10.17	10.27	10.47
—	—	1.013	d	—	—	862-10.20	—	10.33	—
Valore medio							10.17	10.23	10.45
Densità calcolata . . .							2.86	3.10	3.20

CONCLUDENDO :

a) Si dimostra che i nitriti tripli di potassio, di un metallo alcalino terroso, di cobalto o di nichelio sono monometrici tipo « cobaltinitrito potassico » con 4 molecole nella cella elementare. Le costanti sono:

$K_2Ca[Ni(NO_2)_6]$	$a = 10.29 \text{ \AA}$	dens. 2.75
$K_2Sr[Ni(NO_2)_6]$	» = 10.49 »	» 2.88
$K_2Ba[Ni(NO_2)_6]$	» = 10.67 »	» 3.02
$K_2Ca[Co(NO_2)_6]$	» = 10.17 »	» 2.86
$K_2Sr[Co(NO_2)_6]$	» = 10.23 »	» 3.10
$K_2Ba[Co(NO_2)_6]$	» = 10.45 »	» 3.20 .

b) I nitriti tripli analoghi ai precedenti salvo che il cobalto ed il nichelio sono sostituiti dal rame, hanno dato fotogrammi in cui compaiono probabilmente le linee di due reticoli monometrici isomorfi. Il fenomeno è oggetto di ricerche in corso.

Biologia. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sul seme bachi irradiato prima della incubazione.* Nota ⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI, presentata dal Socio B. LONGO.

In Note precedenti ⁽²⁾ fu già dimostrata l'azione nettamente favorevole sullo sviluppo dei bachi: quest'anno si sono volute ripetere le stesse esperienze per mettere in evidenza qualche fatto nuovo se esso fosse comparso durante la sperimentazione.

Le prove furono fatte su seme bachi in parte precoce ed in parte tardivo: furono impiegate esposizioni all'irradiazione di tempi diversi: per le condizioni della nostra attrezzatura scientifica non si poté provare una intensità differente di irradiazione, quella impiegata è dunque uguale per tutti i lotti.

Un trattamento invernale (Gennaio) sul seme fece constatare una maggiore perdita di peso del seme irradiato, primo indizio dell'azione delle onde elettromagnetiche.

Poi a primavera pochi giorni prima della incubazione del seme, furono irradiati numerosi lotti dello stesso seme con lo scopo di controllare se

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1931.

(2) G. MEZZADROLI e E. VARETON, *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte* $\lambda = 2-3$ metri *sui bachi da seta.* «Rend. Ac. Lincei», vol. XII, Serie 6, fasc. nn. 3, 4, 5 e 6.

esistesse una qualche variazione nella schiusura del seme: questa variazione esiste.

Una grande importanza ha la esatta frequenza dell'onda impiegata e la durata e la intensità di irradiazione sull'ulteriore sviluppo dei bachi nati da seme irradiato: questo studio richiederà ancora molto tempo e molte ricerche perchè una forte variazione è portata dai fattori di razza: un seme precoce sente meno lo stimolo delle onde elettromagnetiche di un seme tardivo: esiste un'analogia di comportamento anche per il seme di vegetali.

PARTE TECNICA.

Le prove furono fatte su seme bachi Oro 54 e seme bachi Giallo 144 seguendo la modalità già descritta in Note precedenti.

Azione delle Onde Ultracorte $\lambda = 2-3$ metri sulla Schiusura del seme su 500 semi di Oro 54 (nome commerciale del seme).

Irradimento	Numero dei bachi nati			
	al 1° giorno	in più	al 2° giorno	in più
Confronto	15	—	180	—
30 minuti	30	100 %	320	43.8 %
60 minuti	19	21 %	95	8.3 %

L'esposizione favorevole è quella di 30 minuti, mentre quella di 60 minuti trovasi già nella curva discendente. Da notare che l'esperimento è stato fatto con un seme già precoce per sua natura.

Azione dell'irradimento preventivo del seme sull'ulteriore sviluppo del baco da seta.

Furono irradiati colla solita modalità vari lotti di seme di una unica razza o varietà commerciale, la Giallo 144. Anche qui venne confermata la schiusura anticipata e più uniforme: si notò un leggero anticipo nelle mute e nella salita al bosco. Degno di rilievo è il fatto seguente: un accorciamento nella tessitura del bozzolo ed un maggiore rendimento in peso, dei bachi provenienti da seme irradiato.

Riportiamo in tabella i dati del raccolto in bozzoli.

Irradimento: tempo	Peso Medio di 100 Bozzoli	Peso in più
Seme di Confronto	172 gr.	—
Seme irrad. 10 minuti	172 gr.	—
Seme irrad. 40 minuti	179.32	4 %
Seme irrad. 160 minuti	185.09	7.6 %

Da rilevare: l'azione dell'irradimento preventivo del seme bachi si rende manifesta nettamente sull'ulteriore sviluppo del baco dopo 40 minuti di irradimento, ed è ancor più decisiva dopo 160 minuti: il maggiore peso in bozzoli è del 7.6 %. Un irradimento più prolungato potrebbe far prevedere un ulteriore innalzamento della curva del maggior rendimento in peso di bozzoli, il che significa anche un maggior peso del baco durante il suo sviluppo larvale.

Conclusioni e Riassunto.

Fu studiata l'azione esercitata dalle onde ultracorte sui bachi provenienti da seme preventivamente irradato.

L'effetto favorevole si fa risentire su tutta la vita del baco da seta: schiusura, sviluppo, tessitura, e maggior prodotto finale. Tanto il seme precoce (Oro 54) quanto quello leggermente tardivo (Giallo 144) si dimostrarono sensibili all'azione delle onde elettromagnetiche ultracorte.

Un ulteriore studio dell'onda specifica di ogni qualità di seme, del miglior tempo di irradimento e di intensità, potrà meglio precisare questi effetti favorevoli.

Biologia. — *Azione di terre radioattive italiane sulla germinazione dei semi e sulla crescita delle piante.* Nota⁽¹⁾ di G. MEZZADROLI ed E. VARETON, presentata dal Socio B. LONGO.

In una nostra recente Nota⁽²⁾ abbiamo posto in evidenza come esponendo i semi di diverse piante all'azione dei raggi β e γ del radio, per una durata di tempo ed una intensità adatta, si favorisca in modo notevole la germinazione dei semi e lo sviluppo delle piante che ne traggono origine.

Lo studio dell'azione della Radioattività sui processi di germinazione

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1931.

(2) G. MEZZADROLI ed E. VARETON, *Azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi*, «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XII, Serie 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2. Roma, luglio 1930.

dei semi, è stato intrapreso da tempo da numerosi autori, ed esiste tutta una vasta letteratura in proposito, che non riportiamo qui per mancanza di spazio. Vennero fatti studi sull'azione che esercitano, il radio e la sua emanazione, nonchè le acque radioattive e terre radioattive, sui semi di diverse piante e sulle piantine stesse.

Ricorderemo in proposito come lo studio più completo sull'argomento, sia dovuto allo Stoklasa⁽³⁾ che da oltre 20 anni studia l'azione esercitata dal radio sul processo di fotosintesi ed ha posto in evidenza recentemente con esperienze pratiche l'azione favorevole esercitata dai raggi β e γ del Radio, e dalle acque radioattive di sorgenti germaniche, sullo sviluppo delle piante da orto, di giardino. Egli riferisce pure sulla dinamica dell'azione fisiologica della radioattività, sul protoplasma.

Inoltre pure recentemente Maurice Curie ha pubblicato delle esperienze atte a porre in evidenza, la possibilità di uso di minerali radioattivi, come elementi fertilizzanti del terreno.

È nostro scopo di riferire qui brevemente dei risultati da noi ottenuti, sullo sviluppo dei vegetali, sotto l'azione di terra radioattiva italiana.

Come abbiamo già fatto osservare nella nostra Nota relativa all'azione esercitata dal radio sulla germinazione dei semi, la dose di sale di radio, o di minerale di radio, che si fa agire sui semi deve essere assai debole al fine che la azione sia favorevole.

La terra da noi usata era macinata sotto forma di polvere finissima ed aveva una radioattività di:

gr. 4.2×10^{-9} di radio elemento per un grammo di terra.

Le nostre esperienze vennero fatte sia su piante cresciute in soluzione acquosa, a cui venne aggiunta la terra radioattiva in quantità variabile, sia su piante cresciute su terra in cui la terra radioattiva venne aggiunta come concime. Riassumeremo brevemente queste esperienze.

Esperienze in soluzioni acquose.

Si fece una serie di esperienze facendo germinare e crescere dei semi di piante diverse, in liquido nutritivo di Knopp, entro piccoli vasi, secondo il metodo indicato dal Molish.

(3) JULIUS STOKLASA, *L'azione fisiologica dei raggi α , β , γ del radio sulla dinamica ed energetica della assimilazione dell'anidride carbonica*, «Biochem. Zeitschrift», B. 218, 4 aprile 1926; *L'assimilazione dell'anidride carbonica sotto l'influenza della radioattività nel corso dello sviluppo negativo della cellula clorofilliana*, «Biochem. Zeitschrift», B. 224, 4 gennaio 1930; *La dinamica dell'azione fisiologica della radioattività sul protoplasma*, «Beiträge zur Biologie der Pflanzen», B. 18, 4 febbraio 1930.

Alla soluzione nutritiva di Knopp si fecero aggiunte diverse di 0.25, 0.50, 0.75 gr. di terra radioattiva, che si depositava sul fondo del recipiente.

Riportiamo in tabella i risultati ottenuti:

Pisum sativum.

	Lunghezza delle radici	Lunghezza dello stelo	Lunghezza totale	% in più
<i>Al 4° giorno.</i>				
Campione confronto	25 mm.	—	—	
Campione con 0.25 gr. terra rad.	35 »	—	—	40 %
» » 0.50 » » »	35 »	—	—	40
» » 0.75 » » »	40 »	—	—	60
» » 1.00 » » »	45 »	—	—	80
<i>Al 10° giorno.</i>				
Campione confronto	60 »	40 mm.	100 mm.	
Campione con 0.25 gr. terra rad.	120 »	42 »	162 »	62
» » 0.50 » » »	135 »	45 »	180 »	80
» » 0.75 » » »	130 »	45 »	175 »	75
» » 1.00 » » »	130 »	50 »	180 »	80
<i>Al 16° giorno.</i>				
Campione confronto	90 »	90 »	180 »	
Campione con 0.25 gr. terra rad.	210 »	100 »	310 »	72.2
» » 0.50 » » »	215 »	100 »	315 »	75
» » 0.75 » » »	220 »	112 »	332 »	84
» » 1.00 » » »	220 »	110 »	330 »	84

L'aggiunta di terra radioattiva nelle soluzioni acquose, nutritive determina un aumento nello sviluppo delle piante, sia nella parte radicale, che di quella aerea, ma soprattutto delle radici. L'aumento totale, delle piantine rispetto a quella di confronto, si mantiene a partire dall'aggiunta di 0.5 gr. di terra radioattiva sull'80 %.

Zea mais. — Condizioni di esperienza, come quelle precedenti.

	Lunghezza delle radici	Lunghezza della pianta	Lunghezza totale	% in più
<i>Al 10° giorno.</i>				
Campione confronto	80 mm.	35 mm.	115 mm.	
Campione con 0.25 gr. terra rad.	115 »	45 »	160 »	39.1 %
» » 0.50 » » »	120 »	50 »	170 »	47.8
» » 0.75 » » »	135 »	50 »	185 »	60.8
» » 1.00 » » »	130 »	45 »	175 »	52
<i>Al</i>				
Campione confronto	140 »	110 »	250 »	
Campione con 0.25 gr. terra rad.	160 »	150 »	310 »	24
» » 0.50 » » »	165 »	150 »	315 »	26
» » 0.75 » » »	165 »	155 »	320 »	28
» » 1.00 » » »	165 »	160 »	325 »	30

La presenza di terre radioattive determina uno sviluppo maggiore delle radici delle piantine cresciute in soluzione acquosa, e uno sviluppo maggiore dello stelo della pianta stessa, questo sviluppo maggiore raggiunge in questo caso, nel primo tempo, un massimo del 60 % e poi scende fino al 30 %.

Esperienze su terra.

Abbiamo intrapreso poi una serie di esperienze, su terra, seminando i semi di piante diverse su terra in cassette di 1 m² di superficie e 25 cm. di profondità. La terra era buona terra da giardino. La terra radioattiva venne aggiunta come concime nelle proporzioni di 1 gr. per dm² di superficie.

Riportiamo i risultati ottenuti su piante diverse, mettendo in evidenza la maggior percentuale in peso del raccolto, nel caso della concimazione con terra radioattiva.

I dati in tabella sono dati medi di numerose esperienze, eseguite su 100 semi per cassetta raccogliendo le piante al 20° giorno.

TABELLA.

Tipo di pianta	Prova confronto	Prova con terra radioattiva	% in più nel peso del raccolto
Frumento	172,3 gr.	216,24 gr.	25,5 %
Orzo	180 »	229,20 »	24
Piselli	130,5 »	160 »	23,30
Granoturco	259 »	331,52 »	28
Bietole	241 »	294,02 »	22
Insalata	256 »	307,2 »	20

Conclusioni e riassunto.

Le esperienze eseguite sull'influenza di terre radioattive italiane, sullo sviluppo dei vegetali, hanno posto in evidenza come questa azione sia nettamente favorevole determinando, in esperienze di laboratorio, su piante cresciute in soluzione nutritiva di Knopp un notevole aumento nella lunghezza delle radici e nello sviluppo delle piantine.

La prova sperimentale in terra, usando la terra radioattiva come concime, ha permesso di constatare un aumento del peso che si mantiene sempre al di sopra del 20 %. Le piantine crescono inoltre più robuste e più verdi di quelle di confronto.

Fisiologia. — *La curva del digiuno e della rialimentazione nei ratti maschi castrati* ⁽¹⁾. Nota II di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le ricerche presenti furono eseguite allo scopo di studiare il decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti albinici maschi adulti castrati.

I ratti sono stati alimentati con la seguente miscela: Panegrattato gr. 22, formaggio gr. 7, ovoalbumina gr. 3, rosso d'uovo gr. 2, fegato gr. 1. Il tutto si faceva cuocere in 60 cmc. di acqua potabile e si riduceva a pappa omogenea, si tenne conto del peso dell'animale, del cibo ingerito e dell'urea escreta durante i digiuni e, ad intervalli di tempo, durante la rialimentazione.

(1) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1931.

I risultati furono i seguenti:

RATTO n. 3. Pesava gr. 257 fu operato il 30-11-1928 e posto a digiuno l'11-12-1928; in 5 giorni diminuì del 31 %; rialimentato riacquistò il peso in 11 giorni e lo oltrepassò di 19 gr. in altri 17, ingerendo cibo pari a piccole calorie 0.35 per gr. di peso. Per ogni gr. di peso acquistato ingerì 12.39 piccole calorie. Tra il 1° e il 2° digiuno, in 28 giorni, mantenne il peso di gr. 276 e ingerì cibo pari a 0.27 a piccole calorie per gr. e giorno. Posto di nuovo a digiuno in 4 giorni diminuì del 22.10 %; rialimentato riacquistò il peso in 9 giorni e lo oltrepassò di 19 gr. dopo altri 15, ingerendo cibo a piccole calorie 0.33 per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso riacquistato ingerì 11.58 calorie. Dopo il 2° digiuno in 24 giorni il ratto crebbe fino a gr. 296, ingerendo cibo pari a 0.28 calorie per gr. e giorno. Dal 10-11-1929 al 16-5-1929 il ratto fu alimentato con pane e verdura. Posto a digiuno il 20-5-1929 in 9 giorni diminuì del 29 %, da gr. 328 a gr. 233; rialimentato in 16 giorni crebbe fino a gr. 317, ingerendo cibo pari a piccole calorie 0.19 per gr. giorno.

RATTO n. 5 di gr. 247. Operato l'11-12-1928 fu posto a digiuno il 2 seguente: in 5 giorni diminuì del 31.17 %; rialimentato guadagnò il peso perduto in 15 giorni e lo oltrepassò di gr. 23 in altri 17 giorni, ingerendo cibo pari a calorie 0.37 per gr. e giorno. Per ogni gr. guadagnato ingerì calorie 11.94. Tra il 1° e il 2° digiuno il ratto crebbe fino a gr. 273 e ingerì cibo pari a calorie 0.3 per gr. e giorno. Posto a digiuno il 13-1-1929 in 4 giorni diminuì del 26 %; rialimentato riacquistò il peso in 17 giorni e lo oltrepassò di 14 gr. dopo altri 7 giorni, ingerendo cibo pari a 0.31 per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso guadagnato ingerì cibo pari a calorie 18.8. Dopo il 2° digiuno dal 17-1-1929 al 9-2-1929 il ratto crebbe fino a gr. 287. Ingerì cibo pari a calorie 0.29 per gr. e giorno. Dal 20-2-1929 al 16-5-1929 il ratto fu alimentato con pane e verdura. Posto a digiuno il 20-5-1929 in 9 giorni il ratto diminuì del 28 %. Rialimentato in 16 giorni crebbe fino a gr. 305 e ingerì cibo pari a piccole calorie 0.18 per gr. e giorno.

RATTO n. 6, di grammi 278, dall'11 al 15-12-1928, posto a digiuno, diminuì del 29 %; rialimentato acquistò il peso in 9 giorni e lo oltrepassò di gr. 31 in altri 19. Ingerì cibo pari a calorie 0.40 per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso guadagnato [ingerì cibo pari a 10 calorie. Tra il 1° e il 2° digiuno il ratto crebbe fino a gr. 309, ingerendo cibo pari a calorie 0.3 per gr. e giorno. Posto a digiuno il 13-1-1929 in 4 giorni diminuì del 26 %; rialimentato riacquistò il peso in 9 giorni e lo oltrepassò di gr. 18 in altri 15, ingerendo cibo pari a 0.36 calorie per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso guadagnato ingerì cibo pari a 11 calorie. Dopo il 2° digiuno il ratto crebbe fino a gr. 328 ingerendo cibo pari a 0.26 calorie per gr. e giorno. Dal 10-2-1929 al 10-5-1929 il ratto fu alimentato con pane e verdura. Posto a digiuno dal 20-5-1929, in otto giorni, diminuì del 29 %. Rialimentato riacquistò il peso in 15 giorni e lo mantenne nei 15 giorni successivi, ingerendo cibo pari a 0.20 calorie per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso guadagnato ingerì 9.74 calorie. Dopo il 3° digiuno il ratto aumentò fino a gr. 365 e ingerì cibo pari a calorie 0.18 per gr. e giorno.

RATTO n. 7 di gr. 244, operato il 1°-12-1928 fu posto a digiuno l'11 seguente e in 6 giorni diminuì del 25 %. Rialimentato riacquistò il peso in 9 giorni e lo oltrepassò di gr. 25 in altri 10 giorni, ingerendo cibo pari a 0.38 per gr. e giorno. Per ogni gr. di peso guadagnato ingerì 11.3 calorie. Tra il 1° e il 2° digiuno il ratto aumentò fino a gr. 269 ingerendo calorie 0.28 per gr. e giorno. Posto a digiuno il 13-1-1929 in 4 giorni diminuì del 21 %. Rialimentato in 24 giorni crebbe fino a gr. 250, ingerendo cibo pari a calorie 0.28 per gr. e giorno. Posto di nuovo a digiuno dal 20-5-1929 in 8 giorni diminuì del 30 % da gr. 250 a gr. 173. Rialimentato in 17 giorni crebbe fino a gr. 238, ingerendo cibo pari a 0.16 per gr. e giorno.

RATTO n. 6	Urea totale gr.	RATTO n. 6	Urea totale gr.
20-23-11-1928	0.665	15-1-1929	0.295
29-11-1928	0.404	16-1-1929	0.161
1-12-1928	0.741	30-1-1929	0.550
5-12-1928	0.207	1-2-1929	0.725
11-12-1928	0.156	18-19-5-1929	0.261
12-12-1928	0.197	20-5-1929	0.187
13-12-1928	0.108	21-5-1929	0.169
14-12-1928	0.210	22-5-1929	0.205
15-12-1928	0.520	23-5-1929	0.177
26-12-1928	0.404	24-5-1929	0.240
28-12-1928	0.100	25-5-1929	0.242
8-10-1-1929	0.345	26-5-1929	0.357
13-1-1929		27-5-1929	0.603
14-1-1929		3-9-6-1929	

RATTO n. 7	Urea totale gr.	RATTO n. 7	Urea totale gr.
20-22-11-1928	0.679	15-1-1929	0.181
29-11-1928	0.418	16-1-1929	0.190
1-12-1928	0.853	30-12-1928	0.369
5-12-1928	0.213	1-1-1929	0.176
7-12-1928	0.059	20-5-1929	0.043
11-12-1928	0.067	21-5-1929	0.095
12-12-1928	0.042	22-5-1929	0.092
13-12-1928	0.087	23-5-1929	0.205
14-12-1928	0.456	24-5-1929	0.050
15-12-1928	0.358	25-5-1929	0.151
26-28-12-1928	0.172	26-5-1929	0.504
8-10-1-1929	0.087	27-5-1929	0.365
13-1-1929		3-6-1929	
14-1-1929			

RATTO n. 3	Urea totale gr.	RATTO n. 3	Urea totale gr.
20-22-11-1928	0.697	30-1-1929	0.256
28-11-1928	0.500	1-2-1929	
1-12-1928		18-19-5-1929	0.650
5-7-12-1928	0.964	20-5-1929	0.149
11-12-1928	0.190	21-5-1929	0.149
12-12-1928	0.149	22-5-1929	0.063
13-12-1928	0.158	23-5-1929	0.073
14-12-1928	0.107	24-5-1929	0.132
15-12-1928	0.046	25-5-1929	0.116
26-28-12-1928	0.845	26-5-1929	0.105
8-10-11-1929	0.411	27-5-1929	0.214
13-1-1929	0.207	28-5-1929	0.216
14-1-1929	0.159	3-9-6-1929	0.666
15-1-1928	0.153		

RATTO n. 5	Urea totale gr.	RATTO n. 5	Urea totale gr.
20-22 11-1928	0.452	30-1-1929	0.632
29-11-1928	0.340	1-2-1929	
1-12-1928		19-19-5-1929	0.855
5-7-12-1928	0.588	20-5-1929	0.281
11-12-1928	0.257	21-5-1929	0.203
12-12-1928	0.207	22-5-1929	0.151
13-12-1928	0.140	23-5-1929	0.152
14-12-1928	0.232	24-5-1929	0.186
15-12-1928	0.224	25-5-1929	0.114
26-12-1928	0.488	26-5-1929	0.150
8-10-1-1929	0.521	27-5-1929	0.142
13-1-1929	0.184	28-5-1929	0.141
14-1-1929	0.309	3-9-6-1929	0.424
15-1-1929	0.467		
16-1-1929	0.271		

Esaminati i risultati esposti si osserva che tra un digiuno e l'altro e durante i periodi di rialimentazione gli animali castrati ingerirono cibo in quantità pressochè uguale al controllo, riferita a grammo di peso. I valori, calcolati enegeticamente furono di piccole calorie 0.27, 0.30, 0.27 per i ratti nn. 3, 5 e 7 operati e 0.30 per il ratto controllo, nel periodo intercorso fra il 1° e il 2° digiuno. Dopo il 2° digiuno i valori furono nell'ordine 0.28, 0.29, 0.28 e 0.26 per il controllo: dopo la terza rialimentazione furono 0.19, 0.18, 0.16 e 0.18. La diminuzione di consumo dell'ultimo periodo di esperimento è indipendente dall'operazione subita dai ratti nn. 3, 5 e 7 perchè essa si presentò anche nel ratto n. 6 controllo. Dipende invece dalle variazioni della temperatura ambiente che durante il 1° e 2° digiuno fu di 12-14 c° e di 25 c° nel 3° digiuno. Il ratto 7, a differenza dei ratti 3 e 5, dopo il 2° digiuno non riacquistò il peso iniziale neppure quando, dopo il periodo di rialimentazione con la miscela alimentare nota, fu posto ad alimentazione con pane e verdura, come i ratti nn. 3 e 5 che avevano riguadagnato tutto il peso perduto.

Con questa alimentazione i ratti nn. 3 e 5 mostrarono evidente ingrassamento: il ratto n. 7 non ingrassò mai.

Nel primo digiuno eseguito dopo 10 giorni dalla castrazione la perdita del peso dei ratti operati fu quasi uguale a quella del controllo. Con la rialimentazione susseguente il controllo in 9 giorni guadagnò il peso perduto in 19 giorni successivi crebbe di altri 31 gr. Contegno uguale mostrò il ratto n. 7: i ratti nn. 3 e 5 impiegarono poco tempo di più, 11 giorni invece di 9, per guadagnare il peso perduto e non ebbero un ulteriore aumento sensibile di peso. Anche nel 2° digiuno il contegno dei quattro ratti non fu molto diverso. Rialimentato il controllo riguadagnò il peso perduto in 9 giorni e crebbe di 18 gr. in altri 15 giorni: i ratti operati non superarono il peso iniziale del digiuno. Questo peso fu raggiunto soltanto dai nn. 3 e 5 in rispettivi giorni 9 e 17. Nel 3° digiuno i ratti nn. 3 e 5 che precedentemente erano ingrassati, persero il 30 % del peso in 9 giorni, il n. 7 e il controllo in 8 giorni. Nella rialimentazione il controllo e i ratti operati ebbero un comportamento diverso: il primo in 15 giorni riguadagnò il peso perduto, gli altri non lo ricuperarono più interamente. Raggiunto il peso iniziale del 3° digiuno il controllo non lo aumentò ulteriormente, il che probabilmente è in rapporto col fatto che l'animale dopo il 3° digiuno aveva raggiunto il peso massimo compatibile con la sua età e con la sua taglia in condizioni normali di salute.

Considerando i valori di eliminazione dell'urea si nota che nei digiuni successivi fu escreta urea in quantità sempre maggiore, a parità di perdita di peso. L'aumento di eliminazione di urea si fece indipendentemente dal peso iniziale dell'animale perchè si verificò anche nel ratto 7 il peso del quale non era variato.

L'aumento fu per il ratto n. 6 di controllo in proporzione maggiore. Durante il 3° digiuno questo ratto eliminò per grammo medio di peso e per

giorno gr. 0.00067 di n.: gli altri nn. 3, 5 e 7 ne eliminarono rispettivamente gr. 0.00023, gr. 0.00036, gr. 0.00046. In complesso si può affermare che il contegno dei ratti operati durante il 1° e il 2° digiuno e le successive rialimentazioni non fu molto diverso dal contegno del ratto controllo e che invece una certa differenza si osservò durante la rialimentazione seguente il 3° digiuno. Il fatto probabilmente è in rapporto o con la persistenza dopo un certo tempo dalla castrazione di ormoni sessuali nei tessuti oppure con l'attenuarsi successivo, per mancanza di eccitamento specifico, di funzioni del sistema nervoso o di altri organi connessi con l'attività sessuale.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 6 dicembre 1931 (Anno X)

Presidenza del prof. C. SOMIGLIANA

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica (Analisi matematica). — *Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. FUBINI.

Sia $u + iv$ una funzione analitica delle variabili complesse $x^{(1)} + ix^{(2)}$, $x^{(3)} + ix^{(4)}$. In questa Nota indicheremo sempre con indici le derivate, ponendo p. es. $u_i = \frac{\partial u}{\partial x^{(i)}}$ ecc. Le condizioni di monogeneità sono le:

$$(1) \quad u_1 = v_2, u_2 = -v_1, u_3 = v_4, u_4 = -v_3.$$

Sia Δ il contorno (a tre dimensioni) di una quadricella Γ dello spazio S (a quattro dimensioni) ove le x sono coordinate di punto. Il Severi si è posto il problema: *Costruire in Γ le funzioni u, v soddisfacenti a (1), quando ne siano dati i valori U, V su Δ , e riconoscere quando il problema è risolubile.* Tale problema sembra a prima vista un problema banale e mal posto, perchè le condizioni di risolubilità si riducono a complicate e inestricabili equazioni integrali per le U, V . Ma il Severi giunse, or non è molto⁽²⁾, al risultato inaspettato che le condizioni di risolubilità si riducono in definitiva a due equazioni differenziali lineari del 1° ordine per le U, V .

Egli cominciò ad osservare che, risoluto il problema locale in un intorno di un punto di Δ , si poteva affermare la risolubilità integrale dello stesso

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) Questi « Rendiconti », 1° sem. 1931, p. 795.

problema in tutto Γ (e ciò in virtù di un teorema dell'Hartogs che una funzione olomorfa in ogni punto di Δ è anche olomorfa in tutto Γ).

Siamo dunque ridotti al problema locale, per risolvere il quale il Severi ricorre a un metodo elegante, probabilmente suscettibile di altre applicazioni, che qui non è il luogo di riassumere. Qui vogliamo dimostrare che, senza allontanarci dai metodi classici, si può, con non minore semplicità, studiare il problema *locale*; (il che equivale, per la precedente osservazione, allo studio del problema *integrale* nel campo Γ).

Un teorema dato dal Levi-Civita in questi « Rendiconti » (2° sem. 1905; p. 492) ci assicura che $u + iv$ è determinata dai valori assunti dalle u, v su una superficie V_2 (a due dimensioni) generica (cioè *non caratteristica*) dello spazio ambiente S ; in quanto che tale conoscenza equivale a dare i coefficienti dello sviluppo (convergente) in serie di Taylor della $u + iv$ relativo a un intorno di un punto generico A della V_2 assegnata, cioè equivale a dare i valori in tale punto A delle u, v e loro derivate (soddisfacenti alle condizioni di convergenza). Nel nostro caso dunque, per costruire la $u + iv$ in un intorno di un punto A di Γ col metodo del Levi-Civita, basterà prendere in Δ una V_2 generica (non caratteristica) passante per A . Essendo dati per ipotesi i valori di $U + iV$ su tutto Δ , saranno conosciuti anche tali valori sulla V_2 , e, col Levi-Civita, potremo determinare $u + iv$ in tutto l'intorno di A . La funzione così ottenuta assumerà i valori prescritti sulla V_2 considerata, e perciò risolverà proprio il problema *locale* propostoci, se essa non dipende dalla scelta della V_2 tracciata in Δ uscente da A , cioè se i valori in A delle u, v e loro derivate sono indipendenti dalla scelta di tale V_2 . A noi basterà pertanto rendere esplicite tali condizioni di indipendenza. I valori delle u, v in A coincidono coi valori delle *date* funzioni U, V , e non dipendono pertanto dalla V_2 scelta. Occupiamoci dunque dei valori (in A) delle derivate delle u, v . E cominciamo dalle derivate prime. Supponiamo che (in un intorno di A) Δ si possa definire dando le $x^{(i)}$ come funzioni di tre parametri $\rho^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$); e poniamo $x_\alpha^{(i)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial \rho^\alpha}$, ecc. Se la V_2 di Δ fosse la $\rho^{(3)} = \text{cost.}$, i valori in A delle derivate prime delle u, v sarebbero determinati evidentemente dalle:

$$(2) \quad \sum_i u_i x_\alpha^{(i)} = U_\alpha \qquad (3) \quad \sum_i v_i x_\alpha^{(i)} = V_\alpha$$

(per $\alpha = 1, 2$) e dalle (1). Cosicchè i valori in A delle u_i sarebbero determinate dalle (2) e dalle

$$(4) \quad -u_2 x_\alpha^{(1)} + u_1 x_\alpha^{(2)} - u_4 x_\alpha^{(3)} + u_3 x_\alpha^{(4)} = V_\alpha$$

(per $\alpha = 1, 2$) conseguenza delle (1) e delle (3). Le derivate successive della u si ricaverebbero dalle equazioni ottenute derivando le (2) e (4)

rispetto alle $\rho^{(1)}$ e $\rho^{(2)}$. Ora è ben evidente che, affinchè i valori delle u_i non cambino se alla $\rho^{(3)} = \text{cost.}$ uscente da A sostituiamo p. es. la $\rho^{(1)} = \text{cost.}$, o la $\rho^{(2)} = \text{cost.}$ o un'altra V_2 qualsiasi uscente da A, è condizione necessaria e sufficiente che gli stessi *quattro* valori delle u_i soddisfino alle *sei* equazioni lineari ottenute ponendo $\alpha = 1, 2, 3$ nelle (2) e (4). Per il che è necessario e sufficiente che le U_α, V_α soddisfino a *due* equazioni lineari, ottenute eliminando le u_i dalle equazioni citate. E, *se tali due equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del primo ordine delle funzioni* U, V *sono soddisfatte non solo in A, ma identicamente in tutto* Δ , anche le conseguenze differenziali delle (2), (4) saranno compatibili. E i valori in A di tutte le derivate delle u, v saranno, come si voleva, indipendenti dalla scelta della V_2 iniziale. *Si è dunque dimostrato proprio il teorema del Severi*, che riduce le condizioni di risolubilità del problema ad equazioni differenziali.

Il teorema medesimo equivale manifestamente, dal punto di vista locale, ad un teorema di unicità e di esistenza pel sistema delle due equazioni differenziali del 1° ordine cui debbon soddisfare, entro Δ , le U, V : basta cioè assegnare ad arbitrio i valori iniziali (analitici) delle U, V sopra una superficie non caratteristica contenuta in Δ , perchè sieno localmente determinati, in modo univoco, gl'integrali U, V del detto sistema. Come mi ha fatto osservare il Severi, si pone qui naturalmente il problema di riconoscere a quali condizioni devon soddisfare i valori iniziali, perchè le U, V sieno olomorfe in tutto Δ , o meglio, se si può ulteriormente limitare l'arbitrarietà della scelta dei dati iniziali, in modo che vi sia una sola coppia U, V olomorfa in tutto Δ . Il Severi ha dimostrato che due funzioni U, V olomorfe in tutto Δ e soddisfacenti al solito sistema differenziale del 1° ordine, son individuate dai loro valori iniziali sopra un pezzo di *linea* regolare generica di Δ (generica nel senso da non soddisfare a due certe ben determinate condizioni quantitative). Questo per l'unicità; quanto all'esistenza bisogna cercare se effettivamente i valori iniziali (analitici) lungo una tal linea posson darsi ad arbitrio.

Astronomia. — *Ricerche sopra le variazioni dell'assorbimento atmosferico ed osservazioni varie.* Nota di G. ARMELLINI e G. CONTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe.*
Nota di E. BOMPIANI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In una ricerca da qualche tempo intrapresa sulle proprietà proiettivo-differenziali delle congruenze di curve mi sono imbattuto in alcune proprietà di coppie di curve passanti per un punto che possono essere stralciate dal resto della ricerca e che di per sè presentano interesse: tanto più notevole, mi pare, in quanto da esse derivano senz'altro proprietà, ottenute in vario modo ma non certo più semplice, delle superficie mentre esse si presentano in circostanze molto più generali. È forse appunto per aver isolato le circostanze essenziali da cui quelle proprietà dipendono che la dimostrazione ne riesce particolarmente semplice.

È noto che Halphen ha introdotto per due curve C e \bar{C} aventi in un punto O un contatto d'ordine $n (\geq 0)$ la nozione di *piano principale*. È il luogo dei vertici V dei coni proiettanti C e \bar{C} ed aventi lungo la generatrice per O un contatto d'ordine $n + 1$. Se $n = 0$, cioè se C e \bar{C} passano con tangenti diverse, t e \bar{t} , per O , il piano principale è (t, \bar{t}) , com'è evidente.

2. In un lavoro: *Sul contatto di due curve sghembe*⁽²⁾ ho visto che (per $n \geq 1$) si possono nel piano principale caratterizzare una *retta principale* e un *punto principale* tali che i coni proiettanti C e \bar{C} da un punto della retta principale o dal punto principale hanno un contatto d'ordine $n + 2$ o $n + 3$.

Come s'è detto per $n = 0$ il risultato relativo al piano principale è evidente: offre invece notevole interesse la determinazione delle rette e dei punti principali.

Precisamente: se le due curve C e \bar{C} passano per O ⁽³⁾ con tangenti t, \bar{t} distinte e con piani osculatori distinti (e con retta di intersezione diversa da t e da \bar{t}) esistono per O **due rette principali** determinate dagli intorni del 2° ordine di O su C e \bar{C} e **due punti principali** determinati dagli intorni del 3° ordine.

Se invece C e \bar{C} hanno lo stesso piano osculatore (t, \bar{t}) esistono **tre rette** e **tre punti principali** determinati rispettivamente dagli intorni di 3° e

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) «Memorie della R. Accad. di Scienze di Bologna», t. III, s. VIII, 1925-26.

(3) Suppongo O regolare per tutt'e due le curve: l'ipotesi opposta dà luogo a circostanze molto differenti che andrebbero discusse a parte.

4° ordine rispettivamente (e per i quali i contatti dei coni sopra nominati divengono del 3° e del 4° ordine).

I tre punti principali non sono generalmente allineati: la polare armonica di O è pure una retta invariante (legata agli intorno del 4° ordine). Essi sono allineati se e solo se esiste una quadrica (e allora ne esistono ∞^3) avente un contatto quadripunto con le due curve in O .

È naturale applicare queste considerazioni al caso che C e \bar{C} siano le asintotiche di una superficie. *In tal caso l'ultimo fatto si presenta sempre e la retta su cui sono allineati i tre punti principali è il 2° spigolo di Green.* Questa apparisce dunque in un certo senso come la più importante fra le rette canoniche in quanto è unicamente determinata dagli elementi del 4° ordine delle asintotiche in O (e non da altri elementi dell'intorno del 4° ordine di O sulla superficie).

3. Nell'ipotesi che C e \bar{C} abbiano tangenti e piani osculatori in O distinti e secantisi in una retta diversa da t e da \bar{t} , assumiamo queste tangenti e la retta ora nominata come assi $xy\zeta$. La rappresentazione analitica delle due curve nell'intorno di O sia

$$C \begin{cases} y = rx^3 + \dots \\ \zeta = ax^2 + bx^3 + \dots \end{cases} \quad (I) \quad \bar{C} \begin{cases} \bar{x} = \rho y^3 + \dots \\ \bar{\zeta} = \alpha y^2 + \beta y^3 + \dots \end{cases}$$

Se si proietta \bar{C} dal punto $V(x_0, y_0, 0)$ sul piano $y = 0$ si ha per la curva proiezione

$$X = x - r \frac{x_0}{y_0} x^3 + [4] \quad , \quad Z = ax^2 + bx^3 + [4]$$

cioè

$$(2) \quad Z = aX^2 + bX^3 + [4]$$

indicando con $[n]$ termini di grado $\geq n$ nella variabile adottata.

Proiettando invece \bar{C} dallo stesso punto sullo stesso piano si ha

$$X = -\frac{x_0}{y_0} y - \frac{x_0}{y_0^2} y^2 + \left(\rho - \frac{x_0}{y_0^3}\right) y^3 + [4] \quad , \quad Z = \alpha y^2 + \left(\frac{\alpha}{y_0} + \beta\right) y^3 + [4]$$

cioè

$$(3) \quad Z = \alpha \frac{y_0^2}{x_0^2} X^2 + (\alpha - \beta y_0) \frac{y_0^2}{x_0^3} X^3 + [4].$$

L'invariante di contatto degli elementi di curve (2) e (3) in O (cioè, potrebbe dirsi, delle due curve C e \bar{C} rispetto alla retta OV) è

$$(4) \quad \frac{\alpha}{a} \frac{y_0^2}{x_0^2}$$

quindi dipende soltanto dalla retta su cui si prende il centro di proiezione (ma non da questo).

Le due rette di equazioni

$$(5) \quad \alpha y_0^2 = a x_0^2, \quad \bar{\alpha} = 0$$

sono principali nel senso che preso V sopra una di esse i due coni proiettanti hanno un contatto del 2° ordine lungo OV: *le rette principali dividono armonicamente le tangenti alle curve date in O.*

Affinchè il contatto fra i due coni, o fra le due curve (2) e (3) si elevi al 3° ordine oltre alla (5) deve aversi $b x_0^3 + \beta y_0^3 = \alpha y_0^2$ cioè i punti appartenenti alle due rette principali e alla retta

$$(6) \quad \alpha b x_0 + a \beta y_0 = a \alpha$$

sono i *punti principali*.

Queste nozioni trovano applicazioni alla teoria proiettiva delle congruenze di curve, delle superficie, degli involucri di superficie, ecc.

4. Esaminiamo l'ipotesi che le curve C e \bar{C} abbiano in O tangenti distinte ma lo stesso piano osculatore.

Rappresentiamole con gli sviluppi:

$$C \begin{cases} \bar{z} = r x^3 + s x^4 + [5] \\ y = a x^2 + b x^3 + c x^4 + [5] \end{cases} \quad (7) \quad \bar{C} \begin{cases} \bar{\bar{z}} = \rho y^3 + \sigma y^4 + [5] \\ \bar{\bar{z}} = \alpha y^2 + \beta y^3 + \gamma y^4 + [5] \end{cases}$$

e proiettiamole dal punto V ($x_0 y_0 0$) sul piano $y = 0$.

Per la proiezione di C si ha:

$$(8) \quad X = x - \frac{x_0}{y_0} a x^2 + \left(\frac{a}{y_0} - \frac{x_0}{y_0} b \right) x^3 + \left(\frac{b}{y_0} - \frac{x_0}{y_0} c - \frac{x_0}{y_0^2} a^2 \right) x^4 + [5]$$

$$(9) \quad Z = r x^3 + s x^4 + [5]$$

quindi

$$(10) \quad Z = r X^3 + \left(3 \frac{x_0}{y_0} a r + s \right) X^4 + [5].$$

Per la proiezione di \bar{C}

$$(11) \quad X = -\frac{x_0}{y_0} y + \left(\alpha - \frac{x_0}{y_0^2} \right) y^2 + [3]$$

da cui

$$(12) \quad y = -\frac{y_0}{x_0} X + \left(\alpha - \frac{x_0}{y_0^2} \right) \frac{y_0^3}{x_0^3} X^2 + [3]$$

e

$$(13) \quad Z = \rho y^3 + \left(\sigma + \frac{\rho}{y_0} \right) y^4 + [5]$$

e perciò

$$(14) \quad Z = -\rho \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^3 X^3 + \left\{ 3\rho \left(\alpha - \frac{x_0}{y_0^2} \right) \frac{y_0}{x_0} + \left(\sigma + \frac{\rho}{y_0} \right) \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^4 \right\} X^4 + [5].$$

Confrontando gli sviluppi (10) e (14) relativi alle due proiezioni di C e \bar{C} si vede che l'invariante di contatto $-\frac{\rho}{r} \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^3$ dipende soltanto dalla retta OV (e non dal punto V su di essa); e pertanto può chiamarsi invariante di contatto delle due curve relativo alla retta OV. Questo invariante è uguale ad 1, cioè il contatto dei due coni si eleva dal 2° al 3° ordine se V è tale che

$$(15) \quad r x_0^3 + \rho y_0^3 = 0 \quad (\chi = 0).$$

Questa equazione definisce, nel piano delle due tangenti, **tre rette principali**: la terna di queste rette è apolare alle due tangenti date.

Posto $\frac{r}{\rho} = -l^3$ e perciò indicate le tre rette principali con $\frac{y_0}{x_0} = l\epsilon_i$

ove ϵ_i è una radice cubica dell'unità, si trova che il contatto fra i due coni proiettanti si eleva al 4° ordine quando si scelga V in uno dei punti

$$(16) \quad x_0 = 2r\rho l \epsilon_i / Q; \quad y_0 = 2r\rho l^2 \epsilon_i^2 / Q \quad \text{e} \quad Q = 3ar\rho - 3\alpha r^2 + \sigma\rho l \epsilon_i + \sigma r l^2 \epsilon_i^2.$$

Sono queste (con $\chi = 0$) le coordinate dei **tre punti principali**. Questi tre punti non sono generalmente allineati.

La polare armonica del punto O rispetto al triangolo dei punti principali è la retta di equazione

$$(17) \quad \frac{s}{r} x + \frac{\sigma}{\rho} y = 2.$$

I due punti nei quali questa retta taglia le due tangenti a C e a \bar{C} , di coordinate $(2r/s, 0, 0)$ e $(0, 2\rho/\sigma, 0)$, sono pure due punti invarianti; per trovarne il significato geometrico consideriamo p. es. il primo di essi. Se ritorniamo alla (9) vediamo che esso è pienamente definito dalla proiezione di C (nell'intorno del 4° ordine di O) fatta da un punto qualsiasi $(x_0, y_0, 0)$ del suo piano osculatore sopra un piano qualsiasi passante per la sua tangente t (qual'è il piano $y = 0$). Ciò prova che il punto invariante su t può definirsi riferendosi unicamente ad una di queste proiezioni piane (dotate di flesso in O con tangente t).

D'altra parte per una curva piana con flesso in O esiste sulla tangente t un punto ben definito che ne rappresenta l'intorno del 4° ordine⁽¹⁾: esso è il punto per cui passano le tangenti cuspidali a tutte le cubiche (cuspidate) aventi con la curva data un contatto del 4° ordine in O .

Tenuto presente questo risultato e le osservazioni precedenti si ha il teorema:

Due curve C e \bar{C} passanti per un punto O con tangenti distinte t, \bar{t} ma con lo stesso piano osculatore determinano in questo piano: tre rette principali per O e tre punti principali (uno su ciascuna delle rette precedenti) generalmente non allineati. La polare armonica di O rispetto al triangolo da essi determinato (o la retta su cui eventualmente fossero allineati) sega le tangenti t e \bar{t} in punti invarianti ciascuno dei quali dipende unicamente dalla curva alla cui tangente appartiene. Quello di essi relativo p. es. a C è il punto per cui passano le tangenti cuspidali a tutte le cubiche (cuspidate) aventi un contatto del 4° ordine in O con le proiezioni di C dotate di flesso in O ⁽²⁾.

5. Una particolarità proiettiva della coppia di elementi del 4° ordine delle due curve in O è l'essere i tre punti principali allineati. Questa circostanza si presenta se e solo se

$$(18) \quad ap = \alpha r.$$

A questa condizione può darsi un'altra interpretazione geometrica. Le quadriche aventi un contatto del 3° ordine in O con la curva C e per generatrici t e \bar{t} hanno un'equazione del tipo

$$(19) \quad \chi = \frac{r}{a} xy + k_1 x\chi + k_2 y\chi + k_3 \chi^2$$

con k_1, k_2, k_3 arbitrarie. L'equazione di una quadrica avente comportamento analogo con \bar{C} si ottiene dalla (19) ponendo $\frac{\rho}{\alpha}$ in luogo di $\frac{r}{a}$. Ne segue:

Se e solo se i tre punti principali sono allineati esistono (una e quindi) ∞^3 quadriche aventi per generatrici t e \bar{t} e un contatto del 3° ordine in O con C e con \bar{C} .

Se questo accade è poi possibile determinare un fascio di quadriche per le quali il contatto con le due curve si eleva al 4° ordine. Basta prendere

$$(20) \quad k_1 = \frac{s}{r} - \frac{b}{a}, \quad k_2 = \frac{\sigma}{\rho} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad k_3 \text{ arbitraria.}$$

(1) E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità*, « Bollettino Unione Matem. Ital. », a. V, 3, 1926.

(2) Si noti che si è così provata incidentalmente l'esistenza di un punto invariante sulla tangente ad una curva ghemba e se ne è data la costruzione.

6. Il caso per così dire più cospicuo in cui si presenta la situazione discussa al n. 4 è quello delle asintotiche di una superficie. Se ci si riferisce alle notazioni abituali⁽¹⁾ in cui β e γ determinano i coefficienti delle due forme differenziali che caratterizzano la superficie nel gruppo delle applicabilità proiettive può porsi nelle (7):

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2}\beta \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2}\gamma \quad ; \quad r = \frac{1}{6}\beta \quad , \quad \rho = \frac{1}{6}\gamma \quad ; \\ s = -\frac{1}{12}\beta \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \quad , \quad \sigma = -\frac{1}{12}\gamma \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} . \end{array} \right.$$

Risulta intanto che la (18) è soddisfatta, cioè:

Per le asintotiche di una superficie si presenta sempre la circostanza discussa nell'ultimo numero, cioè esistono ∞^3 quadriche a contatto del 3° ordine con le asintotiche in O⁽²⁾.

È quasi superfluo aggiungere che le ∞^1 quadriche a contatto del 4° ordine trovate al n. 5 costituiscono in questo caso il fascio di quadriche del Darboux.

Le tre rette principali, di equazione complessiva $\beta x^3 + \gamma y^3 = 0$ a norma delle (15) e (21) sono precisamente le tangenti del Darboux.

Infine la retta dei tre punti principali di equazione

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} x - \frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} y = 1$$

è precisamente il secondo spigolo di Green⁽³⁾.

7. Rimarrebbe da esaminare il caso di due curve passanti per O con tangenti distinte t e \bar{t} , e tali che il piano $t\bar{t}$ sia osculatore ad una di esse. In questo caso non può più propriamente parlarsi di piano, retta o punto principale. Ciò non toglie che possano definirsi una retta e un punto invariantivamente associati ad O sulle due curve. Bisognerebbe allo scopo però studiare preventivamente il comportamento di due curve tangenti in un punto, delle quali una dotata di flesso e l'altra no. Ciò non è stato fatto; e il farlo ora allungherebbe soverchiamente questa Nota.

(1) Vedasi p. es. FUBINI-ČECH: *Geometria Proiettiva Differenziale*, Zanichelli, Bologna, 1926.

(2) Avevo già segnalato questo fatto nella Nota: *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario* («Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LIX, 1924); § 6.

(3) Di questa retta sono state date recentemente due eleganti costruzioni; una da V. STRAZZERI, *Una definizione geometrica dello spigolo di Green*, («Rend. Circ. Mat. di Palermo», 1930) che l'ottiene come retta dei flessi di una cubica nodata a contatto del 3° ordine con la sezione prodotta dal piano tangente alla superficie in O; l'altra da G. PALOZZI, *Lo spigolo di Green e la normale proiettiva di Fubini* (che comparirà in un prossimo fascicolo di questi «Rendiconti») che l'ottiene servendosi dei punti invarianti introdotti nella mia Nota già citata del «Bollett. Unione Matem. Italiana».

Matematica. — *Connessioni affini associate ad una $(n + 1)$ -pla di congruenze in una varietà n -dimensionale.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Il prof. Blaschke ha, recentemente, indicato⁽²⁾ come possa univocamente associarsi a una quaterna di congruenze di linee in una X_3 (varietà 3-dimensionale) — comunque assegnata, purchè in ciascun punto le direzioni delle quattro linee delle supposte congruenze che ne escono siano tre a tre indipendenti — una legge di trasporto dei vettori, e anzi, una *connessione affine* per la quale le linee delle quattro congruenze sono autoparallele. Nella presente Nota io espongo una ricostruzione, e insieme estensione alle X_n (n qualunque) del risultato di Blaschke: ottenuta con procedimento assai diverso, e cioè come applicazione di una mia precedente teoria dei trasporti lineari delle direzioni⁽³⁾, e di noti risultati sui parallelismi assoluti⁽⁴⁾.

La connessione che così viene determinata, in una X_n , a partire da $n + 1$ congruenze di autoparallele, rientra in quel tipo di connessioni affini — che per brevità chiamerò *equimodulari*⁽⁵⁾ — per le quali si annulla il « vettore di Einstein », $\Phi_r = S_{ri}^{ii}$; ma è pure possibile, come mostro nel seguito, associare in modo univoco a quella $(n + 1)$ -pla di congruenze — o meglio: alla « stella proiettiva » di congruenze che essa individua — anche altre connessioni affini di natura particolare, *simmetriche* ed *emisimmetriche*. A proposito di queste ultime, colgo l'occasione per esporre alcune osser-

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) *Topologische Fragen der Differentialgeometrie* 19. *Flächengewebe und ihre Diagonalen*, « Hamburg. Abhandlungen », 8. Band, 1930, pp. 56-82, ved. p. 66; *Neue Strömungen der Differentialgeometrie*, « Jahresber. Deut. Mathem. Vereinigung », 40. Band, 1931, pp. 1-15 ved. pp. 10-11.

(3) Ved. la mia Memoria, *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariante delle trasformazioni che conservano il parallelismo*, « Annali di Matematica », serie IV, tomo VIII, 1930, pp. 53-101, spec. pp. 75 e sg. (Citerò d'ora in poi con G. A. questo lavoro). Ved. anche la mia Nota, *Differential invariants of direction and point displacements*, « Annals of Mathematics », 2^a ser., vol. 32, 1931, pp. 361-377.

(4) Ved. i miei lavori: *Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine, e nuove vedute sulla Relatività*, « Memorie Accad. Bologna », serie VIII, tomo VI, 1928-1929, pp. 45-58, e *Stelle di congruenze e parallelismo assoluto: basi geometriche per una recente teoria di Einstein*, « Rendiconti Accad. Lincei », serie 6^a, vol. IX, 1929, pp. 530-538; lavori che citerò d'ora in poi con P. A., S. C., rispettivamente.

(5) Ciò in relazione a una proprietà caratteristica di tali connessioni, da me indicata nel lav. cit., G. A., p. 61.

vazioni circa la teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale (basata appunto su di una connessione emisimmetrica) proposta recentemente da P. Straneo ⁽¹⁾.

2. Siano

$$(1) \quad \frac{du^1}{Y^1_\alpha} = \frac{du^2}{Y^2_\alpha} = \dots = \frac{du^n}{Y^n_\alpha} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, \dots, n,$$

le equazioni differenziali delle linee di una $(n+1)$ -pla di congruenze in X_n ; le funzioni $Y^r_\alpha(u^1, u^2, \dots, u^n)$ [$p, q, r, s, t = 1, 2, \dots, n$] intendendosi continue con le loro derivate ⁽²⁾, e tali che nella matrice $\|Y^r_\alpha\|$ siano $\neq 0$ tutti i minori dell'ordine massimo, n . Il sistema d'equazioni lineari nelle h^α :

$$(2) \quad h^\alpha_\alpha Y^r_\alpha = 0$$

ammette infinite soluzioni proporzionali: presane una ad arbitrio e posto, corrispondentemente,

$$(3) \quad X^r_\alpha = h^0_\alpha Y^r_\alpha, \quad X^r_\alpha = h^1_\alpha Y^r_\alpha, \dots, X^r_\alpha = h^n_\alpha Y^r_\alpha$$

i vettori X^r_α , tangenti (come i vettori Y^r_α) alle linee delle $n+1$ congruenze, risultano determinati a meno d'un comune fattore scalare dalla supposta $(n+1)$ -pla di congruenze; cioè, dalle Y^r_α , ma in modo invariante per trasformazioni

$$(4) \quad \bar{Y}^r_\alpha = k Y^r_\alpha, \quad \bar{Y}^r_\alpha = k Y^r_\alpha, \dots, \bar{Y}^r_\alpha = k Y^r_\alpha$$

sulle Y^r_α , le k essendo fattori scalari arbitrari. E si ha naturalmente

$$(5) \quad X^r_\alpha + X^r_\alpha + \dots + X^r_\alpha = 0.$$

(1) Ved. le Note, *Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità*, «Rendiconti Accad. Lincei», serie 6^a, vol. XIII, 1931, pp. 364-370 (Nota I), 695-701 (Nota II), 770-774 (Nota III) e *Teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità*, «Bollettino Unione Matematica», vol. X, 1931, pp. 116-121. Questi lavori dello STRANEO verranno così citati: T. U., I, II, III, IV.

(2) Almeno fino al 3° ordine, se $n > 2$; almeno fino al 6° ordine, se $n = 2$. Derivate di questi ordini massimi intervengono nel calcolo dei tensori di curvatura delle metriche riemanniane introdotte al n. 5.

In conseguenza delle (5) per la connessione affine integrabile avente come campi di vettori equipollenti n (qualunque) dei campi $X^r_0, X^r_1, \dots, X^r_n$, ad es. $X^r_1, X^r_2, \dots, X^r_n$ (P. A., p. 47) anche l' $(n+1)$ -esimo dei campi ora detti è un campo di vettori equipollenti. E in particolare le $n+1$ congruenze di linee assegnate sono composte di autoparallele della connessione ora detta. La legge di parallelismo (assoluto) di questa connessione è la seguente: *due direzioni parallele in due punti P, Q formano, con le direzioni delle linee della $(n+1)$ -pla di congruenze che ne escono, due $(n+2)$ -ple proiettive.* (Cfr. Blaschke, loc. cit.).

3. La connessione integrabile in parola non è univocamente determinata dalla supposta $(n+1)$ -pla di congruenze; infatti non è invariante per una trasformazione

$$(6) \quad \bar{X}^r_\alpha = \rho(u^1, u^2, \dots, u^n) X^r_\alpha,$$

ρ essendo un campo scalare arbitrario. Però le connessioni corrispondenti a tutte le possibili determinazioni per ρ hanno, naturalmente, lo stesso parallelismo. Ora: io ho dimostrato⁽¹⁾ che ad una connessione affine arbitraria (Γ^r_{st}) è univocamente associata, in modo invariante per le trasformazioni che ne conservano il parallelismo, una connessione affine *equimodulare* (ved. n. 1), avente pure lo stesso parallelismo $\left(P^r_{st} = \Gamma^r_{st} + \frac{2}{n-1} \delta^r_s \Phi_t\right)$, ove $\Phi_t = S^{**r}_{tr}$, *vettore di Einstein*, ed $S^{**r}_{st} = \frac{1}{2}(\Gamma^r_{st} - \Gamma^r_{ts})$, *tensore di torsione della connessione Γ^r_{st}*). Nel nostro caso si ha (P. A., p. 47)

$$(7) \quad \Gamma^r_{st} = X^r_p \frac{\partial X^p_s}{\partial u^t} = -X^p_s \frac{\partial X^r_p}{\partial u^t}, \quad \text{ove} \quad X^p_s X^t_p = \delta^t_s,$$

$$(8) \quad P^r_{st} = X^q_p \left(\delta^q_t \frac{\partial X^p_s}{\partial u^t} - \frac{1}{n-1} \delta^r_s \omega^p_{qt} \right), \quad \left(\omega^p_{rs} = \frac{\partial X^p_r}{\partial u^s} - \frac{\partial X^p_s}{\partial u^r} \right).$$

Per $n=3$ la connessione P^r_{st} è proprio quella ottenuta per altra via dal Blaschke. Essa non è integrabile, a meno che non sia

$$(9) \quad \Phi_{rs} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial u^s} - \frac{\partial \Phi_s}{\partial u^r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u^s} \left(X^q_p \omega^p_{rq} \right) - \frac{\partial}{\partial u^r} \left(X^q_p \omega^p_{sq} \right) \right] = 0,$$

(1) Ved. G. A., p. 78, e pel caso attuale, anche P. A., p. 55.

$$(10) \quad a_{rs} = \alpha_{pq} \overset{p}{X}_r \overset{q}{X}_s, \quad \varphi_r = \frac{4}{n-1} \Phi_r,$$

ove con $\alpha = \alpha_{pq}$ abbiamo indicato $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie.

Se valgono le (9), e allora soltanto, la P'_{st} è una connessione *euclidea*.

5. La connessione P'_{st} è, in generale (escluso il caso $n=2$)⁽¹⁾, *asimmetrica*. Se vogliamo collegare univocamente, nel modo più semplice, ad una $(n+1)$ -pla (o ad una stella proiettiva) di congruenze una connessione *simmetrica*, basta prendere la *connessione simmetrica associata*, $Q'_{st} = \frac{1}{2}(P'_{st} + P'_{ts})$, alla P'_{st} (G. A., p. 62). Essa ha pure le linee della stella proiettiva di congruenze come autoparallele; però *non è* (generalmente) *una connessione metrica*. Ma è interessante il fatto che dalla stella di congruenze possa pure dedursi (in diverso modo nei due casi $n > 2$ ed $n = 2$) una connessione *simmetrica euclidea*, cioè una *metrica riemanniana*⁽²⁾. Basta assumere, se $n > 2$, come tensore fondamentale

(1) Per $n = 2$ una connessione equimodulare è sempre *simmetrica*.

(2) Si può invece supporre data nella X_n a priori una metrica riemanniana; riesce allora possibile associare a un qualunque sistema ∞^{n-1} di congruenze di linee, cioè a un sistema $\infty^2(n-1)$ di linee, tale che per due punti sufficientemente vicini della varietà esca una e una sola linea del sistema, in modo univoco una *legge di trasporto dei vettori* per la quale le linee del sistema sono *autoparallele*: trasporto *metrico*, ossia *rigido* (tale cioè da conservare il prodotto scalare di due vettori trasportati), ma generalmente *non lineare* nei riguardi della direzione di trasporto. Detto P un punto generico della varietà, γ la curva del sistema ora detto che esce da P con la direzione dell'elemento dP di componenti du^r , basta porre la condizione, che il trasporto infinitesimale da P a $P + dP$ avvenga secondo la legge del «trasporto parallelo relativo a γ » quale da me è definito nel lavoro: *Leggi di trasporto nei campi di vettori applicati ai punti di una curva o di una V_m in V_n riemanniana* («Memorie Accad. Bologna», serie VIII, tomo VII, 1929-1930, pp. 11-20), pp. 15-16. Inteso che $\bar{d}\eta^r = \nabla_s \eta^r \cdot du^s$ sia il *differenziale assoluto* del vettore η^r calcolato in relazione alla supposta metrica riemanniana, il dato sistema di linee può rappresentarsi con equazioni del tipo $\frac{\bar{d}^2 u^r}{ds^2} = \varphi^r \left(u^1, u^2, \dots, u^n; \frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}, \dots, \frac{du^n}{ds} \right)$, le φ^r essendo funzioni continue con le loro derivate prime, omogenee di grado 2 rispetto alle $\frac{du^r}{ds}$, e del resto arbitrarie. Posto $\bar{\varphi}^r = \varphi^r / \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \varphi^r \left(u^1, u^2, \dots, u^n; \frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds}, \dots, \frac{du^n}{ds} \right)$, ove $ds^2 = a_{rs} du^r du^s$, la legge di trasporto sopra definita si esprime analiticamente nel seguente modo:

$$\frac{\bar{d}\xi^r}{ds} = a_{pq} \xi^p \left(\frac{du^q}{ds} \bar{\varphi}^r - \frac{du^r}{ds} \bar{\varphi}^q \right).$$

Pel caso molto semplice $n = 2$ cfr. G. BARBA, *Parallelismo generalizzato*, «Rendiconti Accad. Lincei», serie 6^a, vol. XII, 1930, pp. 6-10, e vol. XIV, 1931, pp. 78-81; ove il trasporto è considerato soltanto lungo le linee del sistema assegnato: il che dà luogo, sulla superficie, a una sorta di teleparallelismo, generalmente *non transitivo*.

$$(11) \quad q_{rs} = H_{pr}^{\cdot\cdot q} H_{qs}^{\cdot\cdot p} \quad \text{ove} \quad H_{rs}^{\cdot\cdot t} = \frac{1}{2} (P_{rs}^t - P_{sr}^t)$$

(ved. P. A., p. 55); e se $n = 2$ (annullandosi allora identicamente il tensore $H_{rs}^{\cdot\cdot t}$)

$$(12) \quad k_{rs} = G_{rs} \cdot G^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{ove} \quad G = |G_{rs}|, \quad \text{e} \quad G_{rs} = \frac{1}{2} \epsilon^{pq} (\nabla_r \nabla_s \Phi_{pq} + \nabla_s \nabla_r \Phi_{pq})$$

(essendo $\epsilon^{pq} = \pm 1$ se $p = 1, q = 2$, o $p = 2, q = 1$, $\epsilon^{pq} = 0$ negli altri casi; le derivate covarianti intendendosi calcolate coi parametri P_{st}^r). Abbiamo supposto per $n > 2$, $|q_{rs}| \neq 0$; per $n = 2$, $|G_{rs}| \neq 0$; così accadrà in generale.

Infine ponendo, rispettivamente, nei due casi $n > 2$ ed $n = 2$,

$$(13) \quad R_{st}^r = \left\{ \begin{smallmatrix} s & t \\ r & q \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \delta_s^r \chi_t, \quad (\chi_t = H_{rt}^{\cdot\cdot p} \Phi_{ps} q^{rs}, \quad q^{rt} q_{rs} = \delta_s^t)$$

$$(14) \quad R_{st}^r = \left\{ \begin{smallmatrix} s & t \\ r & k \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{2} \delta_s^r \chi_t, \quad (\chi_t = \nabla_r \Phi_{st} \cdot k^{rs}, \quad k^{rt} k_{rs} = \delta_s^t)$$

(ove i simboli di Christoffel sono costruiti per q_{rs} e k_{rs}) abbiamo i parametri di connessioni *emisimmetriche* (secondo Schouten) individuate dalla stella proiettiva di congruenze. Esse sono, come la P_{st}^r , connessioni *metriche* generali; per le quali *una delle determinazioni del tensore e del vettore fondamentali della metrica, contraddistinta dal fatto che per essa il vettore fondamentale si identifica a meno di un fattore numerico, — $\frac{4}{n-1}$, col vettore di Einstein della connessione, è costituita proprio da q_{rs} , χ_t , o rispettivamente, da k_{rs} , χ_t .*

6. Queste ultime proprietà valgono pure, più in generale, per ciascuna connessione affine che sia ottenuta a partire da un tensore simmetrico g_{rs} e da un vettore ψ_t con formule del tipo (13) o (14). Ora è proprio questo il caso della connessione posta da P. Straneo a base della sua teoria unitaria,

$$(15) \quad L_{st}^r = \left\{ \begin{smallmatrix} s & t \\ r & g \end{smallmatrix} \right\} + 2 \delta_s^r \psi_t,$$

(T. U. II, p. 697 o IV, p. 118, form. [A]). Dunque:

1° La connessione L_{st}^r è *emisimmetrica*. La connessione simmetrica associata ad essa è $\left\{ \begin{smallmatrix} s & t \\ r & g \end{smallmatrix} \right\} + \delta_s^r \psi_t + \delta_t^r \psi_s$, il tensore di torsione è $\delta_s^r \psi_t - \delta_t^r \psi_s$ (cfr. T. U. II, p. 697, IV, p. 118): il vettore di Einstein Φ_r è

$$-(n-1) \psi_r = -3 \psi_r.$$

2° La connessione L_{st}^r è una connessione *metrica; non euclidea*, a meno che ψ_r non sia il gradiente di uno scalare (cfr. T. U. II, p. 697) ⁽¹⁾. Per essa sono però *determinati* il tensore e il vettore fondamentali della metrica, g_{rs} e ψ_i (cioè: quella che Weyl dice la « *Eichung* »), per effetto della relazione $-3\psi_r = \Phi_r$. In altre parole: se si vuole che ψ_r sia dato invece soltanto a meno di un gradiente additivo (T. U. II, p. 701) anche la connessione non può più considerarsi come univocamente fissata (a differenza di quanto accade nella teoria di Weyl).

3° Le autoparallele della connessione *coincidono sempre* con le geodetiche della metrica riemanniana definita dal tensore fondamentale g_{rs} (cfr. T. U. III, pp. 771-772; IV, p. 121).

Quanto precede può servire a precisare l'impostazione geometrica della teoria. Non ne tocca la sostanza, costituita a mio parere dal fatto notevole che tale teoria dà luogo in modo semplice (sia pure rinunciando *a priori* a dedurle da un principio di Hamilton generalizzato) ad equazioni che *formalmente* appaiono atte a una possibile rappresentazione unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale: in quanto esse contengono esattamente le classiche equazioni di Einstein e di Maxwell come casi particolari.

Matematica. — *Trasporti metrici di punteggiate e trasporti rigidi di fasci.* Nota di G. BARBA, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In un esame approfondito del parallelismo generalizzato in una V_2 a curvatura costante à rilievo un fatto che, almeno dal punto di vista reale, è caratteristico per la sfera.

Ecco di cosa si tratta.

Assegnare un parallelismo generalizzato in una V_2 ⁽³⁾ equivale a fissare due leggi:

I) di corrispondenza tra due direzioni spiccate da due generici punti di V_2 ;

II) di conservazione degli angoli.

Queste due leggi, com'è noto, assicurano il riferimento completo di due fasci spiccati da due punti di una generica V_2 .

2. *Piano riemanniano.*

a) Rivolgiamo, ora, la nostra attenzione a la sfera, su la quale si sia fissato un parallelismo generalizzato. Tale parallelismo generalizzato si

(1) Le osservazioni dell'A. a proposito della teoria di WEYL (T. U. I, p. 366, II, p. 698) potrebbero dunque ripetersi anche per la teoria che egli propone.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(3) G. BARBA, *Parallelismo generalizzato* « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XII, s. 6^a, 2° sem. f. 1-2.

può, anche, pensare come effettuantesi con « movimento » della sfera in sè stessa che porti a coincidere le direzioni corrispondentisi t, t' spiccate, rispettivamente, da due generici suoi punti P, Q .

Nella polarità subordinata dalla corrispondenza tra il punto (generico) P e la retta di massima equidistanza γ , sulla sfera (cerchio massimo), chiameremo, brevemente, γ *geodetica polare* rispetto al polo P .

Tale polarità, che diremo *assoluta*, è lasciata invariata da qualunque « movimento » della sfera in sè; cosa che la caratterizza completamente, in quanto, qualsiasi altra polarità non è lasciata invariata da un « movimento ».

Ciò posto, consideriamo le geodetiche polari p, q rispettivamente di P e Q . Su p e q i fasci di geodetiche spiccate da P e Q , rispettivamente, determinano due punteggiate su cui ad angoli uguali — determinati dalle geodetiche spiccate dai poli — corrispondono, ovviamente, archi uguali. E poichè il fascio in P è riferito a quello in Q mediante la scelta di t riferita a t' ne segue che su p la t fissa un punto T come origine per la misura degli archi, da riferirsi a T' , fissata da t' su q , quale origine. Resta, quindi, riferita la punteggiata p , con origine T , alla punteggiata q con origine T' , mediante un riferimento metrico.

In base alla legge di parallelismo, dunque, due punteggiate polari sono costituite da punti corrispondentisi, in modo metrico, per cui si può concludere che:

un parallelismo generalizzato, su la sfera (euclidea) subordina un riferimento puntuale metrico tra due geodetiche differenti.

A fianco, quindi, del parallelismo, pensato come trasporto di un fascio, e successiva sovrapposizione ad altro analogo, resta definito (e nel caso nostro subordinato) un *metrismo* ⁽¹⁾, pensato come trasporto di una geodetica punteggiata (metrica), dotata di origine e successiva sovrapposizione ad altra analoga.

b) Effettuiamo il trasporto di un fascio di direzioni lungo una curva c della sfera. Ad un punto generico P di c , per via del riferimento di parallelismo, corrisponde una punteggiata polare che, al variare di P su c , invilupperà una certa curva γ . Al trasporto, quindi, di direzioni tangenti lungo una autoparallela c , corrisponde, lungo γ , un trasporto rigido di geodetiche tangenti sì che, punto di origine risulta, per ognuna di esse, quello di tangenza.

Si può, quindi, parlare, non solo di legge di dualità tra le due curve c e γ , ma anche di legge di dualità fra parallelismo e metrismo, nel senso che alla corrispondenza di due tangenti a c , fa riscontro la corrispondenza

(1) Il neologismo è stridente e non rende, forse, in tutta la chiarezza il suo significato, ma non ci è riuscito di trovar nulla di meglio da contrapporre, per dualità, a « parallelismo », nel senso sopra precisato.

di due punti su γ . Vi è, in altre parole, subordinatamente al trasporto tangenziale lungo c , trasporto puntuale lungo γ .

Così, poi, come in una V_2 assegnati due punti P e Q resta individuata una unica autoparallela passante per essi, dualmente, assegnate su una sfera due geodetiche c_1, c_2 , esiste una sola curva involuppo γ ad esse tangente e lungo la quale le predette geodetiche si trasportano, riferendosi, puntualmente, per punti di contatto.

c) Un caso speciale si à quando il parallelismo istituito sulla sfera sia quello del Levi-Civita. In tal caso le autoparallele — com'è noto — sono le geodetiche. Le geodetiche polari γ_n corrispondenti ai punti P_n della geodetica di trasporto c , involuppano, allora, un punto C.

Ne segue che il trasporto rigido di geodetiche polari à luogo per rotazione intorno al punto C che avrà, quindi, riferimento invariato rispetto alle geodetiche polari.

d) Un altro caso speciale si à supponendo il parallelismo generalizzato « senza residuo » ⁽¹⁾, assumendo quale sistema fondamentale quello dei meridiani sicchè traiettorie isocline risultano le lossodromie attorno a poli fissi.

Sia l la curva lossodromica di poli R e R_1 , lungo la quale à luogo il trasporto, ed A_1 e A_2 due suoi generici punti (d'intersezione con i meridiani m_1 e m_2). A tali punti corrispondono due geodetiche polari α_1 e α_2 .

Poichè l incontra m_1 ed m_2 sotto angolo costante, attesa la caratteristica della sfera in relazione alla polarità assoluta su essa definita, i tratti di α_1 e α_2 compresi tra il punto di tangenza a λ e la geodetica polare ρ di R saranno uguali; dunque si è autorizzati a concludere che la curva involuppo λ , nel caso in esame, è una trattrice (sferica) assintotica alla geodetica polare di R.

3. Piano euclideo.

a) Nel piano euclideo le considerazioni dianzi svolte non sussistono più, venendo meno la legge di dualità metrica tra elemento angolare ed elemento metrico esistente su la sfera. Ciò perchè la polarità, sotto la legge già fissata nel piano riemanniano, è, qui, degenerare, in quanto retta di equidistanza per un punto al finito è, solo, la retta a l'infinito; per cui, se un elemento (polo, polare) è al finito, quello reciproco (polare, polo) è all'infinito.

Nè la variazione della legge di corrispondenza determinante la polarità nel piano euclideo darebbe modo di rintracciare, qui, proprietà analoghe a quelle rilevate nel piano riemanniano, chè, qualunque altra polarità in cui la polare di un punto non sia di massima equidistanza, non resta rimmutata per un « movimento » nel piano.

Consideriamo, dopo ciò, nel piano euclideo due punti A e B e sia fis-

(1) V. mia Nota citata.

sata la legge di riferimento di due fasci di centro A e B. Siano a e b le polari, rispettivamente di A e B. I due fasci di centro A e B determinano su le due polari a e b , due punteggiate corrispondentisi in base alla prefissata legge di parallelismo. Se si è trasporto da A a B lungo una certa curva c , la polare del punto P che descrive la curva, involuppa una curva γ . Lungo γ , però, stavolta, subordinatamente al parallelismo, non si può più affermare che si abbia trasporto rigido della punteggiata polare d'un generico punto di c come accadeva su la sfera. Ciò, appunto, a causa de l'osservazione fatta.

Quel che solo, pertanto, si può affermare, in analogia al caso riemanniano, si è che si può definire un sistema ∞^2 di curve involuppo, tale che, date due rette a, b , vi sia una sola curva del sistema tangente ad entrambe.

Come, poi, nel piano euclideo, il riferimento lontano di due fasci avviene mediante una traslazione ed una rotazione, così il riferimento metrico lontano delle geodetiche punteggiate si può ricondurre ad una rotazione intorno al punto (a, b) ed uno scorrimento di una retta su sè stessa. Si può, dunque, dire che nel piano euclideo si può fissare un « metrisimo » indipendente dal « parallelismo ».

4. *Piano lobatschewskyano.*

a) Infine, nel caso della geometria lobatschewskyana, ricorreremo alla rappresentazione sul disco circolare del Beltrami (od a quella sulla pseudo-sfera rappresentabile, punto per punto sul primo). « Movimento » in tale geometria è ogni trasformazione che lascia invariato il cerchio e muta i punti interni ad esso, in punti interni.

Anche qui, dato un punto esiste una retta di equidistanza e data una retta esiste un punto equidistante da tutti i suoi punti. Però, se il punto è reale la retta è immaginaria e reciprocamente, quindi, qualsiasi retta (punto) reale si deve pensare equidistante (a distanza immaginaria) da un punto (retta) irraggiungibile. Esiste, dunque, anche nel piano lobatschewskyano (o sulla pseudo-sfera, se si vuole) una polarità assoluta che è lasciata inalterata da qualsiasi movimento, solo che, tale polarità collega la regione irraggiungibile con quella reale al finito. Ne segue che vale anche qui la legge per cui al trasporto per parallelismo di fasci di geodetiche corrisponde il trasporto metrico di geodetiche punteggiate.

Ciò, naturalmente, sempre che si sia convenientemente completata la legge di parallelismo per gli elementi immaginari, chè, ove ciò non fosse, si avrebbe la stessa arbitrarietà — pei soli elementi reali — che nel piano euclideo.

5. Per quanto si è esposto possiamo concludere che *considerando il parallelismo come riferimento cinematico di fasci di geodetiche, resta, dualmente, definito un riferimento (cinematico), « metrisimo », delle geodetiche punteggiate.*

Matematica. — *Sui massimi e minimi delle funzioni convesse.*
Nota di P. TORTORICI, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. SEVERI.

In questa Nota si espongono alcune considerazioni sulle funzioni convesse, rilevando, in particolare, la proprietà di queste funzioni di assumere il massimo ed il minimo valore sulla frontiera di un qualunque dominio connesso e convesso contenuto in un altro e pel quale valga la proprietà enunciata.

1. Sia $F(P)$ una funzione convessa e limitata in un dominio Ω_n , a n dimensioni, semplicemente connesso e convesso, luogo del punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$; si abbia cioè, per ogni coppia di punti P_1, P_2 di Ω_n :

$$F(P_1) + F(P_2) \geq 2 F(P_0),$$

P_0 denotando il punto medio del segmento $P_1 P_2$.

È risaputo⁽²⁾ allora che $F(P)$ è funzione continua in Ω_n .

Sia Σ_{n-1} , la frontiera di Ω_n ; è immediato che:

Se la funzione $F(P)$ non è costante in Ω_n , essa prende il suo valor massimo soltanto sulla frontiera di Ω_n .

Sia, infatti, M il massimo di $F(P)$ in Ω_n e, se è possibile, in un punto P_0 , interno ad Ω_n , sia

$$f(P_0) = M.$$

Se P_1, P_2 sono due punti di Ω_n , estremi di un segmento avente per punto medio P_0 , la relazione:

$$F(P_1) + F(P_2) \geq 2 F(P_0)$$

implica:

$$F(P_1) = F(P_2) = M$$

e ne segue immediatamente che $F(P)$ è costante su ogni segmento di Ω_n contenente P_0 , e però essa è costante in Ω_n .

2. *Se, internamente a Ω_n , non esiste alcun dominio connesso Ω_k , a k dimensioni, nel quale la funzione $F(P)$ sia costante, allora $F(P)$ non può prendere in Ω_n , frontiera inclusa, il suo valor minimo in più di k punti linearmente indipendenti.*

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) Cfr. P. TORTORICI, *Sulle funzioni convesse*, « Annali di Matematica », S. 4^a, t. IV (1927). pp. 147-150.

Sia m il minimo di $F(P)$ in Ω_n .

Se in due punti P_1, P_2 di Ω_n si ha:

$$F(P_1) = F(P_2) = m,$$

a causa della sua convessità e continuità, la $F(P)$ è costante almeno in tutto il segmento $P_1 P_2$.

Se, ora, P_3 è un punto di Ω_n , fuori della retta $P_1 P_2$, nel quale la $F(P)$ prende il suo valor minimo, è chiaro che $F(P)$ è costante, ed uguale a m , almeno in tutto il dominio Ω_2 , a due dimensioni, costituito dal triangolo $P_1 P_2 P_3$ (frontiera inclusa).

Analogamente, se P_4 è un punto di Ω_n , fuori del piano $P_1 P_2 P_3$ ed è

$$F(P_4) = m,$$

la $F(P)$ sarebbe costante almeno nel dominio Ω_3 costituito dai punti del tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3, P_4 .

Se Ω_{k-1} è, in generale, un dominio a $k-1$ dimensioni immerso in Ω_n e in Ω_{k-1} la $F(P)$ ha il valore costante m , l'ipotesi della esistenza di un punto P_{k+1} , linearmente indipendente dai punti di Ω_{k-1} , e nel quale si abbia:

$$F(P_{k+1}) = m,$$

implicherebbe l'esistenza di un dominio Ω_k , a k dimensioni, in tutti i punti del quale la funzione $F(P)$ dovrebbe avere il valore costante m .

Il teorema enunciato è, dunque, stabilito.

3. Se la funzione $F(P)$, limitata e convessa in un dominio semplicemente connesso e convesso a n dimensioni Ω_n , prende i suoi valori massimo e minimo sulla frontiera Σ_{n-1} , di Ω_n ; allora, qualunque sia il dominio Ω'_n a n dimensioni, semplicemente connesso e convesso e contenuto in Ω_n , la funzione $F(P)$ vi prende i suoi valori massimo e minimo pure sulla frontiera Σ'_{n-1} .

Il teorema è evidente (cfr. n. 1) per quel che si riferisce al massimo di $F(P)$.

Basterà perciò occuparsi del valore minimo.

Cominciamo a stabilire il teorema nel caso che $F(P)$ sia funzione convessa e limitata $f(x)$ di una variabile in un intervallo (a, b) ⁽¹⁾.

(1) In questo caso particolare il teorema risulta evidente se si ricorda che la funzione convessa e limitata $f(x)$ non può possedere più di due intervalli consecutivi di opposta monotonia e che, nel caso in esame, (a, b) è per $f(x)$ un intervallo di monotonia. Però la dimostrazione diretta è così semplice e breve che vale la pena, senza ricorrere ad altre considerazioni, di riportarla.

Cfr. L. GALVANI, *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», t. XLI, 1916.

Detti M ed m rispettivamente il massimo ed il minimo di $f(x)$ in (a, b) , sia ad es.:

$$f(a) = M \quad , \quad f(b) = m.$$

Sia, poi, (a_1, b_1) un intervallo interno ad (a, b) : $a < a_1 < b_1 < b$.

In (a_1, b_1) la funzione $f(x)$ prende il valor massimo in uno degli estremi (cfr. n. 1); questo è necessariamente il punto a_1 chè, diversamente, essendo $f(b) < f(a_1) \leq f(b_1)$, risulterebbe:

$$\begin{vmatrix} f(a_1) & a_1 & 1 \\ f(b_1) & b_1 & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = f(b_1)(b - a_1) - f(b)(b_1 - a_1) - f(a_1)(b - b_1) \geq \\ \geq f(b_1)(b - a_1) - f(a_1)(b - a_1) \geq 0$$

ciò che è assurdo, perchè $f(x)$ non sarebbe convessa in (a_1, b) .

Dico allora che $f(x)$ in (a_1, b_1) , prende il suo valore minimo nell'estremo b_1 .

Infatti, se è possibile, il minimo di $f(x)$ in (a_1, b_1) sia $f(\xi)$ con $a_1 < \xi < b_1$. Si ha allora $\xi < b_1 < b$ e $f(b) \leq f(\xi) \leq f(b_1)$. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} f(\xi) & \xi & 1 \\ f(b_1) & b_1 & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} = (f(b_1) - f(\xi))(b - b_1) + \\ + (f(b_1) - f(b))(b_1 - \xi) \geq 0,$$

ciò che è assurdo.

Ciò posto consideriamo il caso generale.

Se $F(P)$ prende in Ω'_n il valore minimo in un punto P'_0 , interno a Ω'_n (e non lo prende sulla frontiera Σ'_{n-1} di Ω'_n), e se P_0 è un punto della frontiera Σ_{n-1} di Ω_n nel quale $F(P)$ prende il valor minimo di Ω_n (il quale punto P_0 esiste per ipotesi), si consideri il punto P' , comune al segmento $P'_0 P_0$ e alla frontiera Σ'_{n-1} .

Lungo il segmento $P'_0 P_0$ la $F(P)$ è funzione convessa di una variabile $t^{(1)}$ e però, in forza di quanto precede, è certo $F(P') \leq F(P'_0)$. Ciò dimostra il teorema enunciato.

4. È superfluo avvertire che i teoremi dimostrati sussistono pure per le funzioni concave sol che, in quanto precede, si scambino fra loro le parole massimo e minimo.

(1) Cfr. loc. cit. (1), p. 149.

Matematica. — *Sopra l'ultraconvergenza di certe serie di Dirichlet.* Nota II di VLADIMIRO BERNSTEIN, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota fa seguito ad un'altra Nota sullo stesso argomento inserita in questi « Rendiconti » ⁽²⁾, ed ha per scopo di meglio precisare alcuni dei risultati enunciati nella Nota precedente e di riparare ad una omissione bibliografica in cui sono incorso in quella Nota.

L'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet fu studiata sin dal 1913 da H. Bohr in una Memoria apparsa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » ⁽³⁾. In quella Memoria egli dimostrò un teorema che permette di constatare l'ultraconvergenza di certe serie di Dirichlet in una striscia verticale, quando si conosce l'ordine della somma della serie in un'altra striscia più larga; inoltre egli diede degli esempi di serie aventi una striscia verticale di ultraconvergenza stretta ⁽⁴⁾, e fra essi vi era l'esempio della serie

$$(1) \quad H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n e^{-\lambda_n s}$$

$$(h_n = (-1)^{n+1}; \lambda_{2k+1} = k, \lambda_{2k+2} = k + e^{-k}),$$

che io ho citato nella Nota precedente col solo rinvio al « Mémorial des Sciences Mathématiques » e senza indicare a chi fosse dovuto. Dissi allora che questo esempio non era un esempio molto particolare costruito grazie ad un ingegnoso artificio, come lo si sarebbe potuto pensare; ma che invece tutte le serie che ammettono una striscia verticale di ultraconvergenza, ed i cui esponenti hanno una densità massima finita, sono necessariamente formate con dei gruppi di termini costruiti secondo lo stesso principio che i gruppi di due termini $e^{-\lambda_v s} - e^{-\lambda_{v+1} s}$, coi quali è formata la serie (1); però, non enunciai il risultato generale sotto forma di teorema, limitandomi al solo caso di serie formate con dei gruppi di due termini, ed indicando che per i gruppi di più termini il risultato diventava molto più complicato. Ho notato ora che anche il risultato generale poteva essere enunciato sotto

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) Vol. XII, serie 6^a, 1930, p. 91. Negli ulteriori rinvii questa Nota sarà indicata colla lettera N.

(3) T. 37, 1913.

(4) V. N, p. 92.

una forma abbastanza semplice, ed è questo che io mi propongo di fare in questa Nota.

Abbiasi una serie di Dirichlet con esponenti a densità massima finita D

$$(2) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

e sia \mathcal{C} la sua ascissa di convergenza; supponiamo che la striscia

$$\mathcal{A} < \Re(s) \leq \mathcal{C}$$

sia un campo d'ultraconvergenza stretta della serie (2). Allora, se \mathcal{H} denota l'ascissa di olomorfia di $f(s)$, si potrà, in base al teorema III della Nota precedente ⁽¹⁾, trovare una successione di interi

$$m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$$

tali che, posto

$$(3) \quad Q_n(s) = \sum_{v=m_n}^{v=m_{n+1}-1} a_v e^{-\lambda_v s} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

la serie

$$(4) \quad f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(s)$$

sia convergente in tutto il semipiano $\Re(s) > \mathcal{H}$.

Supponiamo adesso per un momento che sia possibile scegliere gli interi m_k in modo tale che i gruppi (3) contengano non più di due termini ciascuno. È quasi evidente che in tal caso il teorema V della Nota precedente ⁽²⁾ è equivalente al teorema seguente:

TEOREMA VI: *Se nessuno dei gruppi (3) contiene più di due termini della serie (2), questa serie può essere rappresentata come somma di due serie*

$$f(s) = \mathcal{H}(s) + \varphi(s),$$

ove

$$\mathcal{H}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_{m_n+1} - \lambda_{m_n}} \cdot (e^{-\lambda_{m_n} s} - e^{-\lambda_{m_n+1} s}),$$

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s};$$

(1) V. N, p. 93.

(2) V. N, p. 95.

la seconda di queste serie converge in tutto il semipiano $\Re(s) > \mathcal{H}$; la prima è invece formata con dei gruppi di due termini

$$(5) \quad b_n(s) = \frac{h_n (e^{-\lambda_{m_n} s} - e^{-\lambda_{m_n+1} s})}{\lambda_{m_n+1} - \lambda_{m_n}},$$

simili a quelli con i quali H. Bohr ha formato la serie (1).

Diamo ai gruppi (5) il nome di *gruppi di Bohr* (a due termini); e chiamiamo *coefficiente del gruppo* il fattore h_n .

Ciò posto, si vede subito che il gruppo di Bohr (5) rappresenta (a meno del coefficiente) la prima funzione interpolare⁽¹⁾ relativa alla funzione $e^{-s\tau}$ ed ai punti $\tau_1 = \lambda_{m_n}$ e $\tau_2 = \lambda_{m_n+1}$. Questa constatazione fa subito pensare che si potrebbero ottenere delle serie analoghe a quella di Bohr facendo uso di funzioni interpolari d'ordine superiore della funzione $e^{-s\tau}$.

Chiamiamo dunque *gruppo di Bohr a $p+1$ termini* l'espressione

$$(6) \quad b_n^{(p)}(s) = h_n \cdot \sum_{v=m_n}^{v=m_n+p} \frac{e^{-s\lambda_v}}{\psi'(\lambda_v)} \quad \left(\psi(\tau) = \frac{1}{p!} \prod_{v=m_n}^{v=m_n+p} (\tau - \lambda_v) \right),$$

che rappresenta appunto (a meno del coefficiente) la p -esima funzione interpolare relativa alla funzione $e^{-s\tau}$ ed ai punti $\tau_1 = \lambda_{m_n}$, $\tau_2 = \lambda_{m_n+1}$, \dots , $\tau_{p+1} = \lambda_{m_n+p}$. Diamo ancora il nome di *gruppo di Bohr generalizzato a $p+1$ termini* all'espressione

$$(7) \quad \mathcal{B}^{(p)}(s) = b^{(p)}(s) + b^{(p-1)}(s) + b^{(p-2)}(s) + \dots + b^{(1)}(s),$$

in cui $b^{(p)}(s)$ denota un gruppo di Bohr a $p+1$ termini del tipo (6), mentre $b^{(p-1)}(s)$, $b^{(p-2)}(s)$, \dots , $b^{(1)}(s)$ denotano rispettivamente dei gruppi di Bohr di p , $p-1$, \dots , 2 termini, formati in modo tale, che tutti i λ_n che concorrono alla formazione di $b^{(i)}(s)$, concorrono anche alla formazione di $b^{(i+1)}(s)$. Siccome ciascuno dei $b^{(i)}(s)$ contiene un coefficiente, vediamo che il gruppo di Bohr generalizzato a $p+1$ termini dipende da p coefficienti arbitrari.

Adesso è quasi evidente che, considerando le serie formate con dei gruppi di Bohr generalizzati (ad un numero di termini qualsiasi)

$$(8) \quad \mathcal{H}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k(s),$$

formate in modo tale che i λ_n che entrano nella composizione di $\mathcal{B}_k(s)$, siano tutti superiori ai λ_n che entrano nella composizione di $\mathcal{B}_{k-1}(s)$, e che

(1) V. p. es. NÖRLUND, *Séries d'interpolation*, Paris, 1926, pp. 1-6.

inoltre la densità massima dei λ_n sia finita, potremo facilmente ottenere delle serie aventi una striscia verticale di ultraconvergenza; per questo basterà che si abbia, p. es.,

$$\overline{\lim}_{v=\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_v} \log \left| \frac{1}{\psi'_k(\lambda_v)} \right| \right\} = l > 0,$$

e che i coefficienti dei gruppi di Bohr che intervengono nella (8) soddisfacciano alla condizione

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_{m_n}} \log |b_n| \right\} = 0.$$

Ora, il risultato generale annunciato alla fine della Nota precedente consiste in ciò che il procedimento testè descritto è generale. Più precisamente si può dimostrare il teorema seguente:

TEOREMA VII: *Abbiassi una serie di Dirichlet*

$$(2) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

con esponenti di densità massima finita, e sia \mathcal{C} la sua ascissa di convergenza; se questa serie è ultraconvergente nella striscia

$$\mathfrak{A} < \Re(s) \leq \mathcal{C},$$

essa può essere rappresentata come somma di due serie di Dirichlet dello stesso tipo (cioè aventi i medesimi esponenti) della serie (2)

$$f(s) = \mathfrak{H}(s) + \varphi(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k(s), \\ \varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}, \end{array} \right.$$

e ciò in modo tale che la prima di queste serie risulti formata con soli gruppi di Bohr generalizzati, mentre la seconda sia convergente in tutto il semi-piano $\Re(s) > \mathfrak{A}$.

I coefficienti dei gruppi di Bohr generalizzati della prima serie ed i coefficienti della seconda serie soddisfaranno alla condizione

$$\overline{\lim}_{m=\infty} \left\{ \frac{1}{\mu_m} \log |d_m| \right\} \leq \mathfrak{A},$$

nella quale d_m potrà indicare indifferentemente o un coefficiente della seconda serie, o un coefficiente di un gruppo di Bohr della prima serie; nel primo caso μ_m indicherà l'esponente λ_m corrispondente, mentre nel secondo caso esso indicherà il più piccolo fra gli esponenti del corrispondente gruppo di Bohr.

La dimostrazione di questo teorema, come pure le dimostrazioni di teoremi indicati nella Nota precedente, è stata da me esposta in una Memoria che sarà prossimamente pubblicata in una Rivista Svizzera ⁽¹⁾. Inoltre alcuni teoremi che si ottengono con metodi simili a quelli usati per la dimostrazione del teorema VII, ma che non si riferiscono più all'ultraconvergenza, sono stati esposti in una Nota presentata pochi giorni or sono al R. Istituto Lombardo delle Scienze e Lettere ⁽²⁾.

Matematica. — *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux.* Nota di L. GODEAUX, presentata ⁽³⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

On sait qu'il existe des surfaces algébriques dépourvues de courbes canoniques mais possédant des courbes bicanoniques: le premier exemple d'une telle surface fut donné par M. Enriques ⁽⁴⁾; c'est la surface de genres $p_a = p_g = P_3 = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 1$, qui peut se remener, par une transformation birationnelle, à une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface a une courbe bicanonique d'ordre zéro. Un second exemple est dû à M. Castelnuovo ⁽⁵⁾, qui a construit une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$, $P_2 = 2$, possédant un faisceau de courbes bicanoniques elliptiques. Nous nous proposons d'exposer dans cette Note un exemple d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, $P_3 = 4$. Nous y avons été conduit par le raisonnement suivant:

Soit F une surface algébrique régulière contenant une involution cyclique I_p , d'ordre p , dépourvue de points unis. Supposons que le système canonique de F ne soit composé ni au moyen d'un faisceau, ni au moyen de l'involution I_p et qu'il ne possède pas de composante fixe. Supposons en outre que les genres géométrique p_g et arithmétique p_a de cette surface soient

$$p_a = p_g = p - 1.$$

(1) « Comm. Math. Helvetici », vol. IV.

(2) Adunanza del 26 novembre 1931.

(3) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(4) F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Società dei XL, 1896, t. X, p. 66).

(5) G. CASTELNUOVO, *Sulle superficie di genere zero* (Idem. p. 122).

Une surface Φ , image de l'involution I_p , est régulière. Entre les genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ de Φ et les genres arithmétique p_a et linéaire $p^{(1)}$ de F , on a les relations ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} p_a + 1 &= p (\pi_a + 1), \\ p^{(1)} - 1 &= p (\pi^{(1)} - 1), \end{aligned}$$

et par suite on a $\pi_a = 0$.

Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même génératrice de l'involution I_p . T transforme le système canonique de F en lui-même. Aux courbes canoniques de F , transformées en elles-mêmes par T , correspondent sur Φ des courbes qui ne peuvent appartenir à leurs adjointes, et la surface régulière Φ , de genres géométrique et arithmétique 0, est dépourvue de courbe canonique. Par contre, peut posséder des courbes bicanoniques.

Appliquons ce qui précède au cas où F est une surface du cinquième ordre, ne passant pas par les sommets du tétraèdre de référence, qui soit unie pour l'homographie de période cinq

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité.

On a actuellement $p = 5$, $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$. La surface Φ aura les caractères $\pi_a = \pi_g = 0$, $\pi^{(1)} = P_2 = 2$, $P_3 = 4$, ... et les courbes bicanoniques seront des sextiques gauches de genre quatre, formant un faisceau.

Nous réserverons à un travail plus étendu le développement de ce qui précède; nous nous bornerons dans cette Note à la considération d'une surface du septième ordre, possédant quatre droites doubles tacnodales, côtés d'un quadrilatère gauche et nous montrerons qu'elle a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = 2$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 7$.

Considérons la surface Φ , d'ordre sept, d'équation

$$a_1 x_1^4 x_2 x_4^2 + a_2 x_2^4 x_4 x_3^2 + a_3 x_3^4 x_1 x_2^2 + a_4 x_4^4 x_3 x_1^2 = 0.$$

Cette surface est circonscrite au tétraèdre de référence et a comme droites doubles les arêtes $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_4 = x_3 = 0$, $x_3 = x_1 = 0$. De plus, elle possède une droite double infiniment voisine

(1) F. SEVERI, *Sulle relazioni che legano i caratteri...* (Rend. Istituto Lomb., 1903). Voir aussi, pour le cas particulier des relations de M. Severi qui nous intéressent ici, nos *Recherches sur les involutions...* (« Bull. de la Soc. Math. de France », 1919).

de chacune des droites précédentes, à savoir : une droite double infiniment voisine de $x_1 = x_2 = 0$ dans le plan $x_1 = 0$, une dans le plan $x_2 = 0$ infiniment voisine de $x_2 = x_4 = 0$, une dans le plan $x_4 = 0$ infiniment voisine de $x_4 = x_3 = 0$, enfin une dans le plan $x_3 = 0$, infiniment voisine de $x_3 = x_1 = 0$.

Les sommets du tétraèdre de référence sont triples pour la surface Φ . Celle-ci est irréductible et ne possède pas de point multiple en dehors de ceux qui viennent d'être indiqués.

Les adjointes de la surface Φ sont des surfaces cubiques qui doivent passer par les arêtes du tétraèdre de référence qui sont doubles pour la surface, en y touchant la face qui contient la droite double infiniment voisine. De telles surfaces n'existent pas et le genre géométrique de Φ est $p_g = 0$. Les biadjointes de la surface Φ sont des surfaces du sixième ordre qui doivent passer par les droites doubles, chacune de ces droites comptant pour huit dans l'intersection. Il en résulte que les biadjointes sont données par

$$x_1 x_2 x_3 x_4 (\lambda_1 x_1 x_4 + \lambda_2 x_2 x_3) = 0.$$

On a donc pour Φ le bigenre $P_2 = 2$. Les courbes bicanoniques sont des sextiques gauches de genre quatre passant par les sommets du tétraèdre de référence et on a $p^{(r)} = 2$.

Les triadjointes de la surface Φ sont les surfaces du neuvième ordre

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0.$$

Les courbes tricanoniques sont donc les sections planes, de genre sept.

Les surfaces 4-adjointes sont formées des faces du tétraèdre de référence, comptées chacune deux fois, et de la surface

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \lambda_2 x_2^2 x_1^2 x_3^2 + \lambda_3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + \lambda_4 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + \lambda_5 x_3^2 x_1^2 x_2^2 + \\ + \lambda_6 x_4^2 x_1^2 x_3^2 + \lambda_7 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

On a donc $P_4 = 7$. De plus, les surfaces précédentes découpent, sur une section plane, la série canonique complète, donc la surface Φ est régulière ($p_a = p_g = 0$).

Les droites $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ sont exceptionnelles.

Matematica. — *L'intégration des équations, qui déterminent les fonctions conjuguées de Beltrami.* Nota di M. KOURENSKY, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. Les fonctions de Beltrami sur une surface sont les fonctions

$$\varphi + i\psi,$$

où $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ sont les solutions conjuguées de l'équation

$$(1) \quad \Delta_2 \varphi = 0,$$

$\Delta_2 \varphi$ étant un paramètre différentiel du 2^{me} ordre

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\}.$$

On détermine encore les fonctions conjuguées φ et ψ comme des solutions d'un système d'équations du 1^{er} ordre

$$(2) \quad \nabla(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi,$$

$\nabla(\varphi, \psi)$, $\Delta_1 \varphi$ et $\Delta_1 \psi$ étant symboles des paramètres différentiels du 1^{er} ordre.

Le système (2) peut s'écrire sous la forme:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial u} - E \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H} \end{cases}$$

et aussi

(1) Nella seduta del 15 novembre 1931.

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{E \frac{\partial \psi}{\partial v} - F \frac{\partial \psi}{\partial u}}{H} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{F \frac{\partial \psi}{\partial v} - G \frac{\partial \psi}{\partial u}}{H}, \end{aligned} \right.$$

où

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

§ 2. On dit souvent, que l'équation (1) est la condition de compatibilité du système (3) en y regardant φ comme inconnue; et inversement, — si une solution quelconque de l'équation $\Delta_2 \varphi = 0$ est φ , les équations (3) sont compatibles et déterminent la fonction ψ par des quadratures seulement, — c'est ce qui donne une constante arbitraire additive.

Nous pouvons écrire le système des équations de Beltrami, p. ex., de la forme (3'):

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} H \frac{\partial \varphi}{\partial u} + F \frac{\partial \psi}{\partial u} - E \frac{\partial \psi}{\partial v} &= 0 \\ H \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \frac{\partial \psi}{\partial u} - F \frac{\partial \psi}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ce système de deux équations avec les variables indépendantes u et v contient les dérivées de deux fonctions inconnues φ et ψ .

Il s'en suit que, d'après les recherches des MM. Hamburger, Königsberger, E. von Weber et les miennes⁽¹⁾, le système (4), en φ et ψ , est toujours compatible. L'équation (1) est le résultat d'élimination de ψ du système (3). On peut s'en passer pour effectuer l'intégration du système de Beltrami (3) ou (3'); elle présente toutefois un intérêt géométrique et analytique bien connu.

Sur l'observation, qu'une solution de l'équation (1) étant connue, en utilisant le système (3) nous pouvons trouver la fonction ψ par quadratures, — il faut dire: d'un côté, que l'intégration du système (4) ne présente pas une grande difficulté, suivant mon *Traité de la théorie d'intégration...*, et que cette intégration peut être remplie plus facilement, que la recherche d'une intégrale particulière de l'équation (1), et d'un autre côté, l'intégration du système (4) peut être réduite à l'intégration des équations différentielles ordinaires et les intégrales générales de ces équations auxiliaires conduisent à l'intégrale

(1) M. KOURENSKY, *Généralisation des parenthèses de Poisson-Jacobi*, « C. R. », t. 191, 1930, p. 1285; *Traité de la théorie d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1^{er} et du 2^{me} ordres avec plusieurs fonctions inconnues*, I, « Mém. de l'Acad. des Sc. d'Ukraine », n. 11, 1931, ch. II, p. 28; ch. III, p. 48.

générale du système proposé (4); cette intégrale donne à la fois les expressions générales pour φ et ψ .

§ 3. Le système des équations linéaires (4) est sans seconds membres. Il s'en suit, que la méthode d'intégration de Hamburger pour les équations (4) n'est pas applicable: le système auxiliaire des équations différentielles avec une seule fonction inconnue aura une forme distincte de la forme des équations auxiliaires de Hamburger⁽¹⁾. Mais les conditions algébriques pour intégrer l'équation linéaire

$$(5) \quad \sum_{i,k} M_i^k \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} + M = 0 \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n),$$

quand $M = 0$ ou $M \neq 0$, par la méthode, qui présente une petite modification de la méthode de Hamburger, sont les mêmes que les conditions dans la méthode de Hamburger:

$$\frac{M_{i_1}^{k_1}}{M_i^k} = \frac{M_{i_1}^{k_1}}{M_i^k} \quad (i, i_1 = 1, \dots, m; k, k_1 = 1, \dots, n).$$

L'intégrale générale du système des n équations de la forme (5) est:

$$\varphi_1(u_1^l, u_2^l, \dots, u_m^l) = 0 \quad (l = 1, \dots, n),$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont les symboles des fonctions arbitraires et $u_1^l, u_2^l, \dots, u_m^l$ sont les intégrales particulières du système des équations avec une seule fonction inconnue u^l , qui correspond à la racine λ_l de l'équation caractéristique de Hamburger. Dans le cas $M = 0$ (ou $M \neq 0$), $M_i^k \neq 0$ pour une fonction u quelconque le système auxiliaire aura la forme suivante⁽²⁾:

$$(6) \quad \left. \begin{aligned} M_i^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} &= M_i^1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1}, \dots, M_i^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_{k-1}} = M_i^{k-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta_{k-1}} \\ -M_i^k \frac{\partial u}{\partial x_i} &= M_i^k \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + M_{i-1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i-1}} - M_i^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} + M_{i+1}^k \frac{\partial u}{\partial x_{i+1}} + \dots + M_m^k \frac{\partial u}{\partial x_m} \\ M_i^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_{k+1}} &= M_{i+1}^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_k}, \dots, M_i^k \frac{\partial u}{\partial \zeta_k} = M_i^n \frac{\partial u}{\partial \zeta_n}. \end{aligned} \right\}$$

§ 4. Multiplions la deuxième des équations (4) par λ . La somme des deux équations ainsi obtenues conduit à une nouvelle équation:

(1) HAMBURGER, « Crelle Journ. », Bd. 100, 1886, p. 390.

(2) M. KOURENSKY, *Traité de la théorie...*, ch. I, pp. 8-22; *Sur les conditions de Hamburger pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre...*, « Bulletin de l'Acad. des Sc. de l'Ukraine », t. II, f. I, 1926, pp. 22-31.

$$H \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \lambda H \frac{\partial \varphi}{\partial v} + (F + \lambda G) \frac{\partial \psi}{\partial u} - (E + \lambda F) \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0,$$

et nous avons:

$$M_1^1 = H ; M_2^1 = \lambda H ; M_1^2 = F + \lambda G ; M_2^2 = - (E + \lambda F).$$

La condition de Hamburger, pour notre équation, conduit à l'équation caractéristique suivante, pour déterminer le multiplicateur λ :

$$G\lambda^2 + 2F\lambda + E = 0.$$

Les racines

$$\lambda_1 = -\frac{F - iH}{G} ; \quad \lambda_2 = -\frac{F + iH}{G}$$

donnent les deux systèmes des équations auxiliaires, avec une seule fonction inconnue f des variables indépendantes u, v, φ, ψ :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \frac{\partial f}{\partial u} - (F - iH) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0; \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} G \frac{\partial f}{\partial u} - (F + iH) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0. \end{array} \right.$$

Chaque système (I), (II) est complètement intégrable. L'intégration du système (I) se réduit à l'intégration du système des équations ordinaires

$$\frac{du}{G} = \frac{dv}{F - iH} ; \quad \frac{d\varphi}{-i} = \frac{d\psi}{1}.$$

L'intégration conduit à la 1^{ère} équation de l'intégrale générale du système (4), - de l'intégrale de Hamburger:

$$(7) \quad \varphi + i\psi = \Phi[\omega_1(u, v)],$$

où Φ est la fonction arbitraire d'un argument ω_1 , qu'on trouve de l'intégrale

$$\omega_1(u, v) = \text{const.}$$

de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dv}{du} + \frac{F - iH}{G} = 0.$$

L'intégration du système (II) se réduit à l'intégration du système

$$\frac{du}{G} = -\frac{dv}{F + iH} \quad ; \quad \frac{d\varphi}{i} = \frac{d\psi}{I},$$

et nous avons la 2^{me} équation de l'intégrale générale de Hamburger:

$$(8) \quad \varphi - i\psi = \Psi[\omega_2(u, v)],$$

où Ψ est la fonction arbitraire d'un argument ω_2 , qu'on trouve de l'intégrale

$$\omega_2(u, v) = \text{const.}$$

de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dv}{du} + \frac{F + iH}{G} = 0.$$

Alors, les formes les plus générales des fonctions inconnues φ et ψ sont:

$$\varphi = \frac{\Phi(\omega_1) + \Psi(\omega_2)}{2} \quad ; \quad \psi = \frac{\Phi(\omega_1) - \Psi(\omega_2)}{2i}.$$

§ 5. On connaît le cas particulier du système (4), qui est déjà résolu, - c'est le cas du système des lignes initiales (u, v) isothermiques, quand

$$E = G \quad ; \quad F = 0.$$

Le système des équations différentielles se réduit à la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Les systèmes (I), (II) s'écriront:

$$(I') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} + i \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0; \end{cases}$$

$$(II') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ i \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0, \end{cases}$$

et les intégrales (7), (8) seront :

$$\varphi + i\psi = \Phi(u + iv) \quad ; \quad \varphi - i\psi = \Psi(u - iv),$$

c. à d.

$$\varphi = \frac{\Phi(u + iv) + \Psi(u - iv)}{2} \quad ; \quad \psi = \frac{\Phi(u + iv) - \Psi(u - iv)}{2i}.$$

Nous parvenons à des résultats connus: « $\varphi + i\psi$ è funzione della variabile complessa $u + iv$. E siccome possiamo anche cangiare ψ in $-\psi$, ne deduciamo: Noto sulla superficie un sistema isoterma (φ, ψ) , si ottengono tutti gli altri (φ', ψ') ponendo

$$\varphi' + i\psi' = F(\varphi \pm i\psi),$$

essendo F il simbolo di funzione arbitraria di variabile complessa » ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sulla equazione delle asintotiche di una V_2 col σ_2 a tre dimensioni.* Nota di MARIA PREVIATTI BORTOLOZZI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. VITALI.

Il prof. G. Vitali, nella sua Nota: « Forme differenziali a carattere proiettivo associate a certe varietà » ⁽³⁾, a proposito delle forme differenziali che egli introduce, fa la seguente osservazione: « È notevole il fatto, ed ha bisogno di essere chiarito, che tutte queste forme a carattere proiettivo si incontrino nella trattazione di problemi di natura essenzialmente metrica, come è notevole il fatto che queste forme a carattere proiettivo siano, come quella che corrisponde alle asintotiche di una V_2 in S_3 , costruite con elementi forniti dallo spazio normale alla varietà giacente nel suo σ_2 . Sarebbe desiderabile che venissero messe in rilievo le ragioni intime di queste relazioni che certamente non possono essere fortuite ». Ora io mi propongo di svolgere nella presente Nota delle considerazioni relative alla

(1) L. BIANCHI, *Lezioni di geom. dif.*, vol. I, parte I, Bologna, 1927, p. 128.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(3) « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXXXVIII, 1928-29.

equazione delle asintotiche delle V_2 col $\Pi_2^{(1)}$ a una dimensione (e quindi in particolare delle V_2 dell' S_3) che mi sembra rispondano alla richiesta del Vitali.

1. Considero una V_2 col Π_2 ad una dimensione ed indico con

$$f(t, u_1, u_2)$$

una sua determinante. Indico con X un parametro normale di Π_2 e pongo al solito

$$x_{r,s} = \int_g f_{r,s} X dt.$$

L'equazione delle asintotiche è

$$\sum_{r,s} x_{r,s} du_r du_s = 0.$$

Il fatto che il Π_2 ha una dimensione, porta che fra le $f_{r,s}$ passano due relazioni lineari indipendenti.

Noi possiamo mettere due tali relazioni sotto la forma

$$(I) \quad \sum_{r,s} c^{r,s} f_{r,s} = 0 \quad , \quad \sum_{r,s} d^{r,s} f_{r,s} = 0.$$

Come è noto il σ_2 della V_2 ha carattere proiettivo, quindi il sistema delle relazioni (I) che riducono il numero delle dimensioni del σ_2 deve avere carattere proiettivo e quindi per una proiettività le (I) si muteranno in altre due che saranno combinazioni lineari delle

$$(I') \quad \sum_{r,s} c^{r,s} F_{r,s} = 0 \quad , \quad \sum_{r,s} d^{r,s} F_{r,s} = 0,$$

dove F è la trasformata della f e quindi è una determinante della superficie trasformata⁽²⁾. In altri termini i sistemi $c^{r,s}$, $d^{r,s}$ si muteranno in loro combinazioni lineari e lo stesso avverrà per i loro complementi algebrici $c_{r,s}$, $d_{r,s}$. Si può anche dire che ogni combinazione lineare $\lambda c_{r,s} + \mu d_{r,s}$ si muta per una proiettività in una tale combinazione lineare.

In fine posso dire che se consideriamo una coppia di direzioni del σ_1 per cui

$$(2) \quad \sum_{r,s} (\lambda c_{r,s} + \mu d_{r,s}) du_r du_s = 0$$

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. N. Zanichelli, Bologna 1929, p. 213.

(2) Effettivamente il prof. VITALI in un lavoro in corso di stampa: *Sulle relazioni lineari fra gli elementi di un ricciano* « Boll. U. M. I. », dimostra che sussistendo le relazioni (1) sussistono anche le (I').

questa coppia si muta per una proiettività in una coppia dello stesso genere. Le coppie che soddisfano alle (2) per i vari sistemi di λ e μ formano un'involuzione la cui equazione è:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} du_1 \cdot \delta u_1 & -\frac{1}{2} (du_1 \delta u_2 + du_2 \delta u_1) & du_2 \cdot \delta u_2^{(1)} \\ c_{22} & c_{12} & c_{11} \\ d_{22} & d_{12} & d_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Moltiplicando le (1) per X e integrando si ha:

$$\sum_{rs} c^{r,s} x_{r,s} = 0 \qquad \sum_{rs} d^{r,s} x_{r,s} = 0$$

ossia,

$$\begin{aligned} c_{11} x_{22} - 2 c_{12} x_{12} + c_{22} x_{11} &= 0 \\ d_{11} x_{22} - 2 d_{12} x_{12} + d_{22} x_{11} &= 0, \end{aligned}$$

da cui si ricava che i minori di secondo ordine formati colle ultime due righe di (3) sono proporzionali a

$$x_{11}, -2x_{12}, x_{22}$$

e la (3) diventa

$$\sum_{rs} x_{rs} du_r \delta u_s = 0,$$

ossia l'equazione dell'involuzione delle direzioni coniugate. Dal nostro ragionamento risulta che tale involuzione è proiettivamente invariante e che quindi è invariante la forma che dà le sue rette unite, ossia le asintotiche.

Matematica. — *Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes.* Nota di N. OBRECHKOFF, pres. dal Socio S. PINCHERLE.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Vedi p. es. F. ENRIQUES, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. I, p. 165; od anche G. VITALI, *Sopra alcune involuzioni delle tangenti ad una superficie*, p. 110.

Meccanica. — *Su di un valore massimo del coefficiente di trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente.*
Nota di LUIGI CROCCO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. A. CROCCO.

L'ordinaria teoria del trasporto del calore tra una lamina piana e un fluido scorrente trascura completamente l'influenza del calore sviluppato per attrito sul campo di temperatura in prossimità della lamina e sul coefficiente di trasmissione. In realtà il calore d'attrito può essere agli scopi pratici trascurato finchè la velocità si mantenga entro i normali limiti; ma per i valori più elevati verso cui tende la tecnica del volo moderna l'effetto dell'attrito diviene tanto sensibile che il non tenerne conto può condurre a risultati completamente falsi anche dal punto di vista qualitativo. Si manifesta quindi la necessità di ricercare come in tal caso vadano modificate le ordinarie formule della trasmissione del calore.

Allo scopo conviene procedere come segue.

Le equazioni idrodinamiche per lo strato limite si riducono notoriamente, nel nostro caso, alle seguenti:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

con il consueto significato dei simboli.

Le condizioni ai limiti sono: per $y = 0$, $u = v = 0$; per $y = \delta$ (spessore dello strato limite) $u = U$ (velocità della corrente indisturbata) e $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0$. A queste si può aggiungere l'equazione termodynamica, semplificata pel caso attuale da Pohlhausen⁽²⁾, che lega il campo di temperatura a quello di velocità:

$$(2) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{\gamma c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\nu}{g E c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) POHLHAUSEN, *Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung*, « ZS. f. angew. Math. u. Mech. », 7, 115 (1921).

I simboli hanno il significato ordinario e per il calore specifico si è scritto senz'altro c_p , poichè l'indagine ha importanza pratica solo per fluidi gassosi.

L'influenza del calore di attrito è tutta concentrata nell'ultimo termine: la cui dipendenza quadratica dal campo di velocità spiega perchè esso possa venire trascurato fino a quando questa non raggiunga valori sufficientemente elevati. Appunto per questo in pratica sarà più che sufficiente limitare lo studio al caso di strato limite turbolento che solo sussiste per alte velocità; ma ciò non toglie che anche per il moto laminare sia possibile in base ai risultati di Pohlhausen costruire la soluzione richiesta e calcolare i coefficienti di trasmissione con procedimento analogo al seguente, sebbene più complicato. La maggiore semplicità per il moto turbolento deriva dal potersi porre in tal caso $\sigma = \gamma_{c_p} \frac{\nu_{\text{turb.}}}{\lambda_{\text{turb.}}} = 1$; mentre l'analogo coefficiente nel caso laminare pur essendo costante per ogni fluido, è diverso dall'unità.

Gioinandosi di questa relazione nella (2) e sommandola con la prima delle (1) moltiplicata per $\frac{u}{gEc_p}$ si giunge all'equazione seguente:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{u^2}{2gEc_p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{u^2}{2gEc_p} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_{\text{turb.}} \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{u^2}{2gEc_p} \right) \right];$$

di forma perfettamente analoga alla prima delle (1) in u , e soddisfatta quindi se si pone:

$$T + \frac{u^2}{2gEc_p} = au + \text{cost.}$$

La soluzione così ottenuta appare come sovrapposizione di due altre. La prima

$$T_1 + \frac{u^2}{2gEc_p} = \text{cost.}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (2), caratterizzata dal fatto che tutto il calore sviluppato per attrito rimane nello strato limite⁽¹⁾; come è facile riconoscere, notando che il gradiente di T , cui il flusso di calore è proporzionale, lo è a sua volta a $u \frac{\partial u}{\partial y}$; ed è nullo perciò per $y=0$ e per $y=\delta$. Tale soluzione vale quindi quando la parete della lamina sia impermeabile al calore.

L'altra, cioè $T_2 = au + \text{cost.}$, è invece soluzione dell'equazione omogenea corrispondente alla (2), ottenuta da questa sopprimendo l'ultimo

(1) BUSEMANN, *Gasdynamik*, I. Kap., § 9, «Handbuch der Experimentalphysik», Bd. IV, I. Teil., Leipzig, 1931.

termine. Essa perciò non tiene conto del calore di attrito e rappresenta il campo di temperatura dovuto al flusso di calore dalla parete in un fluido ideale o, prossimamente, in un fluido reale scorrente a bassa velocità.

Appare che in tal caso, e per flusso turbolento, i due campi di temperatura e di velocità sono simili, come Prandtl ha dimostrato e l'esperienza confermato⁽¹⁾; e il calcolo del trasporto di calore dalla lamina risulta, in tali condizioni, immediato.

Indicando infatti con T_{2p} e $T_{2\delta}$ i valori di T_2 alla parete e alla superficie esterna dello strato limite rispettivamente, la similitudine si può porre sotto la seguente forma:

$$(3) \quad T_2 - T_{2\delta} = (T_{2p} - T_{2\delta}) \left(1 - \frac{u}{U}\right).$$

Ora la quantità di calore, sottratta a una superficie di larghezza unitaria e lunghezza l è data, dovendo ritrovarsi tutta nello strato limite, da

$$Q = \int_0^\delta \gamma u \cdot c_p (T_2 - T_{2\delta}) dy,$$

l'integrale essendo eseguito all'uscita dalla lamina.

Sostituendo la precedente espressione di $T_2 - T_{2\delta}$ si ottiene

$$Q = (T_{2p} - T_{2\delta}) \int_0^\delta \gamma c_p u \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy;$$

cosicchè il calore asportato è presto calcolato, quando si assuma per u una distribuzione plausibile.

Latzko⁽²⁾, facendo uso della nota legge $u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$ dedotta da Kármán dalla formula empirica di Blasius per la resistenza dei tubi, ha trovato:

$$\frac{Q}{l} = 0.0356 \gamma c_p \left(\frac{\nu}{Ul}\right)^{1/5} \cdot (T_{2p} - T_{2\delta}).$$

Dubbi potrebbero sorgere sulla bontà di questa formola fuori dei limiti nei quali è valevole quella di Blasius; ma in uno studio attualmente in elaborazione, in cui ho cercato di sfruttare gli ultimi acquisti sulla turbolenza,

(1) Vedi relazione delle esperienze di FRANZ ELIAS, « Abhandlungen aus dem Aerodyn. Inst. an der Techn. Hochschule Aachen », Heft 9.

(2) *Der Wärmeübergang an einem turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom*, « Abhandlungen aus dem Aerodyn. Inst. an der Techn. Hochschule Aachen », Heft 1.

si giunge a risultati che spingono a ritenere valevole con buona approssimazione la formola di Latzko anche per velocità elevate. In ogni modo si noti che tutti i risultati che seguono non vengono sostanzialmente alterati qualunque sia l'effettivo andamento del coefficiente di trasmissione.

Ritorniamo ora alla considerazione del fluido reale in cui il calore di attrito non sia più trascurabile e il campo di temperatura debba considerarsi come sovrapposizione dei due mostrati in precedenza.

Designando con T_{1p} e $T_{1\delta}$ i valori di T_1 alla parete e alla superficie esterna dello strato limite, si ha evidentemente:

$$T_1 + \frac{u^2}{2gEc_p} = T_{1p} = T_{1\delta} + \frac{U^2}{2gEc_p};$$

e quindi

$$T_1 - T_{1\delta} = \frac{U^2 - u^2}{2gEc_p}; \quad T_{1p} - T_{1\delta} = \frac{U^2}{2gEc_p}.$$

Inoltre, essendo la temperatura effettiva $T = T_1 + T_2$, deve aversi, se T_p è la temperatura della parete e T_o quella del fluido indisturbato, $T_{1p} + T_{2p} = T_p$ alla parete e $T_{1\delta} + T_{2\delta} = T_o$ all'esterno dello strato limite.

Dalle ultime relazioni si ricava, tenendo presente la (3):

$$T_{2p} - T_{2\delta} = T_p - T_o - (T_{1p} - T_{1\delta}) = T_p - T_o - \frac{U^2}{2gEc_p};$$

$$\begin{aligned} T - T_o &= T_1 - T_{1\delta} + T_2 - T_{2\delta} = \\ &= \frac{U^2 - u^2}{2gEc_p} + \left(T_p - T_o - \frac{U^2}{2gEc_p} \right) \left(1 - \frac{u}{U} \right). \end{aligned}$$

Quest'ultima formula lega il campo di temperatura a quello di velocità. Essa consente per ogni legge di distribuzione di quest'ultima di trovare la distribuzione della prima. Denotando con $\theta = T - T_o$ il sopraelevamento di temperatura su quella esterna, e notando che $\tau = \frac{U^2}{2gEc_p}$ è l'aumento di temperatura che l'arresto adiabatico del fluido provocherebbe, si può anche scrivere, con evidenti passaggi:

$$\theta = \left(\theta_p + \tau \frac{u}{U} \right) \left(1 - \frac{u}{U} \right).$$

L'influenza del calore di attrito appare nel termine $\tau \frac{u}{U}$, la cui dipendenza quadratica dalla velocità spiega ancora una volta come per bassi

valori di questa sia lecito trascurarlo. Naturalmente l'espressione precedente contiene come casi particolari i due da cui è dedotta per sovrapposizione, l'uno per $\tau = \theta_p$, l'altro per $\tau = 0$. Essa mostra inoltre l'esistenza di un valor massimo di θ per $\frac{u}{U} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta_p}{\tau} \right)$, massimo che è compreso nello strato limite, e quindi esiste in realtà, solo per $-\tau < \theta_p < \tau$. Nei casi di pratico interesse per cui θ_p è positivo, il massimo ha luogo a piccolissima distanza dalla parete, a causa del rapido aumento di u in prossimità di essa.

Venendo alla questione che più interessa — quella del trasporto di calore connesso col campo ora studiato — si noti che il flusso di calore derivante da un campo di temperatura dedotto per sovrapposizione da due altri deve, a causa della sua dipendenza lineare dal campo, coincidere con la somma dei flussi corrispondenti ai campi componenti; nel nostro caso, poichè al primo campo non corrisponde alcun trasporto di calore, esso coinciderà con quello dovuto al secondo.

Cosicchè, se Q indica ora il calore effettivo sottratto alla lamina nell'unità di tempo, esso ci è dato dalla formola di Latzko in cui a $T_{2p} - T_{2\delta}$ si sostituisca il valore ora trovato:

$$\frac{Q}{l} = 0.0356 \gamma c_p U \left(\frac{v}{U l} \right)^{1/5} \left(\theta_p - \frac{U^2}{2 g E c_p} \right).$$

È questa la formola — di cui sarebbe facile fare diretta verifica — da sostituire alla ordinaria formola della trasmissione. Ma è importante notare che il risultato vale qualunque sia l'effettivo valore del coefficiente di trasmissione e per convincersene basta pensare al modo con cui è dedotta la formola di Latzko. V'è di più: è lecito supporre che esso valga per qualsiasi forma del corpo considerato, anche diversa dalla laminare. Infatti, ammessi simili anche qui i campi di temperatura (senza attrito) e di velocità, si può ricavare per un elemento dS di superficie

$$\frac{dQ}{dS} = \alpha \left(T_p - T_\delta - \frac{U_\delta^2}{2 g E c_p} \right)$$

dove α , funzione in generale della U e della posizione dell'elemento dS , è l'ordinario coefficiente di trasmissione a bassa velocità, e T_δ , U_δ sono i valori locali della temperatura e velocità del fluido all'esterno dello strato limite. Potendosi scrivere $T_\delta + U_\delta^2 / 2 g E c_p = T_o + U^2 / 2 g E c_p$, si ha in definitiva $\frac{dQ}{dS} = \alpha (\theta_p - \tau)$.

In conseguenza è lecito esprimere la seguente legge:

Il trasporto di calore tra un corpo qualsiasi e un fluido scorrente intorno ad esso, quando non sia più possibile trascurare il calore sviluppato per attrito, è retto dalla stessa legge che vige quando esso sia invece trascurabile, purché come temperatura del fluido si consideri quella a cui esso si porterebbe per arresto adiabatico.

Il risultato - per quanto formulabile in maniera così semplice - ha importanti conseguenze; e per metterle brevemente in luce conviene riportarsi al caso finora considerato della lamina piana.

Si vede anzitutto immediatamente che la trasmissione di calore, nulla per velocità zero, si annulla anche per un altro valore della velocità che soddisfa a $\theta_p = \frac{U^2}{2gEc_p}$; constatazione questa che in fondo non ha nulla di nuovo, poichè per $\theta_p = \tau$ si ricade nel caso conosciuto della parete impermeabile al calore.

Dall'annullarsi di Q per due valori della velocità si deduce la *presenza di un massimo intermedio* che è facile trovare con una semplice derivazione rispetto a U , supposto θ_p costante, e che ha luogo per $\tau = \frac{2}{7} \theta_p$.

Naturalmente anche $\alpha = \frac{Q}{\theta_p}$ passa per un valore che è insuperabile per ogni θ_p assegnato e che cresce lentamente, come è facile vedere, secondo la potenza $2/5$ di θ_p .

Al di là della velocità per cui la trasmissione si annulla essa diviene *negativa*, cioè il calore *invece di passare dalla lamina al fluido si propaga in senso contrario*, e con l'aumentare della velocità il coefficiente di trasmissione cresce indefinitamente in senso negativo.

L'andamento così messo in luce del coefficiente di trasmissione assume importanza pratica quando se ne consideri l'applicazione ai problemi di volo ad altissima velocità.

Non è qui il caso di entrare nel dettaglio della questione. Basta riflettere al riscaldamento di un corpo che si muova nell'aria con grande velocità e alla necessità di asportare calore - in quantità facilmente determinabile mediante la formula trovata - se si vuole che la temperatura della parete non superi un valore prefissato.

Basta pensare alla questione, ancora più grave⁽¹⁾, del raffreddamento diretto o indiretto dei motori a scoppio; in quanto lo studio fatto dimostra che il *potere raffreddante* di una parete qualsiasi, dopo essere passato

(1) G. A. CROCCO, *Superaviazione e iperaviazione*, Comunicazione al Congresso delle Scienze di Milano del 15 settembre 1931.

per un valore massimo diminuisce fino ad annullarsi e a diventare negativo, trasformandosi quindi in *potere riscaldante*. Ciò conferma l'asserzione che a meno di ricorrere a sistemi di raffreddamento differenti da quelli oggi in uso, la soluzione del problema delle altissime velocità — acustiche e iperacustiche — cui oggi si tende non potrà trovarsi sulla via del motore a scoppio.

Meccanica. — *Sopra un teorema di Stande-Wan der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso.* Nota di M. MANARINI, pres. dal Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle equazioni differenziali di Levi-Civita nel problema di getti liquidi.* Nota di G. LAMPARIELLO, pres. dal Corrisp. U. AMALDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Les équations du mouvement de trois corps à masses variables.* Nota di L. PLACINTEANU, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Ancora sulle depressioni gravimetriche nella valle padana.* Nota di A. BELLUIGI presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. VINASSA DE REGNY.

In precedenti 2 Note ⁽²⁾ ho messo in rilievo l'esistenza di 2 grandi depressioni gravimetriche: Carpaneto (Piacenza), S. Secondo-Gattatico (Parma), la prima marginale appenninica, la seconda a Nord della linea a massimi di gravità: Fontanellato-Fontevivo-Montepelato.

Ho rilevato ulteriori depressioni marginali a Sud di Lodi, ad Ovest della linea Piacenza-Podenzano, a Sud di Podenzano, ad Albinea, e notevolissima una tipo « sinclinale gravimetrica » con l'asse nella direzione Faenza, foce del F. Savio (Ravenna).

La depressione a Sud di Lodi ha una configurazione isogammatica come nella figura sottostante: essa cade alla destra del F. Adda e separa le 2 importanti anticlinali gravimetriche di S. Colombano al Lambro e Casalpusterlengo, caratterizzate queste anche da cospicue manifestazioni superficiali d'idrocarburi nelle zone assiali (fig 1).

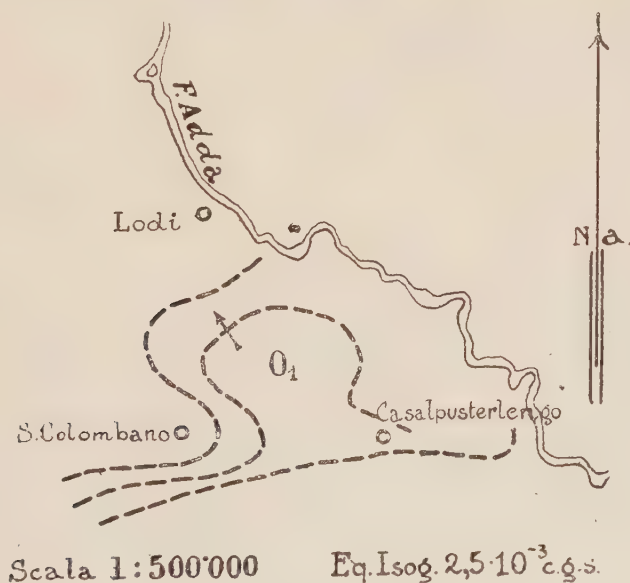


Fig. 1.

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) A. BELLUIGI, *Sulla depressione gravimetrica di Carpaneto.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 1931; *Sulla depressione gravimetrica di Gattatico Parma.* « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », 1931.

La depressione a Sud di Piacenza separa la « dorsale gravimetrica » di Podenzano (che staccandosi dall'Appennino si protende fino al Po), da fenomeni ad eccesso di gravità (ancora non del tutto ben definiti) all'altezza del così detto sprone di Stradella. Essa è completamente chiusa, come si vede dalla figura sottostante, da un'isogamma di gravità (0_2) (fig. 2).

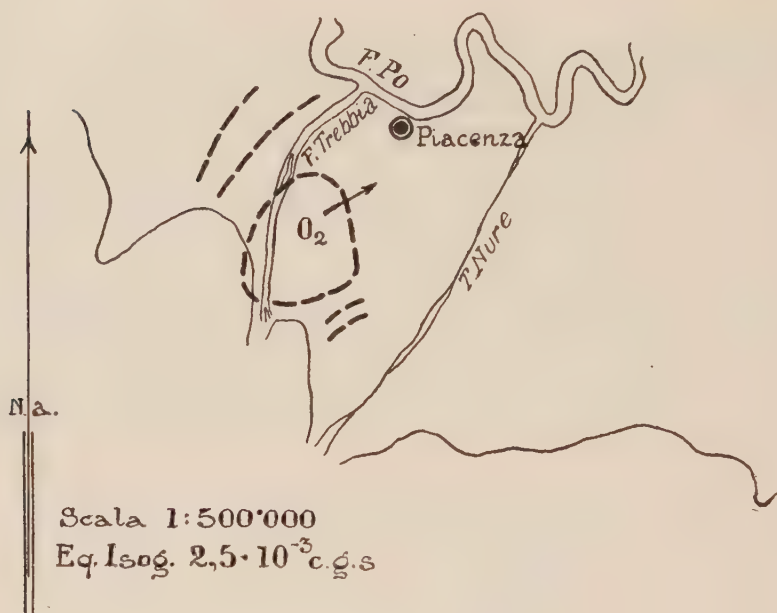


Fig. 2.

La depressione Faenza-Cervia interessa infine una vasta zona ed è in relazione con grandiosi fenomeni gravimetrici ad eccesso di gravità a Nord di Ravenna e con ciò che fin d'adesso definisco « sprone gravimetrico di Bertinoro-Cesena » sprone che mi riservo di descrivere a parte quanto prima (fig. 3).

Circa lo studio quantitativo di questi fenomeni seguo sempre un mio metodo già accennato nelle mie precedenti Note ⁽¹⁾, impiegando cioè reticoli per il computo della gravità prima e reticoli per il computo dei Gradienti di gravità dopo, una volta rintracciata la sezione verticale della substruttura perturbante.

Aggiungo qui che questo procedimento si presta in modo particolare quando si hanno configurazioni di masse a due dimensioni (o da ritenersi, con buona approssimazione, come tali), come a Carpaneto e le difficoltà

(1) Loc. cit.

aumentano invece (ma non sono insuperabili) quando le configurazioni delle masse sono a 3 dimensioni.

Non basta applicare, in questi studi quantitativi, formule o grafici per la gravità come hanno infatti descritto Numerov, Jung e altri autori⁽¹⁾, e ciò perchè dalla configurazione isogammatica della gravità non si può risalire, in modo sicuro, a quella planimetrica della massa influenzante.



Fig. 3.

Occorre, è vero, anche seguendo il mio criterio, porre in modo più o meno empirico, una certa planimetria arbitraria, e calcolare quindi la profondità della struttura perturbante, ma posto ciò risalgo all'effetto di gravità, o, meglio ancora, a quello di gradiente di gravità, per vedere se si riproduce effettivamente la configurazione della gravità osservata.

In caso contrario si altera opportunamente la planimetria ed è facile appropriarsi di questa tecnica di operazioni che risulta rapida e piana dopo una certa indispensabile pratica. Questo non è possibile coi metodi Nume-

(1) B. NUMEROV, *Graphische Methode zur Berücksichtigung des topographischen Einflusses u. s. w.* «Zeit. f. Geoph.», 1 (1925), 367-371; K. JUNG, *Diagramme zur Bestimmung der Terrainwirkung für Pendel und Drehwaage u. s. w.* «Zeit. f. Geoph.», 1927, 201-212.

rov-Jung perchè implicano troppo artificiose suddivisioni della massa perturbante.

Nella figura (4) si offrono due soluzioni relative a depressioni gravimetriche che differiscono notevolmente una dall'altra a causa di diversa

INFLUENZE DI GRAVITA' E DI GRADIENTE

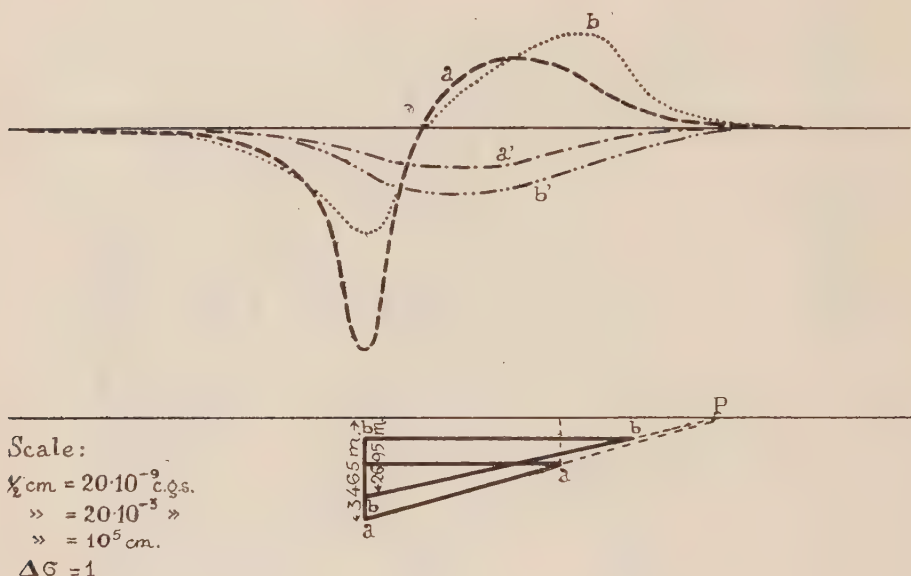


Fig. 4.

scelta di planimetria, scelta arbitraria fatta in base all'andamento delle isogamme, e potrei portare le ragioni, abbastanza ovvie però, per le quali si rendono plausibili entrambe le assunzioni di planimetrie, ma delle 2 soluzioni io posso scegliere quella che si accosta di più all'andamento di gravità osservato, anzi ho il modo di modificare ulteriormente la planimetria per ottenere poi la soluzione ottima⁽¹⁾.

Con ciò è possibile pervenire a risultati che hanno sempre un interesse scientifico geologico e che non escludono naturalmente quello minerario.

(1) A. BELLUGI, *Nuovi calcoli di influenze gravimetriche ecc.* «Ergänz-Hefte f. ang. Geophysik», 1930, pp. 141-148; A. BELLUGI and G. LENZI, *A new method of topographical correction in gravimetrical prospecting.* «Gerlands Beiträge zur Geoph.», 1931, pp. 121-130.

Fisica. — *Righe di quadrupolo negli spettri dei raggi X.* Nota di E. SEGRÈ⁽¹⁾, presentata⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Da molto tempo sono conosciute sia negli spettri ottici che in quelli di raggi X righe derivanti da combinazioni proibite dalle ordinarie regole di selezione. L'esistenza di tali righe nel caso di spettri ottici è dovuta sostanzialmente a due cause: 1° Perturbazioni esterne od interne dell'atomo emittente; 2° Termini dell'irradiazione dovuti ad un momento di quadrupolo. Righe del primo tipo sono conosciute da molto tempo e sono relativamente numerose: basti citare p. es. le combinazioni $^2P - ^2P$ dei metalli alcalini e quelle $^3P - ^3P$ dei metalli alcalino terrosi che sono state osservate nell'arco.

Condizione generale perchè due livelli a e b che in condizioni ordinarie non si combinano, possano combinarsi sotto l'azione di una perturbazione, è che esista un terzo stato c che si combini (nell'atomo imperturbato) sia con a che con b , e l'intensità della riga forzata dalla perturbazione dipende sostanzialmente dal quadrato del rapporto tra l'elemento della matrice di perturbazione che connette a e b con c e la differenza energetica tra gli stati a , b e c talchè righe di questo tipo si osservano in pratica solo quando l'energia dello stato c è quasi eguale a quella di a oppure di b . In altre parole occorre che nell'autofunzione corrispondente allo stato a o b si mescoli apprezzabilmente, sotto l'azione della perturbazione, l'autofunzione di c .

Di righe di quadrupolo negli spettri ottici sono invece conosciuti solo pochi esempi e cioè alcune righe stellari, la riga dell'aurora boreale $\lambda = 5577 \text{ \AA}$ ed alcune combinazioni $^2S - ^2D$ degli alcalini. L'intensità delle righe di quadrupolo dipende sostanzialmente dal rapporto tra il quadrato delle dimensioni delle orbite atomiche e il quadrato della lunghezza d'onda della radiazione emessa. Essa non è particolarmente sensibile alla posizione energetica dei termini che si combinano.

Le regole di selezione per le righe di quadrupolo sono: $\Delta L = \pm 1, \pm 2, 0$ escluso il caso $L = 0 \rightarrow L' = 0$; $\Delta J = \pm 1, \pm 2, 0$ escluso il caso $J = 0 \rightarrow J' = 0$ inoltre la regola di Laporte deve essere violata ossia termini pari combinano solo con termini pari e dispari con dispari. Per le righe forzate da campi elettrici, uno dei casi più comuni ed importanti di

(1) «Fellow of the Rockefeller Foundation».

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

righe proibite dovute ad una perturbazione esterna, si hanno, in assenza di un campo magnetico, le stesse regole di selezione tranne che sono permessi anche i passaggi da $L=0$ a $L'=0$ e da $J=0$ a $J'=0$. Un campo magnetico permette tuttavia di decidere se si tratti di un caso o dell'altro perchè le regole di selezione per l'effetto Zeeman sono differenti ⁽¹⁾.

Negli spettri di raggi X *tutte* le righe proibite osservate sono permesse come passaggi dovuti all'irradiazione di quadrupolo ed inoltre non si può ammettere, nelle ordinarie condizioni di eccitazione dei tubi a raggi X, l'esistenza di perturbazioni esterne così straordinarie da influenzare mutuamente livelli distanti energeticamente alcune centinaia di volt come sono i livelli X più prossimi nelle serie L, M, N, degli elementi pesanti in cui tali righe sono state osservate. Per queste ed altre ragioni che esporremo in seguito noi reputiamo che esse siano da attribuirsi ad irradiazione di quadrupolo, come già Pauli ⁽²⁾ aveva sospettato.

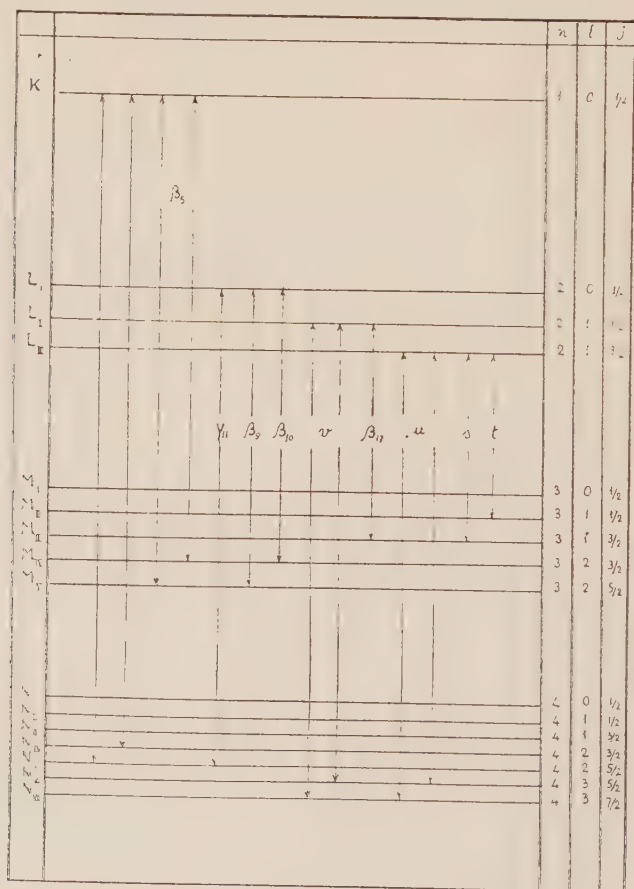


Fig. 1.

(1) Per un riassunto della questione v. E. SEGRÈ, « N. Cim. », 1931, Rivista, p. 28.

(2) J. BARTLETT Jr., « Phys. Rev. », 34, 1247, 1929.

Scopo di questa Nota è di precisare e convalidare questa ipotesi e di discutere in base ad essa il materiale sperimentale esistente.

Le principali righe X proibite che sono state osservate sono compendiate nella fig. 1, in cui sono rappresentati schematicamente i livelli X di un atomo (le distanze sono arbitrarie); a sinistra si trovano i simboli dei vari livelli secondo Siegbahn⁽¹⁾, a destra i numeri quantici corrispondenti secondo le notazioni usate negli spettri ottici. Le frecce indicano tutte le transizioni osservate che disubbidiscono alle ordinarie regole di selezione. Righe del tipo di quelle osservate in figura sono state osservate da numerosi autori e Idei⁽²⁾ ha fatto una indagine sistematica e precisa su tutta la serie L discutendo a fondo dal punto di vista sperimentale la classificazione delle righe con speciale riguardo a quelle deboli; dal suo lavoro abbiamo desunto gran parte dei dati sperimentali che si riferiscono, per la serie L, sopra tutto ad elementi di numero atomico compreso fra 73 (Ta) e 92 (U). La classificazione che dà Idei della riga $K\beta_5$ ci sembra corretta e si inquadra perfettamente nelle nostre considerazioni. La riga $K - N_{iv, v}$ è stata osservata da Leide⁽³⁾ per Mo (42) e Pd (46). Inoltre è notevole che tutti i numerosi tentativi fatti per trovare delle righe $S - S$ siano falliti; le righe infatti che sono state spiegate con passaggi di questo tipo da taluni autori in passato, debbono essere classificate diversamente, come ha mostrato Idei con considerazioni sperimentali. In ciò troviamo una valida conferma alla nostra interpretazione delle righe proibite X poichè tali passaggi sono appunto proibiti per l'irradiazione di quadrupolo. Si noti che per contro quasi tutte le righe permesse dalle regole di selezione di quadrupolo sono presenti; così p. es. delle 8 possibili transizioni quadrupolari tra livelli K, L ed M ne sono state osservate 7.

Per precisare un po' più quantitativamente fino a che punto l'irradiazione di quadrupolo possa giustificare la emissione delle righe X proibite abbiamo voluto valutare il rapporto di intensità fra una riga di dipolo ed una di quadrupolo per la serie L e precisamente il rapporto di intensità tra $\beta_9 + \beta_{10}$ e $\beta_4 + \beta_5$ del Tungsteno ($Z = 74$). A questo scopo ci siamo serviti di una formula dovuta a Stevenson⁽⁴⁾ che dà il rapporto di intensità tra una transizione $S - D$ e una transizione $S - P$; tale formula è:

$$(1) \quad J_1/J_2 = \frac{1}{5} \frac{h^2}{(2\pi m c)^2} \frac{v_1^4 \int_0^\infty r^3 R_d \frac{dR_d}{dr} dr}{v_2^4 \int_0^\infty r^3 R_s R_p dr}$$

(1) M. SIEGBAHN, *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, Berlin 1931.

(2) S. IDEI, «Sci. Rep. Torino Imp. Univ.», 19, 559, 1930.

(3) LEIDE, *Dissert*, Lund, 1925.

(4) A. F. STEVENSON, «Proc. Roy. Soc.», A 128, 391, 1930.

dove J_1 e J_2 sono le intensità delle righe di frequenza ν_1 e ν_2 che corrispondono rispettivamente ai passaggi $S \rightarrow D$ e $S \rightarrow P$ e con R_s, R_p, R_d , abbiamo indicato la parte radiale delle autofunzioni normalizzate corrispondenti rispettivamente agli stati $2S, 3P, 3D$ dell'atomo considerato e r è la distanza del nucleo. In tale formula non è tenuto conto naturalmente della possibilità che la transizione possa avvenire senza radiazione (effetto Auger) e questa causa di errore è certamente considerevole. D'altra parte una sua valutazione esatta sarebbe assai difficile nè la precisione dei dati sperimentali, che, a detta degli autori delle misure, possono dare solo un'idea dell'ordine di grandezza dei rapporti di tali intensità è sufficiente a fornire un controllo esatto. Date queste circostanze ci è parso superfluo calcolare la formula (1) con precisione e ci siamo limitati ad usare delle autofunzioni idrogenoidi prendendo come carica nucleare Z dei valori opportuni secondo alcune regole empiriche date da Slater ⁽¹⁾ e senza tener conto delle correzioni relativistiche. Come risultato dei nostri calcoli abbiamo trovato $J_1/J_2 = 0.3$ mentre le misure di Jönsson ⁽²⁾ danno $J_1/J_2 = 0.1$. Questi dati sono in accordo sugli ordini di grandezza e data la grossolanità delle approssimazioni usate nei calcoli e l'imprecisione delle misure non si poteva aspettare di più; tuttavia il risultato è espressivo qualora si confronti con quelli degli spettri ottici; per esempio ricorderemo che le righe $2S \rightarrow 3D$ del Li sono circa mezzo milione di volte più deboli delle $2S \rightarrow 3P$ ossia nelle notazioni precedenti $J_1/J_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ circa ⁽³⁾.

Potrebbe rimanere il dubbio che una perturbazione interna possa occasionare i passaggi proibiti in questione. Di tali perturbazioni interne si conosce finora solo l'esempio della perturbazione dovuta al momento nucleare che si manifesta colle strutture iperfine e a cui con ogni probabilità è dovuta l'esistenza della riga $6^1S_0 \rightarrow 6^3P_2$ $\lambda = 2270 \text{ \AA}$ di Hg e forse quella di alcune righe del Bi come p. es. $6^3 \text{ } ^4S_{3/2} \rightarrow 6^3 \text{ } ^2P_{1/2}$, $\lambda = 4615,5$.

Ma le semplici osservazioni seguenti sull'ordine di grandezza della intensità che avrebbero righe dovute ad una perturbazione di questo tipo permettono di escludere senz'altro questa ipotesi.

Consideriamo p. es. una transizione $K \rightarrow L_I$ vietata come dipolo e quadrupolo ma permessa per una perturbazione di momento nucleare: essa avverrebbe sostanzialmente perchè nell'autofunzione di L_I perturbata entrerebbe un po' dell'autofunzione di L_{II} e L_{III} e il rapporto dell'intensità della riga $K \rightarrow L_I$ a quello della riga $K \rightarrow L_{II}$, sarebbe dell'ordine di grandezza di

$$(2) \quad \left(\frac{\Delta \nu}{L_I - L_{II}} \right)^2$$

(1) J. C. SLATER, «Phys. Rev.», 36, 57, 1930.

(2) A. JÖNSSON, «Zs. f. Phys.», 36, 426, 1926.

(3) W. PROKOFJEV, «Zs. f. Phys.», 57, 387, 1929.

dove con $\Delta\nu$ si è indicata la separazione nel termine L_I dovuta al momento nucleare e $L_I - L_{II}$ è la separazione del doppietto di schermo L . Per $\Delta\nu$ si ha ⁽¹⁾

$$\Delta\nu = \frac{8\pi}{3} \frac{2i + 1}{i} \mu\mu_0 \psi^2(0)$$

dove i è il momento meccanico nucleare e μ_0, μ il magnetone di Bohr e il momento magnetico nucleare. Ponendo per $\psi(0)$ il valore dell'autofunzione idrogenoide di Schrödinger (le correzioni relativistiche per quanto considerevoli non cambiano l'ordine di grandezza) si ha

$$\Delta\nu = \frac{4\pi}{3} \frac{2i + 1}{i} \mu\mu_0 \frac{Z^3}{a^3}$$

dove Z è il numero atomico e a il raggio della prima orbita di Bohr dell'idrogeno. $L_I - L_{II}$ è notoriamente

$$\frac{R}{4} [(Z - s)^2 - (Z - p)^2] = \frac{R}{4} [2Z(p - s) + s^2 - p^2]$$

dove con s e p si sono indicate le costanti di schermo pei termini L_I e L_{II} . Sostituendo in (2) si vede che $\left(\frac{\Delta\nu}{L_I - L_{II}}\right)^2$ è una funzione crescente di Z . Nel caso più favorevole ($Z = 92$) si ha assumendo valori plausibili per i e μ , $\left(\frac{\Delta\nu}{L_I - L_{II}}\right)^2 \sim 10^{-4}$ ossia l'effetto del momento nucleare è dell'ordine del migliaio di volte più piccolo di quello del quadrupolo e pertanto trascurabile di fronte a questo. Con calcoli simili si perverrebbe allo stesso risultato anche in altri casi. A conferma di tale considerazione sta anche il fatto sperimentale che non si sono mai osservati i passaggi $S - S$ che sono vietati per irradiazione di quadrupolo, ma permessi da una perturbazione derivante dal momento nucleare, e che non è stata osservata una correlazione tra intensità delle righe proibite e grandezza delle strutture iperfini.

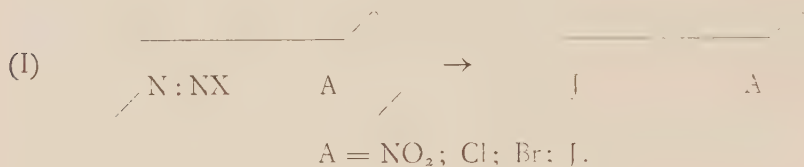
In conclusione: abbiamo mostrato come *tutte* le righe proibite di raggi X conosciute possano spiegarsi come irradiazione di quadrupolo, la quale, nel caso degli spettri di raggi X, è molto più grande che nel caso degli spettri ottici e prepondera su tutte le altre cause di apparizione delle righe proibite e perciò reputiamo che le righe proibite di raggi X vadano senza altro attribuite a transizioni di quadrupolo.

Ci sia permesso infine di ringraziare il dr. E. Majorana per il suo interessamento a questo lavoro.

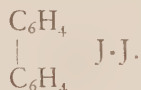
(1) E. FERMI, « Zs. f. Phys », 60, 320, 1930.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati.* — X. *Influenza di alcuni sostituenti in 2' su alcune reazioni dell'NH₂ in 2⁽¹⁾.* Nota di L. MASCARELLI, D. GATTI e M. PIRONA, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Nella Nota VIII riguardante alcuni nuovi derivati 2-2'-bisostituiti del difenile⁽³⁾ abbiamo più volte detto che la natura dei prodotti pulverulenti, insolubili in etere e negli ordinari solventi organici, che sempre si ottengono, contemporaneamente ad altri, nell'applicare la reazione di Sandmeyer, sarebbe stata da noi chiarita in una prossima pubblicazione. Possiamo infatti ora affermare che in ognuno dei passaggi seguenti studiati nella Nota VIII:



la polvere insolubile che contemporaneamente si forma è sempre costituita da ioduro di difenilenjodonio:



Infatti, se i residui pulverulenti provenienti da ognuna delle reazioni si trattano ripetutamente prima con ossido d'argento umido (per cui si ha una soluzione a forte reazione alcalina) e poi con joduro potassico che riprecipita la sostanza e se per ultimo si ricristallizza dall'acqua, secondo il processo di Mascarelli⁽⁴⁾, si riesce a stabilire che essi sono costituiti unicamente da joduro di difenilenjodonio.

La supposizione da noi fatta⁽⁵⁾ che nella decomposizione del 2-diazo-2'-nitro-difenile si fosse potuto formare anche joduro di 6-nitro-difenilenjodonio pareva suffragata dal fatto che il joduro di difenilenjodonio isolato in quella reazione mostrava, anche dopo purificazione, punto di scomposizione diverso da quello dello stesso joduro ottenuto per altra via; un più accu-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Torino.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

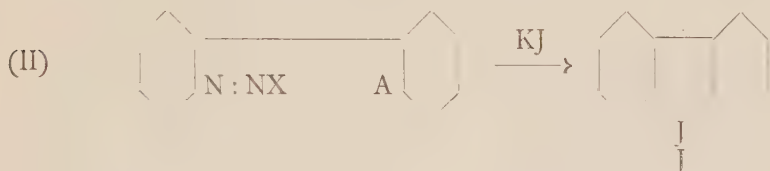
(3) L. MASCARELLI e GATTI, «Rend. R. Acc. Lincei», XIII (6), I, p. 887 (1931); «Gazz. Chim. It.», 61, p. 782 (1931).

(4) «Gazz. Chim. It.», 38, II, p. 619 (1908).

(5) «Atti III Congr. Naz. di Chim. pura ed applic.», Firenze (1929), p. 316.

rato esame mise in evidenza che svariati campioni di tale joduro, aventi punti di annerimento assai diversi fra loro, danno all'analisi valori concordanti con la $C_{12}H_8J_2$.

Occorre quindi ammettere che ogni qualvolta si decompone con joduro di potassio un 2-diazo-difenile contemporaneamente sostituito in 2', il sostituito in 2' venga (in misura più o meno grande) cacciato via dallo jodio trivalente che tende a formare un terzo nucleo sulle posizioni 2-2' ⁽¹⁾.

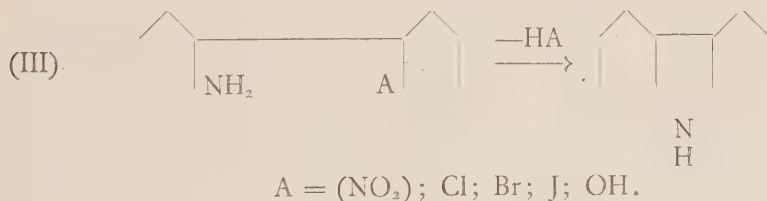


Il fatto ci pare importante perchè dimostra ancora una volta come assai spiccata sia la tendenza a formarsi anelli pentaatomici eterociclici contenenti nell'anello stesso un atomo di jodio plurivalente. Il contegno sopraccennato appare generale poichè anche Angeletti in questo laboratorio ⁽²⁾ ebbe

la base jodonica $\begin{matrix} CH_3-C_6H_5 \\ | \\ CH_3-C_6H_5 \end{matrix} > J \cdot J$ nel passare dal 2-amino-2'-nitro-4-4'-

di-metil-difenile al 2-jodio-derivato corrispondente. Naturalmente ad eliminare il sospetto che il fatto potesse provenire da prodotti di partenza inquinati di 2-2'-di-amino-derivati, si operò in tutte queste prove con sostanze purissime.

La facilità con cui, come appare dalla Nota VIII, spesso si origina anche carbazolo quando si decompone con H_2O ; $Cu Cl$; $Cu Br$ (ed anche $Cu CN$) un 2-diazo-derivato del tipo (I), (escluso quando $A = NO_2$), sta ad indicare ⁽³⁾ che anche in questo caso il sostituito in 2' viene cacciato via dall'azoto trivalente ⁽⁴⁾; questo ci fece pensare che assai probabilmente si sarebbero potute effettuare chiusure del tipo:



(1) L. MASCARELLI, « Memorie R. Accad. d'Italia », 1931.

(2) « Gazz. Chim. It. », 60, pp. 967, 970 (1930).

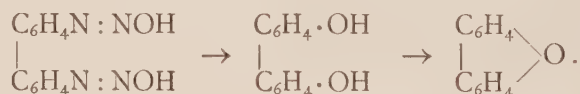
(3) L. MASCARELLI, loc. cit.

(4) Però quando $A = NO_2$ non avemmo mai carbazolo, sostanza che parrebbe di più facile formazione che non la base diifeniljodonica originantesi sempre durante la decomposizione con joduro di potassio.

Il primo indizio di questa possibilità lo avemmo nell'ineffettuabile dosamento dell'acetile (ebollizione con alcali, acidificazione con acido solforico, distillazione in vapor d'acqua dell'acido acetico formatosi e titolazione di questo) nel diacetil-derivato del 2-amino-2'-jodio-difenile: in tal caso, l'eccesso di idrossido potassico sottrae una molecola di acido jodidrico e compare in considerevole quantità il carbazolo. Naturalmente la stessa eliminazione, praticamente quantitativa, avemmo scaldando per qualche ora a ricadere il 2-amino-2'-jodio-difenile con soluzione alcoolica di idrossido di potassio. Dal prodotto della reazione si asportò con corrente di vapor acqueo il carbazolo, facilmente riconoscibile alle reazioni colorate ed al punto di fusione 238°, che non cambiò in miscela con carbazolo di altra origine.

Dal 2-cloro- e dal 2-bromo-2'-amino-difenile la eliminazione di una molecola di idracido è molto lenta; la si accelerò scaldando un grammo di ognuna di queste sostanze in autoclave a 130-150° per circa 8 ore con 25 cc. di soluzione alcoolica semi-normale di idrossido potassico; il prodotto della reazione si distillò col vapor acqueo e sui cristalli bianchi così ottenuti (p. f. 238°) si ricontrollarono le reazioni caratteristiche del carbazolo. Le prove fatte con 2-amino-2'-nitro-difenile hanno dimostrato che esso non solo resiste inalterato alla ebollizione a ricadere con idrossidi alcalini, ma non reagisce neanche quando venga scaldato per varie ore in tubo chiuso a 180-190°. Sono tuttora in corso le prove per vedere se è possibile eliminare una molecola di acqua dal 2-amino-2'-idrossi-difenile per avere carbazolo.

Nelle ricerche con i derivati 2-2'-bisostituiti del difenile⁽¹⁾ frequentemente abbiamo isolato il difenilenossido (IV) come prodotto secondario di varie reazioni. Ci occorreva, come già abbiamo fatto notare⁽²⁾, conoscere meglio l'andamento e il rendimento della reazione:



Perciò l'abbiamo ripetuta ponendoci nelle stesse condizioni descritte da Täuber e Halberstadt⁽³⁾; oltre al difenilenossido, che questi autori ebbero con un rendimento del 70 %, noi avemmo contemporaneamente una notevole quantità di carbazolo; variando le condizioni e cioè decomponendo il 2-2'-bis-diazo-difenile con acido solforico secondo il processo brevettato seguito da Cain⁽⁴⁾ il rendimento in difenilenossido fu del 68 % e non si ebbe carbazolo. Dalle prove, per ora solo iniziate, appare probabile che la

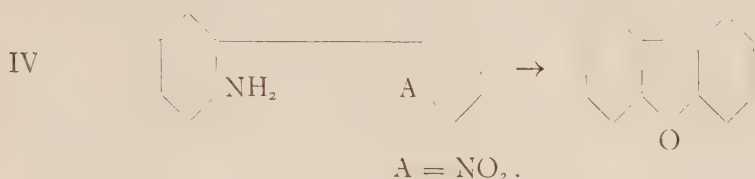
(1) Nota VIII.

(2) L. MASCARELLI, loc. cit.

(3) « Ber. », 25, p. 2745 (1892).

(4) « Journ. Chem. Soc. », London, 89, p. 19 (1906); D.R.P. 95.339; « Frdl. », 4, p. 1245.

chiusura dell'anello mediante ossigeno si compia pure secondo lo schema IV analogo ai precedenti:

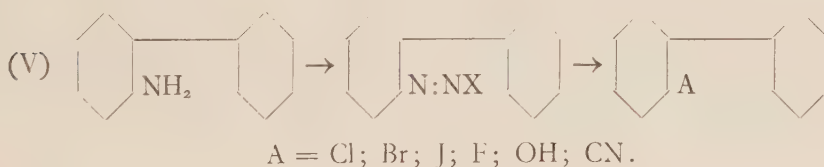


Già infatti a proposito della trasformazione del 2-amino-2'-nitro-difenile in 2-idrossi-2'-nitro-difenile ⁽¹⁾, da noi operata secondo il predetto processo brevettato, abbiamo detto di aver ottenuto difenilenossido (assieme a carbazolo, fenazone ed a sostanza ossidrilata). Angeletti ⁽²⁾ ha confermato tale contegno con l'aver isolato 4-4'-di-metil-difenilenossido nella analoga scomposizione del 2-diazo-2'-nitro-4-4'-di-metil-difenile non solo con acqua, ma con cloruro e bromuro rameoso e con joduro di potassio.

Gli altri casi in cui $A = \text{Cl}, \text{Br}, \text{J}, \text{OH}, \text{CN}$ non poterono ancora essere studiati a causa delle difficoltà per preparare il materiale di partenza. Anche le prove per eliminare ammoniacca dal 2-amino-2'-idrossi-difenile ed acido nitroso dal 2-idrossi-2'-nitro-difenile per aver in entrambi i casi il difenilenossido verranno portate a compimento appena ci sarà possibile avere in quantità sufficiente i prodotti di partenza.

Dal contegno ora accennato dei derivati 2-2'-bisostituiti del difenile si poteva arguire che il sostituito in 2 disturba la reazione in 2'.

Ne abbiamo avuto la riconferma ricorrendo al 2-amino-difenile (V) e ricontrollando il rendimento e la eventuale formazione di prodotti secondari in una serie di reazioni già eseguite da vari autori e che sono riducibili allo schema:



Il 2-amino-difenile venne preparato dal diazoaminobenzene (A.C.N.A.) ⁽³⁾ col metodo di Hirsch ⁽⁴⁾ modificato da Aeschlimand ⁽⁵⁾.

(1) Nota VIII.

(2) « Gazz. Chim. It. », 60, pp. 968, 973 (1930).

(3) Ringraziamo pubblicamente la Società A. C. N. A. per il cortese invio che ci abbreviò di molto la preparazione dei prodotti a noi occorrenti per queste ricerche.

(4) « Ber. », 25, p. 1973 (1892).

(5) « Journ. Chem. Soc. », London, 127, p. 66 (1925).

2-Cloro-difenile: $\text{Cl} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — La reazione diazoica venne compiuta con gr. 15 di amino-difenile e gr. 6.5 di nitrito sodico in presenza di acido cloridrico. Questa soluzione venne poi versata in un eccesso di cloruro rameoso, fortemente acido per acido cloridrico, operando in corrente di anidride carbonica. Il precipitato giallastro si separò dal liquido, si alcalinizzò lievemente e si distillò in corrente di vapor acqueo: il cloro-difenile passò così sotto forma di olio giallo chiaro che tosto solidificò. Venne purificato per distillazione: a 28-30 mm. bolli a 165-170°; p. f. 34°. Queste proprietà concordano con quelle descritte da Kramer⁽¹⁾, Borsche⁽²⁾, Jenkins, McCullough e Booth⁽³⁾ che lo ottennero per altre vie e da Bell⁽⁴⁾ che lo ebbe dall'azione della polvere di rame sul 2-diazo-difenile. Il rendimento da noi avuto fu elevato come avviene in tutti i casi in cui la reazione di Sandmeyer si svolge normalmente; importante per noi fu il non aver riscontrato formazione contemporanea nè di carbazolo nè di difenilenossido.

2-Bromo-difenile: $\text{Br} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — È già stato preparato da Schultz⁽⁵⁾ per decomposizione dell'isodiazoperbromuro e poi con altro processo da Gomberg⁽⁶⁾. Noi abbiamo ripetuto la scomposizione del 2-diazo-difenile con bromuro rameoso ed ottenemmo, con buon rendimento, solo bromo-difenile che isolammo distillando con vapor d'acqua e purificammo per distillazione frazionata a pressione ordinaria (p. eb. 297-298°).

2-Iodio-difenile: $\text{I} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — Noi l'avevamo già ottenuto dalla scomposizione del 2-diazo-difenile con joduro di potassio prima che vari autori⁽⁷⁾ recentemente descrivessero lo stesso processo. Avemmo un liquido che si scomponeva per distillazione a pressione ordinaria; passava come un liquido lievissimamente giallo a 170-171° a 22 mm. Il rendimento fu di circa 80 %; non si riscontrò formazione di difenilenjoduro, nè di carbazolo, nè di difenilenossido.

2-Fluoro-difenile: $\text{F} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — Fu descritto da Thèo von Hove⁽⁸⁾ che lo ebbe come prodotto secondario nella preparazione del fluorobenzene da anilina. Non abbiamo ripreparato questo prodotto.

(1) « Ann. », 189, p. 144 (1877).

(2) « Ber. », 50, p. 597 (1917).

(3) « Industrial and Engineering Chem. », 22, p. 31 (1930).

(4) « Journ. Chem. Soc. », London, p. 2770 (1928).

(5) « Ann. », 207, p. 353 (1881).

(6) « Chem. Zentr. », 11, p. 2848 (1924); « Journ. Am. Chem. Soc. », 46, p. 2339 (1924).

(7) BACHMANN e CLARKE, « Journ. Am. Chem. Soc. », 49, p. 2094 (1927), senza indicazione dei risultati; GILMAN, id., 51, p. 2261 (1929); COOK, « Journ. Chem. Soc. », London, p. 1090 (1930); BOWDEN, id., p. 1112 (1931).

(8) « Chem. Zentr. », I, p. 311 (1923); « Bull. Soc. Chim. Belg. », 8, p. 505 (1922).

2-Idrossi-difenile: $\text{HO} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — La decomposizione con acqua del 2-diazo-difenile genera solo idrossi-difenile con le proprietà descritte da Hönigschmid⁽¹⁾ che lo preparò con tale processo.

2-Ciano-difenile: $\text{CN} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}_6\text{H}_5$. — Anche questo prodotto era stato da noi ottenuto prima che Schlenk e Bergmann⁽²⁾, Pfeiffer, Engelhardt e Alfuss⁽³⁾ lo preparassero per altra via e prima che Braun e Manz⁽⁴⁾ lo avessero dalla scomposizione del 2-diazo-difenile con cianuro di potassio e di rame. Il ciano-difenile, isolato per distillazione in corrente di vapor acqueo e poi sottoposto a distillazione frazionata, bolliva a 183-185° e 20 mm. Aveva tendenza a solidificare in parte: dalle soluzioni alcoliche si separò, per lenta evaporazione del solvente, in cristalli bianchi, p. f. 38°. Il rendimento fu buono e non si formarono prodotti secondari.

Chimica (Cristallografia chimica). — *Ricerche chimiche e cristallografiche su i nitriti complessi. — II. Nitriti doppi di potassio e nichelio e di potassio e cobalto*⁽⁵⁾. Nota di A. FERRARI e C. COLLA, presentata⁽⁶⁾ dal Socio G. BRUNI.

La sostituzione di un atomo di piombo bivalente ad uno di potassio monovalente nel reticolo del cobaltinitrito accompagnata da quella di un atomo di cobalto, di rame o di nichelio bivalente ad uno di cobalto trivalente senza alterazione della forma cristallina che abbiamo dimostrato in un precedente lavoro⁽⁷⁾ è un esempio di più della possibilità di sostituzione di elementi a valenza diversa senza alterazione della forma cristallina quando la somma totale delle valenze rimanga inalterata e quando le grandezze delle particelle che si sostituiscono sono poco diverse.

Del pari la sostituzione dei metalli alcalino terrosi al piombo senza alterazione notevole del reticolo cristallino che abbiamo dimostrato nella Nota I⁽⁸⁾ del presente studio è un fenomeno abbastanza comune.

Meno facilmente comprensibile appariva invece un eventuale isomorfismo col cobaltinitrito dei composti: $6\text{KNO}_2 \cdot 3\text{Co}(\text{NO}_2)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ⁽⁹⁾,

(1) «Monatsh.», 22, p. 368 (1901).

(2) «Ann.», 464, p. 33 (1928).

(3) «Ann.», 467, p. 174 (1928).

(4) «Ann.», 468, p. 273 (1929).

(5) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Chimica Fisica della R. Università di Milano.

(6) Nella seduta del 1° novembre 1931.

(7) Questi «Rendiconti», serie 6^a, XI (1930), p. 755.

(8) Questi «Rendiconti», serie 6^a, XIV (1931), p. 435.

(9) ERDMANN, «Journ. f. prakt. Chem.», 97 (1866), p. 397; «J. B.», 1866, p. 248

$2\text{KNO}_3 \cdot \text{Co}(\text{NO}_2)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ⁽¹⁾ e $\text{K}_4\text{Ni}(\text{NO}_2)_6$ ⁽²⁾ descritti cristallizzati in cubi ed in ottaedri perchè le molecole di questi composti contengono, a differenza di quelli studiati precedentemente, un numero di atomi diverso da quello del cobaltinitrito.

I due nitriti di cobalto e di potassio si preparerebbero, secondo i citati autori, entrambi mescolando soluzioni neutre di cloruro cobaltoso e di nitrito potassico in eccesso e presentano un colore giallo come quello del cobaltinitrito. I due composti furono ritenuti da qualche autore ⁽³⁾ eguali, malgrado che le composizioni che si calcolano dalle due formule siano abbastanza diverse.

Il colore giallo aveva fatto sospettare a qualche autore che il primo nitrito si identificasse col cobaltinitrito, ma avevano ritenuto potersi escludere ciò in quanto che il composto si forma senza assorbire ossigeno ⁽⁴⁾, in atmosfera di anidride carbonica ⁽⁵⁾ ed anche sopra mercurio da soluzioni prive d'aria ⁽⁶⁾. Secondo Stromeyer ⁽⁷⁾ la formazione dei cristalli comincia alla superficie e con assorbimento di ossigeno che trasformerebbe in acido nitroso l'ossido di azoto che si libera. Ma Sadtler operando sopra mercurio non osservò sviluppo gassoso.

Braun afferma che bollendo la miscela delle due soluzioni di cloruro e di nitrito si forma un precipitato giallo bruno finemente cristallino mentre si ha uno sviluppo notevole di ossido d'azoto. Sadtler non accenna a nessun sviluppo di gas.

Il precipitato è insolubile in acqua fredda mentre si scioglie nella calda con colore rosso. La soluzione secondo Erdmann contiene cobalto bivalente. Per ebollizione di questa con soda, Braun ottenne però idrato cobaltico per cui deduce che il precipitato contiene anche cobalto trivalente.

Le analisi di prodotti ottenuti in preparazioni diverse hanno dato risultati alquanto variabili ⁽⁸⁾:

	trovato	calcolato per $\text{K}_6\text{Co}_3(\text{NO}_2)_{12} \cdot \text{H}_2\text{O}$
CoO	22.23-24.14	22.9
K ₂ O	26.67-28.72	28.9
N ₂ O ₃	42.4 -44.8	46.4
H ₂ O	1.86- 2.1	1.8

(1) SADTLER, « Am. Journ. of Sciences » (Sill.), [2] 49 (1870), p. 199.

(2) N. W. FISCHER, « Pogg. », 74 (1848), p. 115; « J. B. », 1847-1848, p. 384; LANG, « Sv. Vet. Akad. Handlingar, 1860; « J. B. », 1862, p. 101; HAMPE, « Ann. », 125 (1863), p. 346; « J. B. », 1863, p. 163.

(3) GMELIN-KRAUT, « Handb. anorg. Chem. », Bd. V, Abt. I, Heidelberg, 1909, p. 516.

(4) ERDMANN, loc. cit.

(5) ERDMANN, loc. cit.; SADTLER, loc. cit.

(6) SADTLER, loc. cit.

(7) « Ann. », 96 (1855), p. 220.

(8) GMELIN-KRAUT, loc. cit.

Braun ammette da questi risultati che il prodotto contiene Co_2O_3 in una combinazione polinucleare di composizione assai complessa.

Abbiamo ripetuto la preparazione di questo nitrito doppio.

Le analisi di prodotti ottenuti in preparazioni diverse mostrano composizioni alquanto variabili e sempre più ricche di cobalto di quello che si calcola dalla formula $\text{K}_6\text{Co}_3(\text{NO}_2)_{12} \cdot \text{H}_2\text{O}$:

	I	II	calcolato
K_2O	23.73	10.21	28.9
CoO	25.86	46.15	22.9
N_2O_3	33.47	25.76	46.4
H_2O	—	—	1.8

Il fotogramma col metodo di Debye di questa sostanza si mostra identico a quello del cobaltinitrito.

Resta quindi dimostrato che il prodotto che si ottiene mescolando in soluzione neutra cloruro di cobalto e nitrito potassico è il cobaltinitrito potassico.

Il processo di formazione si può interpretare in questo modo: il nitrito cobaltoso che si forma in un primo tempo si idrolizza in parte dando acido nitroso e idrato cobaltoso; l'acido nitroso ossida poi il cobalto a trivalente. La prova della presenza di idrato è data dal contenuto in ossido di cobalto sempre maggiore rispetto al calcolato, dalla presenza di acqua, dal colore giallo bruno del precipitato. Abbiamo anche potuto togliere l'idrato di cobalto lavando il precipitato con acido acetico: il precipitato dopo questo trattamento presenta infatti la composizione esatta del cobaltinitrito.

Questa spiegazione della formazione del cobaltinitrito ci rende conto che l'ossidazione possa avvenire senza assorbimento di ossigeno e quindi anche in atmosfera di anidride carbonica. Si dovrebbe però avere sviluppo di ossido di azoto che corrisponderebbe a quanto è stato osservato ad alta temperatura da Sadtler.

Il nitrito di nichelio e di potassio è stato da noi preparato secondo N. W. Fischer⁽¹⁾ mescolando soluzioni dei due nitriti semplici. La mescolanza delle soluzioni dei due nitriti ha dovuto essere concentrata parecchio in essiccatore a vuoto prima di ottenere i cristalli del nitrito doppio.

I cristalli presentano la forma di ottaedri ed hanno un colore rosso bruno. La colorazione diversa da quella dei composti del nichelio bivalente si deve attribuire alla formazione di un anione complesso $\text{Ni}(\text{NO}_2)_6'''$. In accordo con questa supposizione sta anche la colorazione rossa del nitrito di bario e nichelio $\text{Ba}_2\text{Ni}(\text{NO}_2)_6$ nel quale è probabile l'esistenza dello stesso anione.

(1) Loc. cit.

Il nitrito di potassio e nichelio da noi preparato ha dato all'analisi i seguenti risultati:

	calcolato per $K_4Ni(NO_2)_6$	trovato
Potassio	31.85	32.50
Nichelio	11.95	11.17
NO_2	56.20	55.21

Esaminato col metodo di Debye ci ha dato un fotogramma che già ad un confronto ad occhio si riconosce analogo a quello del cobaltinitrito. Il calcolo di questo fotogramma è esposto nella tabella I di confronto con quello del cobaltinitrito. La cella elementare contenente 4 molecole presenta un lato $a = 10.49 \text{ \AA}$. Quello del cobaltinitrito presenta una costante $a = 10.32 \text{ \AA}$.

L'isomorfismo dei due composti è particolarmente interessante poichè le molecole del cobaltinitrito $K_3Co(NO_2)_6$ e del nitrito doppio $K_4Ni(NO_2)_6$ non contengono lo stesso numero di atomi.

TABELLA I.

$K_3Co(NO_2)_6$		$K_4Ni(NO_2)_6$		$h_1 h_2 h_3$	Costante a per	
$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità	$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$	Intensità		$K_3Co(NO_2)_6$	$K_4Ni(NO_2)_6$
2.560	f	2.570	ff	400	10.24	10.28
2.307	f	2.332	dd	420	10.32	10.42
2.098	f	2.135	f	422	10.28	10.45
1.816	d	1.849	d	440	10.27	10.45
1.634	m	1.658	d	620	10.33	10.48
—	—	1.516	dd	444	—	10.48
1.380	ff	1.399	d	642	10.32	10.46
1.292	d	1.310	d	800	10.34	10.48
1.217	m	—	—	822	10.33	—
—	—	1.212	d	555	—	10.48
1.156	m	—	—	840	10.34	—
1.115	m	—	—	$\left\{ \begin{array}{l} 921 \\ 716 \end{array} \right\}$	10.34	—
—	—	1.045	m			
1.018	f	—	—	10.00-85.0	—	10.45
				10.20	10.39	—
valore medio.					10.32	10.49

Per ora non avendo potuto determinare la posizione degli atomi nella cella elementare (la cella che contiene 4 molecole rende difficile lo stabilirle) ci limiteremo a segnalare questo caratteristico esempio di isomorfismo sperando di arrivare ad interpretarlo dopo aver determinato la struttura di questi nitriti complessi.

CONCLUDENDO:

a) Si dimostra che i composti ai quali si attribuivano le formule $6\text{KNO}_2 \cdot 3\text{Co}(\text{NO}_2)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ e $2\text{KNO}_2 \cdot \text{Co}(\text{NO}_2)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ non sono altro che il cobaltinitrito impuro di idrato di cobalto. L'idrato di cobalto si forma verosimilmente nella idrolisi del nitrito cobaltoso dalla quale deriva pure l'acido nitroso che compie l'ossidazione del cobalto bivalente a trivalente e quindi porta alla formazione del cobaltinitrito.

b) Si dimostra che il composto $\text{K}_4\text{Ni}(\text{NO}_2)_6$ è monometrico con un reticolo il cui lato è $a = 10.49 \text{ \AA}$.

La costante reticolare del cobaltinitrito potassico è $a = 10.32 \pm 0.02 \text{ \AA}$.

La grandezza quasi uguale delle costanti della cella elementare e la posizione quasi identica delle linee nei fotogrammi dei due composti indicano l'esistenza fra gli stessi di strette relazioni di isomorfismo le quali, pur non essendo finora interpretate, sono tuttavia assai notevoli in quanto che le molecole dei due composti contengono numeri diversi di atomi.

Biologia (Biologia marina). — Uova e primi stadi larvali di « *Myctophum Gemellari* » Cocco (= « *Scopelus Gemellari* » C. e V.) Nota di L. SANZO, presentata ²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Per nessuna specie del genere *Myctophum* (= *Scopelus*) si ha sinora conoscenza alcuna delle uova e delle larve che ne schiudono.

I numerosi tentativi di fecondazione artificiale annualmente da me ripetuti, per quasi tutte le specie mediterranee di esso genere, non hanno sinora mai dato esito positivo; ho potuto, invece, raccogliere una rilevante massa di notizie sullo stato degli organi riproduttori, nei vari mesi dell'anno, e soprattutto sulle uova ovariche più o meno vicine alla maturazione, nell'obbiettivo di potere, sui caratteri desunti, rinvenire in mare le uova emesse e fecondate.

D'altra parte la ricostruzione di una serie di stadi larvali discendente fino ad esemplari sui 3-5 mm. di lunghezza, quale, su materiale dello Stretto di Messina, mi è stato possibile compiere per tutte le numerose specie

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Centrale di Biologia marina in Messina.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

mediterrane del genere *Myctophum*, e che in scala meno estesa feci già conoscere in una Memoria del 1918⁽¹⁾, ha ancora più accresciuta una tale probabilità di identificazione delle uova e dei primi stadi larvali.

Come primo risultato di tali laboriose indagini nel genere *Myctophum*, vengo a far conoscere in questa breve Nota le uova ed i primi stadi larvali di *Myctophum Gemellari*. In questa specie, così rara allo stato adulto, mi è mancata la possibilità di cogliere qualche dato sulle uova ovariche. Sono riuscito, per contro, a pescare e sistemare tutta una ricca serie di stadi a partire da quelli in cui è presente il caratteristico dispositivo degli organi luminosi, per discendere a stadi larvali giovanissimi di cui il più piccolo misura mm. 2,32. D'altra parte le osservazioni quotidiane delle uova pelagiche dello Stretto di Messina, la coltura di tali uova e l'allevamento delle larve che ne schiudono, hanno reso possibile differenziare, fra le tante uova pelagiche, una specie la cui larva, potuta coltivare fino al 10 giorno, si riattacca alla più piccola larva della serie che ininterrotta porta all'adulto di *M. Gemellari*.



Fig. 1. - Uovo di *M. Gemellari* al 2° giorno di incubazione; pescato il 2 settembre nello Stretto di Messina; diametro mm. 1,72.

Tali uova ho pescato in numero piuttosto scarso nei mesi di agosto-ottobre. Sono uova (fig. 1) relativamente grandi, galleggianti, sferiche, eccezionalmente trasparenti da sfuggirne la presenza nell'acqua di coltura, e con una piccola goccia oleosa. Misurano da mm. 1,64 a mm. 1,72. Vitello omogeneo; la goccia è incolore e raggiunge appena mm. 0,08 di diametro. L'uovo presenta una doppia capsula senza speciale scultura. Tra la doppia capsula ed il vitello è presente, anche nelle prime fasi di sviluppo, un discreto spazio perivitellino.

Il periodo di incubazione dura intorno a due giorni e mezzo, caratte-

(1) SANZO L., *Contributo alla conoscenza dello sviluppo post-embrionale negli « Scopelini Müller: « Myctophum Rafinesquei » » (= « Scopelus » C.)* Memoria 66 del R. Comitato Talassografico Italiano.

rizzato dall'assenza completa di pigmento e dal precoce abbozzo delle pettorali, le quali acquisteranno nello sviluppo larvale una rilevantissima lunghezza.



Fig. 2 - Larva al 3° giorno di vita extra-embryonale; lunga mm. 5,00.

Vien fuori una larva sui mm. 4; trasparentissima e priva di pigmento, tolto qualche punticino nero all'estremo del tronco caudale. Occhi ancora privi di pigmento; bocca non ancora aperta; assenza di scheletro cartilagineo sia cefalico che branchiale; sacco vitellino ancora rilevante e con la piccola goccia oleosa alla sua metà posteriore: in avanti esso non oltrepassa l'occhio, ed indietro resta vicino all'apertura anale che giace ai $\frac{2}{5}$ quasi della lunghezza totale del corpo. Le pettorali bene abbozzate si presentano al loro impianto peduncolate. Sono bene in evidenza 32 segmenti muscolari.

Ben presto, dopo 24 ore di vita extra-embryonale, le pettorali si sono caratteristicamente molto allungate per una ristretta parte antero-superiore; mentre per la rimanente porzione ventrale restano molto corte ed arrotondate. La porzione allungata presenta del pigmento nero sia all'estremo distale che alla sua base; sul contorno della porzione inferiore arrotondata si accenna del pigmento color terra di Siena, naturale. Il pigmento dell'estremo caudale è divenuto più marcato e sull'occhio si accenna già qualche punticino pigmentato.

Al terzo giorno di coltura la larva di poco accresciuta in lunghezza, intorno a mm. 5, ha notevolmente progredito nella sua interna organizzazione. È caratteristica (fig. 2) soprattutto per lo sviluppo la forma e la

pigmentazione delle pettorali. Queste raggiungono nella loro porzione superiore allungata, ancora più della metà della lunghezza totale del corpo. Il pigmento nero sempre più marcato alla parte distale ed alla base del prolungamento ha invaso anche la parte intermedia. Il pigmento color terra di Siena sotto forma di striatura della porzione inferiore arrotondata della pettorale è divenuto più evidente. Nuovo pigmento nero è apparso lungo la volta peritoneale e sotto forma di unica macchia, ventralmente sul tronco caudale ad $1/4$ quasi della sua lunghezza. Persiste la macchia all'estremo del tronco caudale. Il sacco vitellino è quasi completamente scomparso; l'occhio è iridescente; la bocca aperta; presente la cartilagine del Meckel.



Fig. 3 — Giovanissimo stadio di *M. Gemellari* lungo mm. 9,28; con caratteristiche pettorali e due organi luminosi.

Nell'ulteriore sviluppo fino al 10° giorno di coltura, la larva si accresce di poco in lunghezza, rimanendo al disotto di 5,5 mm. di lunghezza. Si accrescono ancora più le pettorali le quali in un esemplare al 6° giorno di coltura superano, con la porzione superiore allungata, la lunghezza totale del corpo. Un tale lungo filamento va facilmente perduto dall'animale nei suoi movimenti, così che alla fine del 10° giorno di coltura, non resta che la sua parte basale allargata, in continuazione con la porzione inferiore membranosa arrotondata. Sulla parte distale del moncone residuale resta intenso pigmento nero, mentre nella porzione inferiore arrotondata ogni pigmento è già scomparso fin da stadi al 5°-6° giorno di coltura. Una tale conformazione della pettorale, arrotondata e membranosa con moncone superiore ad estremo pigmentato, è caratteristica che si ripete, insieme ad altri caratteri, nelle più piccole larve pescate libere in mare e che iniziano la serie di sviluppo di *Myctophum Gemellari* da me posseduta. Sul moncone con pigmento terminale si sviluppano, lungo tale serie, i raggi definitivi della pettorale, mentre la porzione inferiore resta sempre membranosa anche quando è già comparsa la maggior parte degli organi luminosi. Nella fig. 3 è riprodotto schematicamente un esemplare di mm. 9,28 della serie di sviluppo di *M. Gemellari*, nel quale sono apparsi un fotoforo branchiostegale ed un fotoforo toracico. La pigmentazione alla parte distale della porzione

superiore della pettorale, alla volta peritoneale, all'estremo del tronco caudale ed alla base della pinna anale, richiamano le sedi pigmentate delle larve ottenute per coltura. Financo la macchietta alla base della pinna vicino al cinto toracico trova riscontro in una più piccola macchietta in identica posizione nelle larve ottenute dalle uova sopra descritte.

Oltre che per le caratteristiche pettorali e la pigmentazione del corpo, la larva al 10° giorno di coltura si riattacca alle più piccole larve della serie per il numero dei segmenti muscolari. Lo sviluppo del muso ed il suo appiattamento dorso-ventrale nella larva al 10° giorno trovano perfetto riscontro nella larva di mm. 3,32 della serie di sviluppo di *M. Gemellari*. L'occhio rotondo nei primi giorni di coltura è divenuto al 10° giorno alquanto ovale; sulla continuazione dello stesso processo, l'occhio nelle più piccole larve della serie si presenta ellittico. Ancora più la larva al 10° giorno di coltura si presenta in diminuzione di lunghezza di fronte alle precedenti larve; diminuzione che con ulteriore continuazione giustifica la lunghezza ancora minore della larva all'inizio della serie di sviluppo che porta all'adulto di *M. Gemellari*.

Alla fine della presente Nota che avrà maggiore dettaglio nel lavoro completo sullo sviluppo embrionale e post-embrionale di *M. Gemellari*, mi limito a mettere in rilievo solo l'importanza che la conoscenza delle uova galleggianti per specie che vive a notevoli profondità, assume nelle ricerche oceanografiche relative alla diffusione di essa specie, potendosi stabilire la esistenza in una data regione, con agevolissimi mezzi solo sulla presenza delle uova galleggianti.

Biologia. — *Nuovi contributi alla biologia lagunare* ⁽¹⁾. Nota di G. BRUNELLI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

Gli studi sulla biologia lagunare che erano stati finora trascurati, hanno assunto un certo sviluppo in questi ultimi anni, ma non ancora le nostre conoscenze si possono dire approfondite.

Ci limitiamo qui, salvo a trattare in seguito più estesamente l'argomento, a dare qualche altra notizia sulla fauna e flora vallive, ciò che interessa oltre la biologia anche la pesca.

Per le ricerche sul plancton della laguna Veneta gli studi del Carazzi e del Grandori sono sufficientemente completi; non altrettanto può dirsi per la fauna di fondo. Per questa riteniamo qui utile aggiungere alle specie generalmente note, un breve elenco di alcune specie riscontrate abbastanza frequentemente e cioè:

Celenterati

Paractinia striata Andres; *Palythoa arenacea* Andres; *Epizoanthus arenaceus* D. Ch.

Vermi

Platinereis Dumerilii Aud. e M. Edw.; *Perinereis Marionii* Aud. e Edw.; *Perinereis cultrifera* (Grube); *Leptonereis glauca* Clpde.; *Nereis (Neanthes) caudata* D. Ch.; *Nereis zonata* Malngreen; *N. succinea* Leuckart; *N. falsa* Qtrf.; *Audouinia tentaculata*; *A. filigera*. D. Ch.; *Cirratulus cirratus* O. F. Müller.

Briozoi

Membranipora reticulum L.; *Hippoporina Pallasiana* Moll.

Isopodi

Sphaeroma serratum Leach.; *Exosphaeroma* sp.; *Idothea baltica* Pallas.; *Cyathura carinata* Kröyer; *Ligia italica* Fab.

Anfipodi

Corophium bicaudatum L.; *Gammarus locusta* L.

(1) Lavoro eseguito nel R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia di Roma.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

Tunicati

Molgula impura Hell.⁽¹⁾.

Per le Attinie devesi ricordare che negli stagni salsi della Francia Gourret⁽²⁾ fa menzione della *Paractinia striata* Andres e del genere *Palythoa* con la specie *Palythoa denudata* Dana.

Per i molluschi esistono già sufficienti dati nella memoria del Coen. In una mia precedente Nota⁽³⁾ pubblicata con la Dr. Apolloni, ho già accennato quali siano le associazioni malacologiche lagunari.

Le alghe raccolte nelle differenti valli sono qui riportate:

Alghe⁽¹⁾

FEOFICEE: *Cystoseira barbata* Ag.; *Fucus virsoides* (Don.) J. Ag.; *Ectocarpus* sp.

RODOFICEE: *Polysiphonia subulifera* (Ag.) Harv.; *P. furcellata* (Ag.) Harv.; *P. subulata* Ducl. (= *P. violacea* Grev. var. *subulata* Hauck); *P. variegata* (Ag.) Zan.; *P. sanguinea* (Ag.) Zan.; *Ceramium* sp.; *Porphyra atropurpurea* (Oliv.) D. T.; *Laurencia obtusa* Lamour.; *Dasya elegans* Ag.

CLOROFICEE: *Enteromorpha intestinalis* (L.) Link.; *E. prolifera* (Müller) J. Ag.; *Cladophora utriculosa* Kütz.; *Valonia aegagropila* Ag.; *Chaetomorpha linum* Kütz.; *Ulva lactuca* L.; *Derbesia Lamourouxii* Solier; *Bryopsis inflexa* De Not.; *Rhizoclonium riparium* (Roth.) Harv.

CIANOFICEE: *Lyngbya aestuarii* (Jurg.) Liebm.

Vogliamo esporre qualche considerazione su tali reperti. Le valli da pesca giacciono sull'estremo lembo della laguna e sono soggette a forti oscillazioni tanto della temperatura che della salsedine; si tratta perciò di specie euriterme e eurialine.

È interessante notare che molti dei generi e specie riscontrati sono comuni all'elenco della flora e della fauna dello Zuider Zee, nella monografia redatta da Redeke⁽⁴⁾ e numerosi collaboratori e precisamente per gli animali:

Nereis succinea Leuckart; *Membranipora* sp.; *Sphaeroma serratum* Leach.; *Idothea baltica* Pallas.; *Corophium* sp.; *Molgula* sp.

(1) Per la classificazione di alcune specie di animali e delle alghe ringrazio vivamente i proff. Pierantoni, Forti, Neviani, Salpi e Torelli.

(2) P. GOURRET, *Thopographie zoologique des étangs de Caronte, de Lobillon, de Berre et de Bolmon*, « Ann. Mus. Hist. Nat. de Marseille », tome, XI, Marseille, 1907.

(3) G. BRUNELLI e N. APOLLONI, *Su alcune caratteristiche delle associazioni lagunari mediterranee*, « Rend. d. R. Acc. Naz. d. Lincei », vol. XI, 1° sem., fasc. 6, Roma, 1930-VIII.

(4) H. C. REDEKE, *Flora en Fauna der Zuiderzee*, Den Helder, 1922.

Per le alghe raccolte nelle valli della laguna Veneta dobbiamo riscontrare, come per la fauna, il parallelismo di alcuni generi e specie dello Zuider Zee:

Fucus virsoides (Don.) J. Ag.; *Enteromorpha intestinalis* (L.) Link.; *Ectocarpus* sp.; *Polysiphonia subulata* Ducl.; *Ceramium* sp.; *Porphyra* sp.; *Cladophora utriculosa* Kütz.; *Chaetomorpha Linum* Kütz.; *Lyngbya aestuarii* (Jurg.) Liebm.; *Rhizoclonium riparium* (Roth.) Harv.

Questo parallelismo conferma che la fauna delle acque salmastre presenta caratteri di analogia anche in regioni molto lontane. Resta anche confermato, come accennai in precedenti memorie, che il numero delle specie lagunari non è molto grande, mentre il numero degli individui può essere notevole.

Una considerazione a parte merita l'abbondanza di Anellidi Chetopodi e specialmente di Nereidi. La laguna di Venezia è molto più ricca di Nereidi che non gli stagni salmastri del Tirreno, studiati nel mio Laboratorio dalla Dr. Apolloni.

Noi mettiamo tal fatto in relazione coll'essere le maree dell'alto Adriatico assai più notevoli di quelle quasi insignificanti del Tirreno. Nel Congresso Internazionale di Zoologia di Berna del 1904, parlando del periodismo riproduttivo degli Anellidi, da me posto in relazione col ritmo periodico delle maree, facevo notare quale legame intercorra fra i detti fenomeni ⁽¹⁾; sarebbe perciò molto interessante studiare la sciamatura degli Anellidi Chetopodi nella laguna durante il periodo riproduttivo.

Il rifugiarsi degli Anellidi negli estremi lembi lagunari indica chiaramente quale importanza debba avere la marea come stimolo effettivo e mnemico per lo sciamare degli Anellidi migranti. Non tutti gli autori hanno mostrato di conoscere la nostra memoria del 1904 in cui tra l'altro si estendeva dal Palolo a tutte le Nereidi, il fenomeno del ritmo riproduttivo in corrispondenza colle fasi lunari, ciò che poi è stato confermato da diverse parti. Le Nereidi frequentano specialmente gli estuari e le lagune ed è evidente che in tali ambienti la marea debba avere, tra gli stimoli migratori, un'importanza tutt'altro che secondaria. La biologia lagunare ci offre quindi un altro aspetto importante per la spiegazione dei fenomeni relativi alla migrazione degli animali marini.

(1) C. BRUNELLI und H. SCHOENER, *Die frage der Fortpflanzungsperiodizität des Palolowurmes im Lichte der allgemeinen Biologie der Chaetopoden*, «Comptes rendus du 6.^{me} Congrès intern. de Zoologie, Session de Berne», 1904.

Fisiologia (Fisiologia Generale). — *Osservazioni sul contenuto in acqua dell'albume e del tuorlo dell'uovo di gallina durante lo sviluppo dell'embrione*⁽¹⁾. Nota di A. ORRÙ, presentata⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

L'osservazione che la consistenza ed il contenuto in acqua dell'albume dell'uovo di gallina subiscano modificazioni notevoli durante l'incubazione non è recente. Fin dal 1847, infatti, il Sacc⁽³⁾ poteva scrivere che, mano mano che si sviluppa l'embrione, il bianco dell'uovo diventa sempre più viscoso e cede la sua acqua al vitello; e più tardi il Carini⁽⁴⁾, in base ai risultati delle sue ricerche, era in condizioni di affermare che esiste un passaggio di acqua e di altri materiali dall'albume al tuorlo e che questo passaggio è specialmente intenso nei primi giorni. In seguito la questione fu ripresa in esame da altri ricercatori (Bellini⁽⁵⁾, Aggazzotti⁽⁶⁾, Remotti⁽⁷⁾, ecc., ecc.) e tutti sono stati concordi nell'ammettere che, durante la prima metà dello sviluppo dell'uovo di pollo, vi è un cospicuo passaggio di acqua dall'albume al tuorlo.

La maggior parte di queste ricerche, per difficoltà tecniche, si sono però arrestate, al massimo, al quattordicesimo giorno di incubazione, e pertanto, mentre sicure sono le notizie che si hanno sul comportamento dell'acqua nell'albume e nel tuorlo fino a tale periodo, scarse ed incerte sono le conoscenze che si posseggono sul decorso del fenomeno dal giorno indicato alla schiusa dell'uovo.

Eseguendo alcune indagini sul contenuto in zolfo dell'embrione in periodi diversi dello sviluppo, mi è stato possibile raccogliere tutta una serie di dati sul comportamento dell'acqua nell'albume e nel tuorlo; essi colmano le lacune esistenti al riguardo, e perciò ho creduto utile riunirli in questa Nota.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(3) SACC, *Sur les modifications qui s'opèrent dans l'oeuf de la poule pendant l'incubation*. « Annales des sciences naturelles ». Paris, 1847.

(4) CARINI, *Compte Rendu du XI^e Congrès international de Médecine*. « Arch. Ital. de Biol. », XXII, 1895.

(5) BELLINI, « Archivio di Fisiol. » vol. IV, 1907.

(6) AGGAZZOTTI, « Giornale R. Acc. di Med. », vol. LXVII, 1919.

(7) REMOTTI, *Ricerche di Morfologia*, vol. IX, fasc. 3.

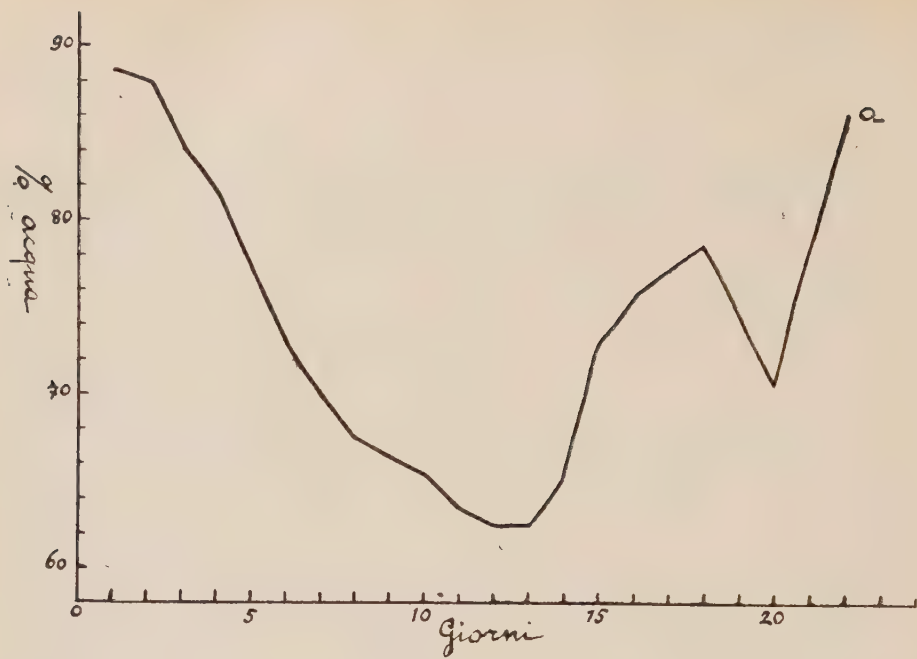


Fig. 1.

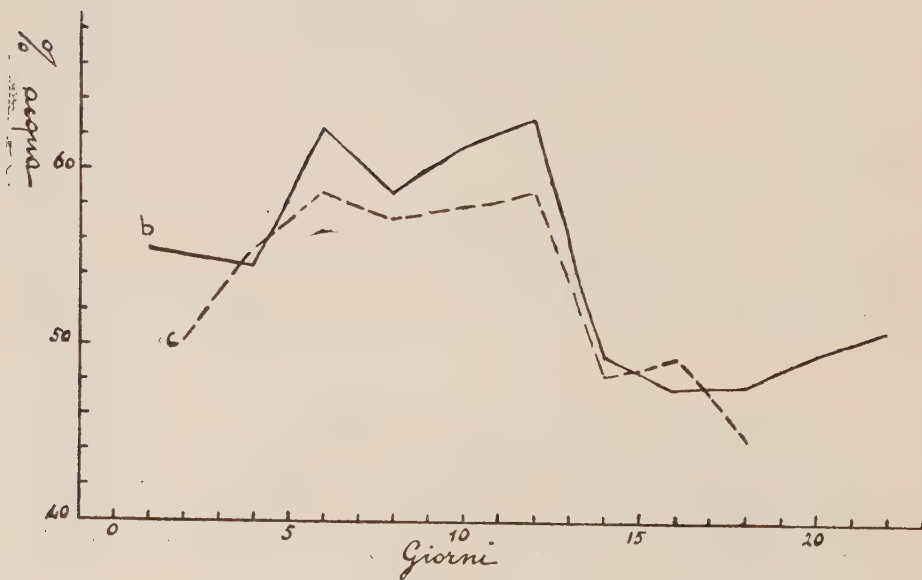


Fig. 2.

Tecnica. — Le difficoltà per raccogliere separatamente l'albume ed il tuorlo, facilmente superabili in principio, aumentano mano a mano che progredisce lo sviluppo dell'embrione, e nell'ultimo periodo di esso, tutti gli accorgimenti riescono inefficaci. Soltanto immergendo l'uovo in acqua bollente, per una diecina di minuti, si può, specialmente negli ultimi giorni, separare con sicurezza il bianco dal rosso, ed io mi sono appunto attenuta a questo metodo. Con precedenti ricerche orientative avevo potuto stabilire che, per effetto dell'assodamento, non varia il contenuto in acqua dei due costituenti dell'uovo di pollo in confronto a quanto vi se ne trova in condizioni normali, e pertanto posso ritenere che i dati da me raccolti corrispondano alla realtà dei fatti.

Per stabilire le variazioni dell'acqua nell'albume ho esaminate sei serie di dodici uova ognuna, e per quelle del vitello quattro serie, anch'esse di dodici uova ognuna.

I dati sono stati raccolti di 48 in 48 ore, e le pesate sono state eseguite al milligramma. Le cifre percentuali dell'acqua sono esposte nelle due tabelle; e con i dati in esse riferiti ho tracciate le curve, A per l'albume; e B e C ognuna per due serie di tuorli.

Conclusioni. — Dai dati avanti riferiti si possono trarre le seguenti conclusioni:

1° Durante il periodo dell'incubazione dell'uovo di gallina si verificano importanti e cospicue variazioni del contenuto in acqua sia dell'albume che del tuorlo, le quali decorrono in senso inverso; e cioè: mentre diminuisce il contenuto in acqua del primo aumenta quello del secondo. Il massimo di disidratazione del bianco si osserva tra il dodicesimo e il tredicesimo giorno di sviluppo dell'embrione, mentre il massimo di idratazione del tuorlo si verifica nel dodicesimo giorno.

2° Nella terza settimana del periodo embrionale l'albume va continuamente idratandosi fino a raggiungere, poco prima della schiusa dell'uovo quasi il contenuto in acqua che aveva al momento dell'inizio dello sviluppo; contemporaneamente, o quasi, si inizia la disidratazione del rosso, che progredisce rapidamente ma non raggiunge mai il valore che si riscontra esaminando l'uovo quiescente.

Fisiologia. — *Ricerche sul metabolismo della cistina.* Nota di G. Scoz, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulla presenza di un composto organico fosforato acidolubile nella ghiandola sottomascellare del cane.* Nota di A. Rossi e G. Scoz, pres. dal Socio F. BOTTAZZI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Commemorazione del Socio Antonio Dionisi

letta dal Socio ETTORE MARCHIAFAVA nella seduta del 6 dicembre 1931.

Or sono pochi mesi io ebbi l'onore di parlare brevemente in quest'Accademia dei meriti scientifici e della rinomanza conseguita dal socio perduto Amico Bignami; oggi ho l'onore e insieme il dolore di commemorare il socio, recentemente perduto, Antonio Dionisi; ambedue, prima di essere professori, assistenti nell'Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Roma, da me diretto; ambedue colleghi ed amici diletти, cui devo riconoscenza per la collaborazione ricevutane; e prima dei quali, avrei desiderato *supremum carpere iter*, e non, loro sopravvivendo, doverne provare l'acerbo rimpianto.

Antonio Dionisi nacque a Pietracamela, in quel di Teramo, nel forte Abruzzo, dagli abitanti industri e tenaci nel lavoro.

Conseguita la laurea, fu assistente, prima nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Firenze, e poi nell'Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Roma, dal quale, dopo aver conseguito la libera docenza e compiuta la carriera ospedaliera fino al grado di primario, uscì per andare, vincitore del pubblico concorso, professore di Anatomia patologica nella R. Università di Modena; per essere poi, nel 1910 chiamato all'insegnamento della stessa disciplina nella R. Università di Palermo. Nel 1922, con mia viva soddisfazione, fu chiamato dalla Facoltà medica di Roma a succedermi nell'insegnamento da me lasciato per limite di età, e fu per lui il lieto ritorno alla sua *alma Mater*, cui era figlio devoto.

Quando Antonio Dionisi cominciò la sua carriera scientifica si era in Roma nel fervore degli studi sulla Malaria; da dieci anni si erano già fatte conquiste vere sulla etiologia, sulla patogenesi, sulla clinica di quella infezione, e altre dovevano farsi prima della fine del secolo.

Antonio Dionisi sentì l'attrattiva per quegli studi e vi prese parte con lavori pregevoli che aggiunsero nuove conoscenze nel campo della malaria. Fu il primo, che, dopo la scoperta della etiologia della malaria, studiò nel 1890 le variazioni numeriche dei globuli rossi e dei globuli bianchi nel sangue dell'uomo, provocate dalle varie specie del parassita malarico, nelle infezioni recenti primitive e nelle recidive. E dopo aver dimostrato che nelle infezioni primitive da tutte le specie parassitarie, la distruzione globulare è assai mag-

giore che nelle recidive; mise in evidenza la differenza, nelle varie specie parassitarie, dei processi di distruzione e di riparazione dei globuli rossi; maggiore il primo e più lento il secondo nella infezione estivo-autunnale, dal *Plasmodium falciparum*, onde soltanto procede la manifestazione della perniciosità.

Di notevole significato fu la dimostrazione del fatto che quelle forme parassitarie delle tre specie, che furono poi riconosciute come gameti, destinate a compiere il loro ciclo di vita nel corpo degli anofeli, non provocano peggioramento dell'anemia; anzi, se il processo di riparazione è già iniziato, questo continua, nonostante la presenza nel sangue circolante di quelle forme gametiche.

Con il paragone fra le anemie tossiche sperimentali e le anemie post-malariche, in un lavoro con A. Bignami, stabili delle seconde i caratteri differenziali; e ciò fu confermato dalle indagini di altri ricercatori.

Riconobbe la somiglianza della malaria dei bovini con la emoglobinuria dell'uomo nella malaria; contribuendo così indirettamente al sostegno della ipotesi, divenuta poi un fatto dimostrato, che la malaria umana si trasmette, come quella dei bovini, da un insetto ematofago.

Prima della scoperta di Sir Ronald Ross sulla malaria dei passerì, Dionisi, guidato dalle congetture di Bignami sulle zanzare trasmettitrici di malaria, escluse le ipotesi dell'aria e dell'acqua; pensò che lo studio della trasmissione della malaria degli uccelli potesse riuscire di un avviamento fecondo a risolvere il problema della trasmissione della malaria nell'uomo. A questo scopo egli faceva pungere piccioni, infetti nel sangue da quell'emosporidio che si chiama *Halteridium*, da zanzare, per vedere se nel corpo di queste, quel parassita fosse capace di vivere e di moltiplicarsi. Le esperienze ebbero, pur troppo, un risultato negativo; il quale non valse però a fargli abbandonare la ipotesi, onde mossero le sue esperienze. Si deve inoltre notare che le ricerche di Dionisi furono eseguite con lo stesso metodo, che diè, poco tempo dopo, a R. Ross i gloriosi risultati dello sviluppo di un altro emosporidio, il *Proteosoma* dei passerì, nei culicidi.

A Dionisi si deve la scoperta della malaria nei pipistrelli, della quale descrisse tre forme parassitarie endoglobulari, analogamente a ciò che si verifica nella malaria umana. Dalle sue lunghe e pazienti indagini di osservazioni e sperimentali, egli venne alla conclusione, che, sebbene esistano somiglianze morfologiche e biologiche fra i parassiti dei pipistrelli e i parassiti della malaria umana, le due malarie sono di natura differente. L'epidemia malarica dei pipistrelli si comporta in modo analogo a quella dell'uomo; le nuove infezioni avvengono in estate; le infezioni che si trovano in primavera nel risveglio dal letargo invernale, sono probabilmente recidive delle infezioni estive, e le forme parassitarie, che si osservano durante il letargo, sono verosimilmente gameti.

Nella campagna romana, e proprio nella estesa tenuta di Maccarese,

allora, nel 1890, sito paludoso e desolato dalla malaria pernicioso, Dionisi rivolse le sue ricerche al problema del legame fra le infezioni primitive di malaria grave nel principio dell'estate e la presenza dei gameti corrispondenti nei malarici recidivi nel periodo preepidemico, con l'esame del sangue di un grande numero di malarici recidivi. Dalle sue osservazioni egli giudicò che quel rapporto non potesse allora essere precisato; e si può dire che neppure oggi, con tutti gli studi di non pochi malariologi, sia completamente chiarito.

Dal suo soggiorno nell'agro romano nei periodi preepidemic ed epidemici, Dionisi parlò in una sua Memoria, nella quale, alla esposizione delle ricerche di epidemiologia, aggiunse la manifestazione dei suoi sentimenti di commiserazione e d'indignazione per le condizioni di abbandono inumano, di miseria nelle quali si lasciavano allora vivere i lavoratori della terra nella campagna romana, come fossero nati a vivere peggio dei bruti; condizioni non dissimili da quelle del Sec. XVII, come si può argomentare dalla descrizione che ci ha lasciato il medico romano G. M. Lancisi dei lavoratori reduci dalla mietitura nella campagna romana, ove erano andati fiorenti di salute « *Horum plerosque videas morbosos pallidosque aspectu, ac vix firmandis vestigiis, nedum sarcinulis aut ferramentis ferendis habiles; catervatim moestos ingredi, quippe quorum magna pars in urbanis nosocomiis vitam relinquunt, vel longo tempore cum morte luctantur* ».

Sono decorsi 40 anni dal tempo, nel quali Dionisi praticava, per i suoi studi, la campagna romana. Ora quelle condizioni, che suscitavano in lui quei nobili sentimenti, per l'onore dell'umanità e la dignità della nazione sono mutate, e si avviano ad un avvenire sempre migliore: la luce della istruzione e della educazione per le scuole rurali, lo spirito della solidarietà umana per le opere assistenziali sanitarie e civili, si diffondono apportatori di civiltà e di benessere materiale e morale fra i lavoratori della terra, dai quali, *ex agricolis*, come diceva Catone l'antico, scrittore di un libro *De Re Rustica*, prima della terza guerra punica, e come si è veduto nella nostra grande guerra *viri fortissimi et strenuissimi milites gignuntur*. E la tenuta di Maccarese, ove Dionisi fece le sue ricerche, ora è rinata a nuova vita per virtù della bonifica integrale, nella quale si comprende la bonifica igienica; ciò che si verifica in altre parti della campagna Romana della estensione di più di 200.000 ettari. Di tale benefico progresso Dionisi provava viva compiacenza. Ma allora, con il triste ricordo delle miserie vedute, si adoprò con varie pubblicazioni a rendere popolare il dottrinale della malaria, dettando norme di preservazione e di cure, e n'ebbe la riconoscenza del municipio di Roma. Della malaria scrisse il capitolo nel libro delle malattie infettive dell'uomo e degli animali del socio A. Lustig.

Che Antonio Dionisi fosse realmente competente nella teoria e nella pratica della malaria, lo dimostrò durante la sua partecipazione alla grande guerra, come ufficiale superiore di Marina e come medico consulente ma-

lariologo fra le truppe operanti nel Basso Isonzo, nel Basso Sile, nel Piave, ove, essendo le condizioni telluriche sconvolte per le necessità delle azioni belliche, aumentavano la diffusione e la gravezza della malaria. Ivi Antonio Dionisi prodigò la sua attività benefica, praticando largamente, fra le truppe operanti in quelle regioni malsane, la profilassi, e la cura; la prima da lui chiamata cura chininica preventiva, allo scopo di impedire che i soldati inoculati di malaria, ne ammalassero e divenissero invalidi. E ciò egli faceva con maggiore diligenza ed alacrità, perchè gli altri mezzi di difesa non erano di agevole applicazione in quei luoghi e in quei tempi. I risultati ottenuti gli consentirono di affermare che la profilassi chininica raggiunse realmente lo scopo, che si era prefisso; d'impedire, cioè, che la infezione divenisse provocatrice di malattia.

Nei ricordi di parecchie visite da me fatte al fronte, avendo, durante la guerra l'onore di essere generale medico consulente dell'esercito, è la nobile figura di Antonio Dionisi, che vidi nel fervore dell'opera sua, incurante di ogni comodità e senza badare a disagi, a strapazzi, a sacrifici, andare in motocicletta, al sole ardente o al soffiare impetuoso del gelido Borea, alle trincee, dove egli stesso dava la chinina ai soldati, per essere sicuro che la prendessero, e diceva loro parole di persuasione, d'incoraggiamento e di bontà. Una volta andai a trovarlo a Monfalcone, sulla via di Trieste, dove la sua abitazione era la cabina di una nave rimasta incompiuta al principio della guerra nel cantiere di quella città; ed egli continuava il lavoro senza tregua, con lo stesso fervore, sebbene ammalato di congiuntivite, non obbediente ai consigli di riposo e di cura. Alla sua operosità al fronte come medico egli unì l'ufficio di membro del corpo insegnante della scuola da campo di S. Giorgio di Nogaro. Potrei aggiungere altre cose sull'opera di Dionisi, veramente ammirevole, durante la guerra; ma sento il dovere di fermarmi e di lasciare che parlino di lui persone, alle quali io devo inchinare la fronte: il valoroso generale Tettoni, comandante il VII corpo d'armata nel Basso Isonzo, gli scriveva: « per quanto ella ha fatto per i soldati del VII corpo d'armata, non è possibile esprimerlo; perchè la sua fu opera di apostolo; e si deve al grande prestigio, che giustamente godeva presso noi tutti e soprattutto all'opera sua continua senza riposo, al sereno e al turbine, nella quieta sospensione delle offese e sotto le violenti raffiche del nemico, se molte vite furono risparmiate ». E la motivazione della medaglia al valor militare, a lui conferita da S. A. R. Emanuele Filiberto di Savoia, Duca d'Aosta, pianto e rimpianto da tutta la Nazione, diceva: « Preposto al servizio di profilassi antimalarica presso le truppe operanti, noncurante dei gravi pericoli, con continuata frequenza, si recava nelle linee avanzate, portando ovunque la sua opera instancabile e fattiva. — Dall'altipiano del Carso ».

Dopo ciò, non è lecito di aggiungere altro.

Oltre che nel campo della malaria, Antonio Dionisi rivolse la sua

attenzione ad altri argomenti della Patologia; onde le non poche sue pubblicazioni, che dimostrano il suo spirito di osservazione, la esattezza e la chiarezza delle esposizioni dei fatti osservati, il senso critico, la prudenza nelle conclusioni. Fra le pubblicazioni ricordo: le correlazioni fra apparato sessuale e apparato emolinfatico; la etiologia e la patogenesi della bronco-polmonite così detta verminosa delle pecore; la istogenesi dell'induramento polmonare consecutivo alla polmonite fibrinosa; l'anatomia patologica della Leishmaniosi; la classificazione patogenetica degli itteri; la degenerazione policistica dei polmoni; la siringomielia bulbare ecc. A queste pubblicazioni si devono aggiungere monografie, prolusioni, commemorazioni, fra le quali quella da lui fatta recentemente nella nostra Accademia del socio Aldo Perroncito. L'ultimo suo lavoro « *Milza ed Emolisi* » è stato pubblicato dopo la morte di lui, nell'Archivio italiano di anatomia e istologia patologica, del quale egli era uno dei fondatori.

Alle benemeritenze come ricercatore e come cittadino, Antonio Dionisi unì le benemeritenze, non meno ammirabili, d'insegnante e di educatore della gioventù studiosa. Per l'insegnamento, verso il quale negli ultimi anni, si era in gran parte polarizzata la sua operosità, aveva potente il sentimento del dovere, e, imponendosi sempre nuovi compiti a renderlo più proficuo, lo esercitava con volontà fervida, piena di entusiasmo. Egli passava la vita nel suo Istituto, facendo lezione tutti i giorni e vigilando i lavori degli assistenti e degli studiosi volontari, che egli stimolava all'amore per le ricerche scientifiche elaborate con metodo, con perseveranza, per il solo scopo di conseguire nuove verità, onde procede il vero progresso della scienza; e di essere sempre pronto a porgere schiarimenti e aiuti agli studenti, ai medici, ai colleghi era per lui come un bisogno spontaneo. Come ho detto, egli faceva lezione tutti i giorni, ed erano lezioni lunghe, seguite da dimostrazioni, nella scuola affollata di studenti e di medici. Nelle lezioni pratiche di anatomia patologica, egli memore di essere stato medico degli ospedali e che il suo insegnamento si rivolgeva a futuri medici, alle autopsie soleva far precedere le storie cliniche e a queste ritornava nelle epicrisi per metterle in relazione con le alterazioni rinvenute, ed entrare nella spiegazione dei sintomi e della patogenesi dei processi morbosi; per risalire, cioè, dalla morte alla vita. Così egli seguiva il metodo insegnato dal nostro grande maestro G. B. Morgagni, cui la nostra scuola è stata sempre fedele.

Terminato l'anno scolastico, dopo gli esami, non soleva prendersi quel periodo di riposo, cui avrebbe avuto diritto dopo tanto lavoro; ma continuava la vita consueta nell'Istituto e a fare lezioni nella scuola superiore di Malariologia.

Il suo cuore, già affaticato per gli strapazzi della guerra, aveva dato segni di debolezza: ma la fiamma del dovere da lui sentito come un imperativo in grado superiore, lo sosteneva, lo animava, gli faceva celare i patimenti, gli dava l'oblio della stanchezza.

Pochi giorni prima della morte lo vidi nell'Istituto, ove egli mi dava cortese ospitalità, e consapevole del lavoro da lui compiuto nell'estate e delle condizioni di sua salute, lo scongiurai di prendersi un periodo di riposo, prima dell'inizio del prossimo anno accademico. Egli lo promise; ma invece andò a Milano al Congresso delle Società per il progresso delle scienze, accompagnato dalla sua egregia Signora, che gli fu compagna fedele, affettuosa, devota, consolatrice nelle inevitabili amarezze della vita, e che, trepidante per la sua salute, gli era sempre vigile protettrice. In quel Congresso prese parte attiva, e n'ebbe preoccupazione ed emozione. Poi andò a Salice al Congresso del Reumatismo promosso dalla clinica del Lavoro della Università di Milano. Ivi, nella seduta inaugurale, tenne un discorso, il cui argomento precipuo era il grande valore delle conquiste scientifiche nell'indirizzo della pratica medica. Come, nel plauso dei convenuti, ebbe finito il discorso, il suo cuore buono e generoso cessò di battere, ed egli cadde morto. E fu la morte bella del soldato valoroso, che, ferito, non si allontana dalla linea del fuoco, ma seguita a combattere fin che le forze lo sorreggono, con nel cuore scolpite le sublimi parole del Poeta: *Dulce et decorum est pro Patria mori*.

Di tutte le distinzioni, le onorificenze, che furono conferite a Dionisi ho ricordato la medaglia al valore militare; ora, senza enumerare tutte le altre, ricorderò la maggiore: il 27 settembre 1929, in riconoscimento dei suoi meriti di Professore, d'Insegnante, di Cittadino, della sua opera altamente benefica per tutta la lunga guerra, fu nominato dal Capo del Governo membro dell'Accademia d'Italia.

E oggi la nostra Accademia al Socio rimpianto, la cui vita fu un nobile esempio di lavoro non sterile e di puro altruismo, ha voluto, ascoltando benignamente la mia modesta commemorazione, rendergli l'estremo onore con la promessa di non dimenticarlo.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. ANTONIO DIONISI

1. *Ricerche sulla malaria dell'uomo, dei mammiferi, degli uccelli.*

«Variazioni numeriche dei globuli rossi e dei globuli bianchi in rapporto col parassita malarico». (Sperimentale, 1890).

«Sulle variazioni degli elementi figurati del sangue nelle febbri malariche». (Policlinico, vol. VIII, Sez. Medica, 1901).

«Le anemie postmalariche e le anemie tossiche croniche sperimentali». [In collab. con Bignami]. (Atti dell'XI Congresso Internazionale di Medicina, 1894).

«Sulle alterazioni anatomico-patologiche della malaria dei bovini. (Supplemento al Policlinico, 1897).

«Sulla Biologia dei parassiti malarici nell'ambiente». (Policlinico Sez. Medica, 1898).

«Zur aetiologie der Malaria Parasiten». (Untersuchungen Zur Naturlehre der Menschen und der Tiere, vol. XXII, Bd. 3, 2).

«Un parassita del globulo rosso in una specie di pipistrello». (R. Accad. dei Lincei, vol. VII, Serie V, fasc. 8°, ottobre 1898).

«Ein Parasit der rothen Blutkörperchen in einer Fledermäusen». (Untersuchungen Zur Natur der Menschen und der Tiere, XVI, 5, 6).

«Un parasite du globule rouge dans une espèce de chauve-souris». [Minopterus Schreiberü, Kuhl.]. (Arch. Ital. de Biologie, tome XXXI, fasc. I.).

«I parassiti endoglobulari dei pipistrelli». (Accad. dei Lincei, vol. VII, fasc. 9°, novembre 1898).

«Les parasites endoglobulaires des chauve-souris». (Arch. Ital. de Biologie).

«Ueber Endoglobulär Parasiten bei der Fledermausen». (Unt. Zur Naturlehre der Menschen, und der Tiere, XVI, 5, 6).

«Il ciclo evolutivo degli emosporidi» [in collaborazione con Grassi]. (R. Accad. dei Lincei, vol. VII, Serie V, fasc. 2°, 14 dicembre 1898).

«Le cycle evolutif des hemosporidies». (Arch. Ital. de Biologie, tome XXXI, fasc. 2°).

«Der Entwicklungscyclus der Hämosporidien». (Untersuchungen Zur Naturlehre der Menschen und der Tiere, XVII, 1, 2).

«La malaria di alcune specie di pipistrelli». (Ann. d'Igiene sperimentale, vol. IX, fasc. 4°, 1899).

«Die Malaria einiger Fledermäusern». (Untersuchungen Zur Naturlehre der Menschen und der Tiere).

«La malaria dei pipistrelli». (Gazzetta medica Ital., anno 53, nn. 44-45, pag. 480).

«La malaria di Maccarese dal marzo 1899 al febbraio 1900». (Annali d'Igiene sperimentale, ottobre 1901).

«Die anatomische Forschung in der Aetiologie der malaria und die Leistungen der Italiener in derselben». (Folia haematologica, 1 Jahrg., n. 9).

«La preparazione e la difesa sommaria dell'esercito e dell'armata dall'infezione malarica». (Milano, Ravà, 1915).

«La profilassi della malaria». (Società Italiana d'Igiene, 1920).

«La malaria delle terre redente». (Giornale di medicina militare, 1921).

«Osservazioni sulla cura preventiva chininica». (R. Accademia Medica di Roma, 1924-25).

«Anatomia Patologica della malaria». (Roma, Editori Ferri, 1928).

2. Ricerche relative alla Patologia del sangue e dell'apparato.

Emopoietico.

«Sugli elementi dell'essudato endoalveolare nella linfemia complicata a polmonite». (Atti III, Riunioni Soc. Ital. di Patologia. Pavia, ottobre 1906).

«Contributo alle correlazioni fra apparato sessuale e apparato emolinfopoietico». (Atti VI, Riunioni Soc. Ital. di Patologia. Modena, 1909).

«Contributo alla Anatomia, Patologia dell'Anemia di Leishmann». (Lo sperimentale, anno 67, Suppl. al fasc. 4°, 1913).

«Infezioni da Emosporidi. Malattie infettive dell'uomo e degli animali domestici». (Vol. II, Vallardi, Milano, 1915, seconda edizione 1922).

«Leishmaniosi». (Ibidem).

3. Ricerche relative alla Patologia dell'apparato respiratorio.

«Contributo alla patogenesi della broncopolmonite». (Policlinico, 23 febbraio 1902).

«Contributo alla patogenesi della broncopolmonite, e specialmente sulla patogenesi e sulla etiologia della così detta broncopolmonite verminosa delle pecore». (Atti R. Accad. Medica di Roma, anno 28, fasc. 4°, 1901-1902).

« Idem ». (*Gazzetta Medica italiana*, anno 53, nn. 44-45).

« Sull'induramento polmonare consecutivo a polmonite fibrinosa ». (*Lo sperimentale*, fasc. 6°, 1903, p. 711).

« Sulla persistenza del diplococco di Fraenkel nel sangue del cane — Contributo alla biologia del diplococco di Fraenkel negli animali naturalmente resistenti ». (*Atti R. Accad. di Scienze, Lettere e Arti di Modena*, giugno 1905).

« Sulla degenerazione policistica dei polmoni ». (*Lo sperimentale*, 1903, fasc. 5°, p. 716).

« L'Infarto anemico del Polmone ». (*Bollettino della R. Accad. med. di Roma*, 1929).

4. *Anatomia Patologica del sistema nervoso.*

« La patogenesi dellairingomielia bulbare ». (*Riv. sperimentale di Freniatria*, vol. 25, fasc. 1°).

« Malattia di Heine-Medin. In malattie infettive dell'uomo e degli animali domestici ». Milano, Vallardi 1915, seconda edizione 1922.

5. *Anatomia Patologica dell'apparato circolatorio ed urinario.*

« Di una causa rara di ipertrofia del ventricolo destro ». *Soc. Lancisiana degli Ospedali di Roma*, 12 maggio 1894.

« Sulla cistite e ureterite cistica ». (*Lo sperimentale*, fasc. 6°, 1902).

6. *Anatomia Patologica degli organi della digestione.*

« Sui tumori primitivi del peritoneo ». (*Bollettino Soc. Lancis. Osped. di Roma*, vol. 12, 1892).

« Sulle varici primitive dell'Esofago ». (*Riforma medica*, vol. 2°, 1893, p. 486).

« Sulla pileflebite ateromatosa ». (*Soc. Lancis. Osped. di Roma*, 3 marzo 1894).

« Sui sarcomi primitivi del fegato ». (*Policlinico*, vol 7°, 1900).

« Su alcune speciali alterazioni di un fegato sifilitico ». (*R. Accad. di Scienze, Lettere e Arti di Modena*, 1905).

« A proposito delle classificazioni patogenetiche degli itteri ». (*Firenze, Soc. Tipografica Fiorentina*, 1915).

7. *Pubblicazioni Varie.*

« Il concetto di malattia ». (*Rivista di scienze*, 1908, n. 6).

« Il concetto di malattia ». Conferenza tenuta alla Società Filosofica di Palermo il 14 maggio 1915. (*Periodico "Logos"*, 1915).

« Anatomia Patologica dei gas asfissianti ». (*Giornale di medicina militare*, anno 49, 1921, p. 417).

« I compiti dell'analisi anatomica nella patologia ». (*Rivista ospedaliera*, vol. 13, 1923).

« La Scienza e la Pratica nell'Universo ». Roma, Ditta Pallotta, 1929.

« Anatomia patologica della tubercolosi ». Roma, Edit. Pozzi, 1928.

« Nefropatie ». Roma, Edit. Bucciarelli, 1925.

« A commemorazione di Oreste Ferraresi ». (*Boll. R. Accad. Medica di Roma*, 1928).

« A commemorazione di Aldo Perroncito ». (*R. Accad. dei Lincei*, giugno, 1929).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà lettura del telegramma col quale il sen. GARBASSO si scusa di non poter essere presente alla seduta.

Il Socio MARCHIAFAVA legge una commossa commemorazione del Socio DIONISI.

Il Presidente ringrazia il Socio MARCHIAFAVA per la bella ed elevata commemorazione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio SEVERI presenta, con le seguenti parole, la seconda parte del vol. I dell'«Enciclopedia delle matematiche elementari» redatta a cura del Socio BERZOLARI e dei proff. Vivanti e Gigli.

«Non essendo stato presente nella precedente seduta, mi è mancata la possibilità di sottolineare con qualche parola la presentazione della II^a parte del I^o volume della Enciclopedia delle matematiche elementari, pubblicata per iniziativa della Sezione pavese della Mathesis e sotto la direzione dei professori Berzolari, Vivanti e Gigli. Domando il permesso di farlo ora.

«È difficile trovar condensata in un solo volume, di non grande mole, così copiosa materia, ordinata con tanta cura, con tanta armonia e con fine equilibrio. L'opera riuscirà soprattutto utile agl'insegnanti delle nostre scuole medie, i quali è desiderabile si tengan sempre a contatto colla cultura superiore e specie con quelle parti di essa, che hanno rapporti coll'insegnamento secondario. Utilissimo poi il libro sarà per i nostri laureandi e laureati, che vogliano completare la loro preparazione per l'insegnamento medio.

«Non si può pertanto che esprimere il più vivo plauso agl'iniziatori e ai Direttori dell'Enciclopedia e soprattutto al nostro Collega Berzolari, che è di essa il primo animatore».

Il Socio LEVI-CIVITA presenta in omaggio un suo volumetto (N. 41 delle «Attualità Scientifiche»; Bologna, Zanichelli, 1931), intitolato *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Esso rispecchia, nella redazione curatane dal Dott. Giovanni Lampariello, un breve corso tenuto dall'A. al Seminario Matematico della R. Università di Roma. Vi è esposta la nota teoria di Hugoniot-Hadamard concernente le onde di discontinuità, con semplificazioni della impostazione e del conseguente algoritmo applicativo. Questo viene illustrato su svariati esempi idrodinamici ed elettromagnetici (con spe-

ziale riguardo alle onde sonore e luminose), e dà luogo a riflessioni d'indole generale sui fenomeni analiticamente rappresentabili mediante un sistema *normale* di equazioni alle derivate parziali. Ad ogni sistema siffatto (l'equazione dello Schrödinger ne costituisce un caso particolare semplice e cospicuo) si può subordinare, attraverso le varietà caratteristiche, un aspetto ondulatorio, e, attraverso le linee bicaratteristiche, un aspetto corpuscolare. Si ricava così una spiegazione matematica, agnostica, ma soddisfacente, del dualismo onde-corpuscoli, che fu genialmente affacciato dal de Broglie ed ebbe brillanti conferme sperimentali, senza tuttavia consentire, almeno sinora, un modello concreto, accettabile in generale.

Il Socio ARMELLINI presenta il II volume del suo « Trattato di Astronomia siderale ».

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in dono segnalando una serie di pubblicazioni della prof. Rina Monti; una serie di volumi della « Collection du centenaire de l'Algérie », un volume edito a cura del Ministero dei Lavori Pubblici in occasione del XV Congresso Internazionale di Navigazione di Venezia (1931), dal titolo « Il Servizio idrografico Italiano »; « Le risorse idriche del compartimento e le possibilità della loro utilizzazione nei riguardi dell'Agricoltura » a cura del Magistrato alle acque.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci AMALDI, ARMELLINI, BOTTAZZI, CASTELNUOVO, CORBINO, CROCCO, ENRIQUES, LEVI-CIVITA, PARRAVANO, RAFFAELE, SEVERI. Il Socio ENRIQUES esprime il desiderio che insieme alla Nota del sig. Godeaux da lui presentata, si stampi una dichiarazione relativa alla priorità della ricerca in questione.

Il Socio ENRIQUES presentando la Nota del sig. Lucien Godeaux aggiunge quanto segue:

L'esempio elegante recato dal sig. Godeaux ha, per la teoria delle superficie, specialmente questo interesse: che mostra l'esistenza d'una superficie regolare di genere superficiale nullo $p_a = p_g = 0$ e genere lineare $p^{(1)} > 1$; mentre le sole superficie non razionali con $p_a = p_g = 0$, conosciute finora, avevano il genere lineare $p^{(1)} = 1$. A tale proposito per debito di giustizia debbo dichiarare che, indipendentemente dal sig. Godeaux, anche il sig. Luigi Campedelli è pervenuto dal canto suo a trovare delle superficie con $p_a = p_g = 0$ e $p^{(1)} > 1$: si tratta precisamente di certi piani doppi con curva di diramazione d'ordine 10, per cui $p^{(1)} = 2$ e 3. Lo studio del sig. Campedelli offre un'analisi completa dei piani doppi con curva di diramazione d'ordine 8 e 10, di cui mi propongo prossimamente informare l'Accademia. Frattanto ho voluto segnalare la coincidenza, per testimoniare l'indipendenza delle ricerche dei due geometri.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 dicembre 1931

- ARMELLINI GIUSEPPE. — Trattato di Astronomia siderale. Vol. II. Bologna, 1931. 8°, pp. I-VIII, 1-559.
- BARTSCH PAUL. — A new Pearl Oyster from the Hawaiian Islands. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-2.
- BARTSCH PAUL. — A new Shipworm from Venezuela. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-3.
- BARTSCH PAUL. — Descriptions of new marine Mollusks from Panama, with a figure of the Genotype of Engina (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-10.
- BILLIARD L. ET VERGNIEAUD F. — Les ports et la navigation de l'Algérie. (Collection du Centenaire de l'Algérie 1830-1930). Paris, 1930. 8°, pp. 1-182.
- BLAKE DORIS HOLMES. — Revision of the species of beetles of the genus *Trirhabda* North of Mexico. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-36.
- BOSELLI F. B. — Studi sugli Psyllidi (Homoptera: Psyllidae e Chermidae). X (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIV, pp. 267-278). Portici, 1931. 8°.
- CASSINIS GINO. — Progressi e tendenze nei procedimenti per determinazioni di gravità relativa (Estr. dal « Bollettino del Com. Naz. Italiano per la Geodesia e la Geofisica ». Anno I 1931). s. l. 1931. 8°, pp. 1-19.
- CERETTI GIULIO E PINI GIUSEPPE. — Mezzi e vie di trasporto. (Pubblicazioni della R. Scuola di Ingegneria di Pisa). Pisa, 1931. 8°, pp. 1-94.
- CHANDLER ASA C. — New genera and species of nematode worms. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-11.
- COMPÈRE HAROLD. — A revision of the species of *Coccophagus*, a genus of Hymenoptera, Coccid - Inhaleiting parasites. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-132.
- CORDARO G. — Non più supposizioni scientifiche. Prove e logiche deduzioni sull'essere della luce. Caltanissetta, 1931. 8°, pp. 1-16.
- CUSHMAN R. A. — Descriptions of thirteen new American and Asiatic ichneumonflies, with taxonomic notes. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-16.
- CUSHMAN R. A. — Notes on ichneumonflies of the genus *Polycyrtus* with descriptions of new species. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-62.
- DEMONTÈS VICTOR. — L'Algérie agricole suivie de quelques renseignements sur les produits de la steppe et de forêts. (Collection du Centenaire de l'Algérie, 1830-1930). Paris, 1930. 8°, pp. 1-367.
- DEMONTÈS VICTOR. — L'Algérie industrielle et commerciale. (Collection du Centenaire de l'Algérie, 1830-1930). Paris, 1930. 8°, pp. 1-187.

- DIKMANS G. — Two new lungworms from North America ruminants and a note on the lungworms of sheep in the United States. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- DIKMANS G. — Two new species of nematode worms of the genus *Ostertagia* from the Virginia deer with a note *Ostertagia lyrata*. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-6.
- DUPARC L. — Les giseents de molybdénite d'Azègour (Maroc). Mémoire présenté au Congrès International de Mines, de la Métallurgie et de la Géologie appliquée, VI Session, Liège 22-28 Juin, 1930. pp. 75-80). Liège, 1931. 4°.
- DUPARC L. — Les gites cuprifères du Niari (Congo français) (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie ». Tome X, pp. 181-208). Genève, 1931. 8°.
- DUPARC L. — Les trachytes d'Abyssinie (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie ». Tome X). Genève, 1930. 8°, pp. 1-3.
- DUPARC L. — Sur les basaltes et les roches basaltiques du plateau Abyssin. (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie ». Tome X). Genève, 1930. 8°, pp. 1-37.
- DUPARC L. et WAKKER D. — Sur les gisements aurifères des environs de Saint-Yrieux (Haute - Vienne). (Extr. des « Archives des Sciences physiques et naturelles ». Vol. XII, pp. 31-60). Genève, 1930. 8°.
- DUPARC L. — Sur les gisements de fluorine de Martinèche et des Isserts dans les environs de Pontgibaud. (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie ». Tome XI, pp. 9-11). Genève, 1931. 8°.
- DUPARC L. — Sur les phénomènes de contact du granite d'Azegoar et sur le gisement de molybdénite. (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie ». Tome X). Genève, 1930. 8°, pp. 1-3.
- DUPARC L. et AMSTUTZ A. — Contribution à l'étude pétrographique du Mayombe, du Haut - Ogoné et des régions intermédiaires (Extr. des « Annales de la Société Géologique de Belgique »). Liège, 1931. 8°, pp. 1-48.
- DUPARC L. et AMSTUTZ A. — Sur les enclaves du granite du Gabon et sur les raches basiques de Moukagni. (Extr. du « Bulletin Suisse de Minéralogie et Pétrographie » tome XI). Genève, 1931. 8°, pp. 1-8.
- ESICH IVAN. — More u Poljskoj Književnosti. Split, 1931. 8°, pp. 1-22.
- Exposé du développement des services postaux, télégraphiques et téléphoniques en Algérie. (Collection du Centenaire de l'Algérie, 1830-1930). Paris, 1930. 8°, pp. 1-70.
- FANTOLI GAUDENZIO. — Il XV Congresso Internazionale di navigazione interna e marittima (Estr. dalla Rivista « L'Energia Elettrica ». Vol. VIII). Milano, 1931. 4°, pp. 1-8.
- FANTOLI GAUDENZIO. — L'inaugurazione dell'annata didattica 1931-32. R. Politecnico di Milano. Milano, 1931. 8°, pp. 1-28.
- FERRAZ SAMPAIO. — O segundo ano polar internacional, 1932-1933. Rio de Janeiro, 1931. 8°, pp. 1-IV, 1-16.
- FIORE MARIA. — Ricerche sulla causa di una gommosi diffusasi in alcuni frutteti di Torre del Greco (Estr. dal « Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli ». Tomo X). s. l. 1931. 8°, pp. 1-20.
- FISCHER ALBERT K. and WETMORE ALEXANDER. — Report on birds recorded by the Pinchot expedition of 1929 to the Caribbean and Pacific. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-66.
- FISHER W. K. — Report on the South American sea stars collected by Waldo L. Schmitt. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-10.
- FOURMARIER P. et DENOËL L. — Géologie et industrie minérale du pays de Liège. Paris, 1930. 8°, pp. 1-VIII, 1-235.

- GANDINI M. — Micosi faringee e tonsillari da *Cryptococcus uvae* Pollacci e *Nanizizi* (Estr. dagli « Atti dell' Istituto Bot. dell' Università di Pavia » Ser. VI, Vol. II, 1930, pp. 157-171). Siena, 1931. 8°.
- GARCIA GODOFREDO. — Ecuaciones cardinales y ecuaciones universales completas de la dinámica. Inambari, 1931. 8°, pp. 1-25.
- GARCIA GODOFREDO. — Ecuacion fundamental de toda la mecánica en la que están involucradas las ecuaciones cardinales y ecuaciones universales completas de la dinámica. Lima, 1931. 8°, pp. 1-10.
- GARCIA GODOFREDO. — La reforma de la mecánica celeste de Hoëne Wronsky demostrada por nuestra ecuacion fundamental de la mecánica, explicando la construcción mecánica del Universo entero. Lima, 1931. 8°, pp. 1-38.
- GARCIA GODOFREDO. — Teorema generalizado de las aceleraciones en el movimiento compuesto. Chorrillos, 1931. 8°, pp. 1-8.
- GARCIA GODOFREDO. — Teoremas y fórmula fundamental de la resistencia de materiales. Chorrillos, 1931. 8°, pp. 1-10.
- GILMORE CHARLES W. — A new species of Erodont Dinosaur from the lanee formation of wyoming. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-6.
- HRDLÍČKA ALEŠ. — Catalogue of human crania in the United States National Museum collections. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-95.
- JEANS JAMES. — Le mystérieux univers. Paris, 1931. 8°, pp. 1-172.
- LANDAU EDMUND. — Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes. (Sonderabd. aus « Journal für die reine und angewandte Mathematik ». Band 105). Berlin, 1931. 4°, pp. 1-3.
- LEVI-CIVITA TULLIO. — Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione on-dosa. Lezioni raccolte dal Dott. G. Lampariello. Bologna, 1931. 8°, pp. 1-VII, 1-108.
- LOMBARDI M. — Considerazioni geometriche per l'analisi periodale. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XIII, pp. 748-754). Roma, 1931. 8°.
- LOCKYER WILLIAM J. S. — On the Relationship between Solar Prominences and the Forms of the Corona. (Reprinted from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society ». Vol. XCI, pp. 787-809). s. l. 1931.
- LORENTZ H. A. — Problems of modern physics; a course of lectures delivered in the California Institute of Technology. Boston, s. d. 8°, pp. 1-VI, 1-312.
- LUCKER JOHN T. — A new genus and new species of Trematode worms of the family Plagiorchidae. (From the « Proceedings of the United States National Museum ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-8.
- Magistrato alle acque. — Le risorse idriche del compartimento e le possibilità della loro utilizzazione nei riguardi dell'agricoltura. Roma, 1931. 8°, pp. 1-VIII, 1-285.
- MARC H. — Notes sur les forêts de l'Algérie. (Collection du Centenaire de l'Algérie. 1830-1930). Paris, 1930. 8°, pp. 1-702.
- MARTINOZZI LEONARDO. — Sulle possibilità della formazione della grandine a quota relativamente bassa. (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze, Nuovi Lincei ». Anno LXXXIV). Roma, 1931. 4°, pp. 1-12.
- MANGINI ARMANDO. — Flora ed economia agraria degli indigeni. (Ministero delle Colonie. Ufficio studi e propaganda). Rocca S. Casciano, 1931. 8°, pp. 1-190.
- MIGLIORATO GARAVINI C. — Le epatiche inedite « Rhizocephala » e « Riccia trichophylla » di Guglielmo Gasparini. (Estr. dagli « Atti dell' Istituto Bot. dell' Università di Pavia ». Vol. II, pp. 153-155). Siena, 1931. 8°.
- MILLMAN PETER M. — Objective prism radial velocities. (From the « Journal of the Royal Astronomical Society of Canada ». September, 1931, pp. 281-293). Toronto, 1931. 8°.

- Ministero dei Lavori Pubblici. — Il servizio idrografico italiano. XV Congresso internazionale di navigazione. Venezia, settembre, 1931. Roma, 1931. 4°, pp. I-VIII, 1-402, 1-XXII.
- MONTI RINA. — Alcune osservazioni di termica lagustre. (Estr. dai Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere». Vol. LXI, fasc. XI-XV). Milano, 1928. 8°, pp. 1-12.
- MONTI RINA. — Biologia dei coregoni nei laghi italiani. (Estr. dalla «Rivista di Biologia». Vol. XI). Milano, 1929. 8°, pp. 1-180.
- MONTI RINA. — Contributo alla biologia degli alpini in relazione all'ambiente. (Estr. dagli «Atti della Società Italiana di Scienze Naturali». Vol. XLIX). Pavia, 1910. 8°, pp. 1-79.
- MONTI RINA. — Contributo alla biologia delle dafnie lariane. Pavia, 1924. 8°, pp. 1-5.
- MONTI RINA. — Di un'altra nuova specie di «Libertia» e di alcune idragne nuove per la fauna italiana. Pavia, 1904. 8°, pp. 1-12.
- MONTI RINA. — Genere e specie nuovi di idragnide. (Estr. dai «Rendiconti R. Ist. Lomb. di sc. e lett.». Serie II. Volume XXXVIII, pp. 168-176). s. l. 1905. 8°.
- MONTI RINA. — La battaglia contro i maggiolini. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno IX 1929. pp. 509-529). Roma, 1930. 8°.
- MONTI RINA. — La circolazione della vita nei laghi. Conferenza. (Estr. dalla «Rivista mensile di pesca». Anno IX. N. 1-5. 1907). s. l. 1907. 8°. pp. 1-21.
- MONTI RINA. — La fioritura delle acque sul Lario. (Estr. dai «Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere». Vol. LVIII, fasc. XVI-XX). Milano, 1925. 8°, pp. 1-12.
- MONTI RINA. — La graduale estinzione della vita nel lago d'Orta. (Estr. dai «Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere». Vol. LXIII). Milano, 1930. 8°, pp. 1-22.
- MONTI RINA. — La liminologia comparata dei laghi insubrici. (Estr. dagli «Atti del IV Congresso Internazionale di Limnologia teorica ed applicata». 1929). Roma, 1929. 8°, pp. 1-38.
- MONTI RINA. — La limnologia del Lario in relazione al ripopolamento delle acque ed alla pesca. (Ministero dell'Economia Nazionale). Roma, 1924. 8°, pp. 1-507.
- MONTI RINA. — La lotta contro i maggiolini. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno VII, 1927. pp. 545-583). Roma, 1928. 8°.
- MONTI RINA. — L'ampiezza delle variazioni presentate dai coregoni italiani. (Estr. dall'«Archivio Zoologico Italiano». Vol. XV, pp. 83-92). Napoli, 1930. 8°.
- MONTI RINA. — La pressione osmotica dei liquidi negli organismi acquatici in rapporto con le variazioni dell'ambiente. (Estr. dall'«Archivio di Fisiologia». Vol. IX, pp. 318-328). s. l. 1911. 8°.
- MONTI RINA. — La variabilità della pressione osmotica nelle diverse specie animali. (Estr. dagli «Atti della Società Italiana di Scienze Naturali». Vol. LIII, pp. 392-448). Pavia, 1914. 8°.
- MONTI RINA. — La vita negli alti laghi alpini (Estr. dalla «Rivista mensile di Sc. Nat. «Natura». Vol. I, pp. 153-166). Pavia, 1910. 8°.
- MONTI RINA. — Le condizioni fisico-biologiche dei laghi ossolani e valdostani in rapporto alla piscicoltura. Pavia, 1903. 4°, pp. 1-51.
- MONTI RINA. — Le migrazioni attive e passive degli organismi acquatici d'alta montagna. (Estr. dal «Monitore zoologico Italiano». Anno XX. pp. 52-53). s. l. 1908. 8°.
- MONTI RINA. — Le migrazioni attive e passive degli organismi acquatici d'alta montagna. (Estr. dai «Rendiconti del R. Ist. Lombardo di sc. e lett.». Volume XLI, pp. 899-912). Milano, 1908. 8°.
- MONTI RINA. — Le variazioni del residuo e dei gas disciolti nelle acque del Lario in rapporto con la biologia lacustre. (Estr. dai «Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere». Vol. LIX). Milano, 1926. 8°, pp. 1-11.
- MONTI RINA. — L'hétéromorphose chez les dendrocèles d'eau douce et en particu-

- lier chez la « *Planaria Alpina* ». (Extr. des « *Archives italiennes de Biologie* ». t. XXXIII). Turin, 1900. 8°, pp. 1-8.
- MONTIRINA. — *Limnologische Untersuchungen über einige italienische Alpenseen*. (Separatabdruck aus teil XI der Plöner Forschungsberichte 1904, pp. 251-275). Stuttgart, 1904. 8°.
- MONTIRINA. — *Per l'esplorazione dei laghi alpini*. (Estr. dal XXV « *Annuario 1929-30 della S. A. T.* »). Trento, 1930. 8°, pp. 1-11.
- MONTIRINA. — *Recherches sur quelques lacs du massif du Ruitor*. (Extr. des « *Annales de Biologie lacustre* ». Tome I). Bruxelles, 1906. 8°, pp. 1-48.
- MONTIRINA. — *Ueber eine neue Lebertia-Art*. (Sonderabdruck aus dem « *Zoologischen Anzeiger* ». Bd. XXVI, N°. 707. pp. 688-693). s. l. 1903. 8°.
- MONTIRINA. — *Ueber eine neue Sperchon-Art*. (Sperchon montisrosae n. sp). (Sonderabd. aus dem « *Zoologischen Anzeiger* » Bd. XXXV, N°. 9 e 10, pp. 257-261). s. l. 1909. 8°.
- MONTIRINA. — *Un nouveau petit filet pour les pêches planktoniques de surface à toute vitesse*. (Sonderabdruck aus « *Internationale Revue der gesantem Hydrobiologie und Hydrographie* ». Band III, pp. 548-552). Leipzig, 1910. 8°.
- MUESEBECK C. F. W. — *Descriptions of a new genus and eight new species of Ichneumonflies, with taxonomic notes*. (From the « *Proceedings of the United States National Museum* ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-16.
- PEARL RAYMOND. — *Alcool e biologia umana*. (Estr. dagli « *Scritti biologici* ». Vol. VI). Siena, 1931. 8°, pp. 1-12.
- PEARL RAYMOND. — *Studiens on human longevity*. IV. The inheritance of longevity; preliminary report. (Reprinted from « *Human Biology* ». Vol. III, pp. 245-269). Baltimore, 1931. 8°.
- PEARL RAYMOND. — *Notes longevity: a pedigree*. (Reprinted from « *Human Biology* ». Vol. III, pp. 133-137). Baltimore, 1931. 8°.
- PEARL RAYMOND. — *Quotations an eighteenth Century French Evolutionist; the History of a gesture* (Reprinted from « *Human Biology a record of research* ». Volume II. N° 4, pp. 559-568). York, 1930. 8°.
- PEARL RAYMOND. — *Quotations; Harvey's post-mortem examination of Thomas Parr*. (Reprinted from « *Human Biology* ». Vol. III, pp. 138-142). Baltimore, 1931. 8°.
- PEARL RAYMOND. — *Report of the Director of the Institute for Biological Research*. V, 1929-1930. (Reprinted from « *Report of the President of the University 1929-1930* ») s. l. 1930. 8°, pp. 1-11.
- PEARL RAYMOND. — *Statistical report of the third year's operations of the Bureau for Contraceptive Advice*. (Reprintend from « *Third Report of the Bureau for Contraceptive Advice* ». 1931). Baltimore, 1931. 8°, pp. 1-14.
- PEARL RAYMOND and REED LOWELL J. — *The logistic curve and the genus count of 1930*. (Reprinted from « *Science* ». Vol. LXXII, pp. 399-401). s. l. 8°.
- PIERACCINI GAETANO. — *La donna nella conservazione e nel perfezionamento della specie*. *Scritti biologici raccolti da Luigi Castaldi; supplemento al Vol. VI*. Siena, 1931. 8°, pp. I-VIII, 1-483.
- PIZZARELLO ANTONIO. — *Gravitazione universale potenziale d'una ingente massa M nei punti esterni ad essa e nei punti interni*. (Estr. dai « *Rendiconti dell'Istituto Marchigiano di scienze, lettere ed arti* ». Vol. V e VI. Anno 1929-30). Fabriano, 1931. 8°, pp. 1-39.
- POGGI JACQUES. — *Les chemins de fer d'intérêt général de l'Algérie* (Collection du Centenaire de l'Algérie 1830-1930). Paris, 1931. 8°, pp. 1-578.
- POUGET et LEONARDON. — *Agrologie du Sahel*. (Collection du Centenaire de l'Algérie 1830-1930). Paris, 1930. 4°, pp. 1-114.
- PRICE EMMET W. — *A new species of trematodes of the family Heterophyidae, with a note on the genus Apophallus and related genera*. (From the « *Proceedings of the United States National Museum* ». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-6.

- PRICE EMMETT W. — Four new species of trematode worms from the muskrat, *Onychomys leucogaster*, with a key to the trematode parasitic of the muskrat. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-13.
- PRICE EMMETT W. — Redescription of two species of trematode worms from the MacCallum collectio, with a note on the family *Pronocephalidae*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-10.
- RANZI SILVIO. — Duplicitas cruciata in embrioni di Cefalopodi. (Estr. dalle «Pubblicazioni della Stazione Zoologica di Napoli». Vol. XI, pp. 86-102). Napoli, 1931. 8°.
- RANZI SILVIO. — Maturità sessuale degli Anellidi a fasi lunari. (Estr. dal «Bollettino della Società Italiana di Biologia sperimentale». Volume VI). Milano, 1931. 8°.
- RANZI SILVIO. — Risultati di ricerche di embriologia sperimentale sui Cefalopodi. (Estr. da «Archivio zoologico Italiano». Vol. XVI, pp. 403-407). Padova, 1931. 8°.
- RANZI SILVIO. — Ricerche sull'accrescimento embrionale. (Estr. da «Archivio zoologico Italiano». Vol. XVI, pp. 401-402). Padova, 1931. 8°.
- REINHARD. H. J. — The two-winged flies belonging to Siphosturnia and allied genera, with descriptions of two new species. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Volume 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-11.
- RUGK (von) ERWIN. — Die Universität Basel. Basel, 1930. 4°, pp. 1-96, I-IV, 1-63.
- SAVASTANO LUIGI. Studi Virgiliani. I Della II Georgica: commento arboreo. II Escursioni. (Estr. dagli «Annali della R. Stazione sperimentale di agrumicoltura e frutticoltura». Vol. XI, pp. 40-126). Arcireale, 1931. 8°.
- SHAMEL H. HAROLD. — Notes on the american bats of the genus *Tadarida*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-27.
- SHAPLEY HARLOW. — Professor Solon I. Bailey. (Reprinted from «Science». Vol. 74). 1906. 8°, pp. 1-3.
- SHAPLEY HARLOW. — Sidereal explorations. (Reprinted from the «Rice Institute Pamphlet» Vol. XVIII, pp. 45-115). s. l. 1931. 8°.
- SILVESTRI F. — Descrizione di nuovi *Cam-podeidae* (Insecta, Thysanura) della regione neotropica. (Estr. dal «Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria del R. Istituto Superiore Agrario. Portici». Vol. XXIV. pp. 320-340). Portici, 1931. 8°.
- SMITH HUGH M. — Descriptions of new genera and species of Siamese fishes. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-48.
- STRASSMANN PAUL. — Aus der Medizin des Rinascimento. An der Hand des «Leben von Benvenuto Cellini» nach der Uebersetzung Goethes. Leipzig, 1930. 4°, pp. 1-55.
- TREADWELL AARON L. — Three new species of Polychaetous Annelids from Chesapeake Bay. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-5.
- ULRICH E. O. and BASSLER R. S. — Cambrian bivalved crustacea of the order Conchostraca. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-130.
- VISALLI DANTE. — Le cariche elementari. Memoria n. 1. Livorno, 1931. 8°, pp. 1-30.
- WEBBER R. T. — A new parasitic fly of the genus *Chaetophlepsis*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.
- WEHR EVERETT E. — A new species of nematode worm from the sage grouse (From the United States National Museum». Vol. 72). Washington, 1931. 8°, pp. 1-3.

WEHR EVERETT E. — Description of a new genus and species of nematode worm occurring in the northwestern belted kingfisher, with a key to the genera of the subfamily Acuariinae. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 79). Washington, 1931. 8°, pp. 1-4.

WETZEL RUDOLF. — Descriptions of a new species of Amidostomine worm of the genus *Epomidiostomum* from the gizzard of anserine birds. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 78). Washington, 1931. 8°, pp. 1-10.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 dicembre 1931 (anno X)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Ricerche sopra le variazioni dell'assorbimento atmosferico ed osservazioni varie.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI e di G. CONTI.

1. *Variazione annua dell'assorbimento atmosferico.* — L'assorbimento che l'atmosfera terrestre produce nella luce inviata dalle stelle è già stato determinato in alcune Specole Italiane: a Roma da G. Armellini ed E. Bianchi, a Napoli ed a Catania da A. Bemporad, a Padova da E. Padova ecc. Ma, in proposito, v'è una questione ancora aperta e cioè di sapere se tale assorbimento vari *sistematicamente* durante il corso dell'anno; p. es. se sia maggiore nell'estate o nell'inverno.

Per studiare tale questione, Gabriella Armellini Conti ha eseguito una serie di osservazioni fotometriche della stella Polare con un fotometro di Toepfer a cuneo assorbente e lampadina di confronto, applicato all'equatoriale Merz del R. Osservatorio del Campidoglio. Queste osservazioni furono fatte soltanto in notti *molto serene e senza luna*, spingendo il cuneo graduato fino all'estinzione completa della stella ed ottenendo i risultati esposti nell'annessa tabella, dove L indica la lettura al cuneo nel momento dell'estinzione.

(1) Presentata nella seduta del 6 dicembre 1931.

Data	L	Data	L	Data	L
1927 luglio 22	70.38	1927 agosto 30	70.30	1928 aprile 10	73.43
23	72.23	settembre 1	71.53	maggio 19	72.97
24	72.30	novembre 16	70.03	21	72.31
25	70.72	dicembre 21	70.59	22	72.73
26	72 —	1928 gennaio 17	71.03	giugno 12	71.25
27	71.70	18	72.33	13	70.22
28	71.81	20	73.13	20	71.48
29	72.28	febbraio 12	71.95	novembre 13	71.57
31	71.71	25	72.30	14	73.63
agosto 1	72.03	marzo 16	72.03	15	73.93
3	71.43	17	72.30	19	72.55
29	71.24	18	70.47	1929 gennaio 12	70.42

Ognuna di queste letture L rappresenta la media di 20 puntate; si tratta dunque di 720 misure eseguite dalla dott. Conti sulla Polare.

Ciò posto, per procedere alla discussione, divideremo queste misure in due gruppi e cioè:

a) *Gruppo estivo*, comprendente le misure eseguite nel semestre costituito da aprile, maggio, giugno, luglio, agosto e settembre;

b) *Gruppo invernale*, comprendente le misure eseguite nel semestre di ottobre, novembre, dicembre, gennaio, febbraio e marzo.

Considerando la larga estensione delle misure, possiamo ritenere compensati nelle medie i piccoli errori provenienti dalla debolissima variabilità periodica della Polare o da eventuali variazioni periodiche dell'acutezza visiva dell'osservatore. Inoltre l'ora media dell'osservazioni del primo gruppo si aggira intorno alle 19 di tempo siderale, mentre quella del secondo gruppo si aggira intorno alle 7 di tempo siderale e cioè — essendo l'ascensione della Polare eguale ad $1^h 35^m$ — le due ore corrispondono, presso a poco, a quelle in cui la Polare presenta la massima elongazione a ponente ed a levante. Tenendo conto di ciò e ricordando che la Polare dista dal Polo celeste soltanto di $1^\circ 5'$, possiamo concludere che l'astro aveva praticamente la stessa altezza sull'orizzonte sia nelle osservazioni del primo gruppo, che in quelle del secondo gruppo, onde la differenza tra le letture medie dei due gruppi dipenderà soltanto dalle variazioni della trasparenza atmosferica.

Ora eseguendo le medie, abbiamo:

a) Gruppo estivo: $L = 71.71$;

b) Gruppo invernale: $L = 71.88$.

Vale a dire, poichè la divisione del cuneo fotometrico adoperato corrisponde a 0.1660 grandezze stellare, troviamo una differenza sistematica di appena tre centesimi di grandezza stellare.

Ma, secondo le tabelle di Potsdam, l'assorbimento atmosferico all'altezza della Polare sarebbe di 0.11 grandezze e forse maggiore. In conseguenza, dalle osservazioni della Dott. Conti, dobbiamo ritenere che, a Roma, l'assorbimento atmosferico nell'inverno è lievemente minore di quello estivo, ma che tale differenza non sembra oltrepassare il 25 %. Dobbiamo notare però che, come appare dalla tabella, i massimi assoluti della trasparenza atmosferica si presentano generalmente nella stagione invernale.

Aggiungiamo che, come avemmo occasione di dire altra volta, da due anni si eseguono quotidianamente al Campidoglio, a mezzodì, osservazioni piroeliometriche della radiazione solare, sia a campo libero che con filtri di luce. È evidente che la discussione di queste osservazioni porterà un nuovo contributo alla questione che ci occupa.

2. Osservazioni fotometriche di pianeti e pianetini. — Con l'occasione, riportiamo alcune osservazioni fotometriche di pianeti e pianetini, eseguite al Campidoglio dal prof. G. Armellini col fotometro di Toepfer applicato all'equatoriale Merz. Notiamo che ogni osservazione è il risultato di dieci misure e che non è stata eseguita alcuna correzione per l'assorbimento atmosferico differenziale, giacchè questa sarebbe stata insensibile essendo il pianeta notevolmente elevato sull'orizzonte ed assai prossimo alle stelle di confronto.

Data	Pianeta	mag.	Cfr.	Data	Pianeta	mag.	Cfr.
1926 marzo 12	Nettuno	7.77	1,2,3	1929 dicembre 11	Cerere	7.19	4,5
13		7.77	»	20		7.60	»
15		7.85	»	1930 gennaio 11	Vesta	6.33	6,7
16		7.91	»	1931 aprile 14	Cerere	6.97	8,9,10
1929 dicembre 4	Cerere	6.92	4,5	16		7.18	»
6		6.88	»				

Come stelle di confronto abbiamo adoperato le seguenti, traendo le grandezze m dalla *Revised Harvard Photometry*:

1 = ψ Leonis ;	$m = 5.48$	6 = BD 24° 1931 ;	$m = 6.06$
2 = 11 Leonis ;	6.90	7 = BD 24 1940 ;	5.73
3 = 7 Leonis ;	6.64	8 = BD 11 2485 ;	4.95
4 = BD 19° 742 ;	6.56	9 = BD 12 2512 ;	6.05
5 = BD 19 740 ;	7.25	10 = BD 12 2518 ;	7.07

3. *Osservazioni meridiane di pianeti e pianetini.* — Il meridiano di Ertel del R. Osservatorio del Campidoglio fu già descritto ⁽¹⁾ in una precedente pubblicazione. Aggiungiamo soltanto che, con tale strumento, Respighi, Di Legge e Giacomelli composero il *Catalogo Stellare Capitolino* di 4012 stelle, la cui scrupolosa esattezza emerge dal confronto con le stelle di Auwers. E ciò mostra come lo strumento possa ancora rendere buoni servizi alla scienza, specialmente se applicato ad osservazioni zonali.

Presentemente il meridiano viene adoperato per la misura delle posizioni di stelle con forte movimento proprio, contenute in una lista redatta dal Van Maanen ⁽²⁾; ma con l'occasione, quando si trovino tra i paralleli limitanti la zona di osservazione, si fanno anche misure posizionali dei pianetini più lucidi della grandezza 8.5, come pure dei pianeti Urano e Nettuno le cui perturbazioni secolari sono ancora poco conosciute.

Riservandoci di pubblicare le posizioni stellari dopo esaurita la lista, riportiamo ora, nella seguente tabella, le posizioni planetarie. In proposito avvertiamo che, nelle riduzioni, ci siamo serviti delle Tavole di Rifrazione del Radau, date dalla « *Connaissance des Temps* » e che si dimostrano bene adatte per l'atmosfera di Roma ⁽³⁾. Avvertiamo ancora che, in ogni osservazione, prendiamo, di regola, dieci appulsi ai fili orari e tre appulsi al filo mobile di declinazione, leggendo quindi i quattro microscopi micrometrici. Notiamo infine che le declinazioni dei due piccoli pianeti Cerere e Vesta sono *topocentriche*, e cioè senza correzione per la parallasse diurna.

(1) Cfr. G. ARMELLINI e G. ARMELLINI CONTI, *Osservazioni meridiane di stelle di Eros*, in « *Rend. Lincei* », 1931, 1° sem.

(2) Cfr. A. VAN MAANEN, *List of stars with proper motion exceeding 0",50 annually*, in « *Astroph. Journ.* », vol. XLI.

(3) Cfr. G. ARMELLINI, *Saggio sopra la rifrazione astronomica a Roma*, in « *Rend. Lincei* », 1929, 1° sem.

Pianeta	Data	α	δ	Osservazioni
Cerere	1931-IV-16	12 ^h 43 ^m 40 ^s ,36	12° 9' 47",6	G. Conti
	17	42 53 ,69	10 18 ,1	»
	23	38 34 ,28	8 44 ,4	»
	25	37 15 ,92	6 27 ,3	»
	27	36 3 ,55	3 15 ,0	»
	28	35 27 ,69	1 18 ,0	»
Vesta	1931-VII-10	19 6 9 ,65	— 23 11 57 ,0	G. Conti
	21	18 55 35 ,83	— 24 14 37 ,5	»
	23	53 51 ,84	24 58 ,7	»
	25	52 11 ,37	34 54 ,9	»
	28	49 56 ,17	49 2 ,4	»
	29	49 13 ,16	53 35 ,1	»
	30	48 32 ,20	57 55 ,5	»
	31	47 52 ,27	— 25 2 4 ,1	»
Urano	1931-XI-21	0 59 38 ,76	5 39 1 ,5	G. Armellini
	XII- 2	58 46 ,55	33 56 ,2	»
	14	4 ,10	30 2 ,8	»
	15	1 ,80	29 51 ,6	G. Conti
Nettuno	1930-IV 2	10 13 54 ,48	11 40 36 ,2	»
	9	25 ,31	43 16 ,7	»
	10	21 ,72	43 21 ,1	»
	28	12 32 ,34	47 55 ,5	»

Paragonando le posizioni osservate di Urano e Nettuno con le posizioni teoriche, date dal *Nautical Almanac* di Greenwich e tratte dalle tavole di Newcomb, abbiamo come media delle differenze tra osservazioni e calcolo:

Urano: $O - C$; $\Delta\alpha = - 0^s.02$; $\Delta\delta = 3''.1$

Nettuno: $O - C$; $\Delta\alpha = - 0^s.20$; $\Delta\delta = 1''.3$.

Notiamo che in alcune misure eseguite nel 1929 all'Osservatorio di Trieste ⁽¹⁾ paragonando le posizioni di Nettuno con quelle di α Leonis, si è trovato per $O - C : \Delta\alpha = -0^s.21$; $\Delta\delta = 1''.5$, valori che coincidono esattamente con quelli del Campidoglio.

4. Osservazioni di posizione di Urano durante la sua congiunzione con α Piscium. — Nella seconda metà di novembre 1928, il pianeta Urano aveva una declinazione quasi eguale a quella della stella fondamentale α Piscium e passava al meridiano pochi minuti dopo. Si scelse dunque questa eccellente occasione per misurare le posizioni di Urano, paragonandole micrometricamente con quelle della α Piscium, date dal « Berliner Jahrbuch ».

Le osservazioni furono affidate alla dott. G. Conti, la quale si servì di uno strumento dei passaggi di Bamberg, munito di ottimo micrometro e di livelli talcottiani i quali venivano utilizzati per controllare la stabilità della puntata in declinazione, tra il passaggio della stella e quello del pianeta.

I risultati sono esposti nella seguente

TABELLA.

Data	α	δ	Data	α	δ
1928	0^h	0°	1928	0^h	0°
XI-12	—	50' 56'',1	XI-28	14 ^m 12 ^s ,88	44' 36'',1
13	—	24 ,5	29	10 ,47	—
14	15 ^m 7 ^s ,22	49 52 ,6	30	8 ,31	44 11 ,7
15	2 ,25	26 ,0	XII- 1	5 ,68	43 58 ,7
17	14 53 ,07	48 27 ,9	4	14 0 ,18	—
19	44 ,17	47 38 ,5	5	13 58 ,55	21 ,1
20	40 ,14	11 ,5	6	57 ,23	12 ,8
21	36 ,03	46 49 ,6	14	53 ,31	9 ,5
23	28 ,52	45 59 ,9	17	56 ,90	26 ,5
26	19 ,12	9 ,9	19	—	45 ,2

Paragonando anche ora i risultati delle osservazioni con le posizioni teoriche di Newcomb, abbiamo per le differenze $O - C : \Delta\alpha = 0^s.10$;

(1) Cfr. A. GENNARO e M. CAMPA, Osservazioni del pianeta Nettuno, in « Mem. Soc. Astr. Italiana », vol. V, n. 2.

$\Delta\delta = 1''.7$. E, d'altra parte, in un nostro precedente lavoro⁽¹⁾, in cui esaminammo le posizioni del pianeta Urano nel novembre e dicembre 1924, avevamo trovato: $\Delta\alpha = 0''.07$; $\Delta\delta = 0''.4$.

Semberebbe dunque di poter ritenere che in questi ultimi anni si siano attenuate le differenze in ascensione, mentre siano aumentate quelle in declinazione. Ma naturalmente occorreranno ancora molti anni di osservazioni prima di poter procedere ad un miglioramento degli elementi orbitali di Urano e ad un calcolo più esatto delle sue perturbazioni secolari.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla superficie d'onda di Fresnel.* Nota di T. BOGGIO, presentata⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un volumetto recentissimo⁽³⁾, e molto suggestivo, il prof. Levi-Civita si è occupato, fra altro, della determinazione della superficie d'onda di Fresnel mediante le varietà caratteristiche del sistema di equazioni differenziali di Maxwell del campo elettromagnetico, nella ipotesi che il mezzo sia magneticamente isotropo, e precisamente che la permeabilità magnetica μ sia una costante numerica, mentre il dielettrico può essere arbitrario; e quindi è caratterizzato da una omografia vettoriale ε , che però si suppone essere una dilatazione costante.

Nella presente Nota faccio vedere come si possa arrivare più rapidamente all'equazione alle derivate parziali che definisce la superficie d'onda, e poi come partendo dalle equazioni parametriche della superficie stessa, stabilite dal prof. Levi-Civita, si possa arrivare facilmente all'equazione puntuale di questa superficie.

Mi servo del metodo vettoriale, che è specialmente indicato in questioni di questo genere.

1. Se si indicano con \mathbf{e} , \mathbf{h} i vettori caratteristici delle discontinuità delle derivate (rispetto al tempo t , e al punto mobile Q) dei vettori delle forze elettrica e magnetica, si trova che essi devono soddisfare alle equazioni (L.-C., p. 77):

$$(1) \quad p_0 \varepsilon \mathbf{e} - c \mathbf{p} \wedge \mathbf{h} = 0 \quad , \quad p_0 \mu \mathbf{h} + c \mathbf{p} \wedge \mathbf{e} = 0 ,$$

(1) G. CONTI e G. ARMELLINI, *Osservazioni di posizione del pianeta Urano in occasione della sua congiunzione con la 96 Aquari*, in «Rend. Lincei», 1925, 1° sem., p. 353.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(3) T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa* (Zanichelli, Bologna, 1931). Nel seguito indicheremo quest'opera coll'abbreviazione (L.-C.).

c essendo la velocità della luce, e inoltre:

$$(2) \quad p_0 = \partial \chi / \partial t, \quad \mathbf{p} = \text{grad}_Q \chi,$$

ove $\chi(t, Q)$ è una funzione di t e Q che eguagliata ad una costante determina le varietà caratteristiche [superficie d'onda del cronotopo (t, Q)] del sistema di equazioni di Maxwell.

Cerchiamo intanto l'equazione differenziale di queste varietà caratteristiche; occorre eliminare \mathbf{h} fra le (1), e per questo basta ricavare \mathbf{h} dalla seconda e sostituire nella prima e si ha senz'altro:

$$p_0^2 \mu_1 \varepsilon \mathbf{e} + \mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \wedge \mathbf{e}) = 0, \quad (\mu_1 = \mu/c^2),$$

od anche, per il teorema del doppio prodotto vettoriale:

$$(p_0^2 \mu_1 \varepsilon - p^2) \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0,$$

ora, nel caso generale, l'omografia $p_0^2 \mu_1 \varepsilon - p^2$ è invertibile, perciò ne segue:

$$\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{p} \cdot (p_0^2 \mu_1 \varepsilon - p^2)^{-1} \mathbf{p} = 0,$$

da cui, moltiplicando scalarmente per \mathbf{p} e dividendo per $\mathbf{e} \times \mathbf{p}$:

$$(3) \quad 1 + \mathbf{p} \times (p_0^2 \mu_1 \varepsilon - p^2)^{-1} \mathbf{p} = 0,$$

la quale, tenuto conto delle (2), è la cercata equazione differenziale, nella funzione incognita χ , che definisce la superficie d'onda.

Facciamo figurare, nella (3), la velocità di propagazione V (in senso normale) di un generico elemento della superficie d'onda; basta sostituire a p_0 il prodotto $\pm V \bmod \mathbf{p}$ (L.-C., p. 81) e allora la (3) diviene:

$$p^2 + \mathbf{p} \times (V^2 \mu_1 \varepsilon - 1)^{-1} \mathbf{p} = 0,$$

cioè:

$$\mathbf{p} \times [1 + (V^2 \mu_1 \varepsilon - 1)^{-1}] \mathbf{p} = 0;$$

ora, se λ è un'omografia qualunque (invertibile) si ha ovviamente:

$$1 + (\lambda - 1)^{-1} = (\lambda - 1)^{-1} \lambda = (1 - \lambda^{-1})^{-1},$$

quindi la precedente porge:

$$\mathbf{p} \times [1 - (V^2 \mu_1 \varepsilon)^{-1}] \mathbf{p} = 0,$$

od ancora [L.-C., p. 83, form. (22)],

$$(4) \quad \mathbf{p} \times (\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p} = 0,$$

ove si è indicata, per brevità, con α la dilatazione $\alpha = (\mu_1 \varepsilon)^{-1}$.

La (4), rispetto a V^2 , è un'equazione di 2° grado, le cui radici sono positive (L.-C., p. 84).

2. Passiamo ora alla determinazione dell'equazione puntuale della superficie d'onda di Fresnel.

Se nell'istante $t = 0$ essa si riduce ad una superficie infinitesima intorno ad un punto prefissato O (epicentro), e si considera il punto

$$(5) \quad M = O + \mathbf{p},$$

allora l'equazione di tale superficie (che è quella relativa all'istante $t = 1$) può scriversi:

$$Q - O = -\text{grad}_M p_0,$$

la quale equivale alle equazioni parametriche stabilite dal prof. Levi-Civita [L.-C., p. 88, form. (29)]; si può assumere, come già si è visto:

$$p_0 = -Vg, \quad \text{con} \quad g = \text{mod } \mathbf{p} = OM,$$

e allora la precedente diviene:

$$Q - O = V \text{grad}_M g + g \cdot \text{grad}_M V,$$

e siccome g è la distanza OM , il suo gradiente è notoriamente un vettore unitario diretto da O ad M , perciò vale \mathbf{p}/g , quindi:

$$(6) \quad Q - O = V\mathbf{p}/g + g \cdot \text{grad}_M V.$$

Da questa equazione ove figura, oltre il parametro \mathbf{p} (vettore), lo scalare V legato a \mathbf{p} dalla equazione (4), eliminando \mathbf{p} e V si perviene all'equazione puntuale della superficie d'onda.

Per fare questa eliminazione occorre in primo luogo trovare la relazione che lega i vettori \mathbf{p} e $\text{grad}_M V$; differenziando la (4) si ha:

$$d\mathbf{p} \times (\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \times (\alpha - V^2)^{-2} \mathbf{p} \cdot V dV + \mathbf{p} \times (\alpha - V^2)^{-1} d\mathbf{p} = 0,$$

ma essendo $(\alpha - V^2)^{-1}$, al pari di α , una dilatazione, l'ultimo termine è eguale al primo, inoltre $\mathbf{p} \times (\alpha - V^2)^{-2} \mathbf{p} = [(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}]^2$; siccome poi, per la (5): $d\mathbf{p} = dM$, e per definizione di gradiente: $dV = \text{grad}_M V \times dM$, la precedente può scriversi:

$$dM \times \{ (\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p} + V [(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}]^2 \text{grad}_M V \} = 0,$$

e per l'arbitrarietà di dM deve essere nullo il vettore entro le $\{ \dots \}$, quindi

$$(7) \quad \text{grad}_M V = - \frac{(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}}{V [(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}]^2} \quad (1),$$

che è la relazione cercata.

(1) Dalle (7), (4) risulta $\mathbf{p} \times \text{grad}_M V = 0$, che si può pure dedurre dal teorema di Eulero, perchè la V è funzione omogenea, di grado zero, di \mathbf{p} ; la (6) porge poi $(Q - O) \times \mathbf{p} = V$, perciò V rappresenta la distanza del punto O dal piano tangente in Q alla superficie d'onda.

Sostituendo nella (6) risulta:

$$(8) \quad Q - O = \frac{V\mathbf{p}}{g} - \frac{g}{V} \frac{(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}}{[(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}]^2};$$

elevando a quadrato e tenendo presente la (4) si ha:

$$(Q - O)^2 = V^2 + \frac{g^2}{V^2} \frac{1}{[(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p}]^2}$$

e sostituendo nella (8):

$$Q - O = \frac{V\mathbf{p}}{g} - \frac{V}{g} [(Q - O)^2 - V^2] (\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p},$$

od ancora, ponendo $r = OQ$:

$$(9) \quad \begin{aligned} Q - O &= \{1 - (r^2 - V^2)(\alpha - V^2)^{-1}\} \mathbf{p} \cdot V/g, \\ Q - O &= (\alpha - r^2)(\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p} \cdot V/g. \end{aligned}$$

Siamo ormai ridotti ad eliminare \mathbf{p} da questa equazione; ciò si fa immediatamente, perchè da essa risulta:

$$(\alpha - r^2)^{-1} (Q - O) = (\alpha - V^2)^{-1} \mathbf{p} \cdot V/g,$$

e moltiplicandola scalarmente, membro a membro, per la (8), e badando alla (4), si ha senz'altro:

$$(10) \quad (Q - O) \times (\alpha - r^2)^{-1} (Q - O) = -1,$$

che è l'equazione puntuale della superficie d'onda.

Ad essa si possono dare altre forme; così ad es. moltiplicandola per r^2 si ha:

$$(Q - O) \times r^2 (\alpha - r^2)^{-1} (Q - O) + (Q - O)^2 = 0,$$

che si riduce subito a:

$$(10') \quad (Q - O) \times \alpha (\alpha - r^2)^{-1} (Q - O) = 0,$$

la quale equivale all'equazione (43) di (L.-C., p. 93).

Siccome l'omografia $(\alpha - r^2)^{-1}$ differisce dall'omografia $R(\alpha - r^2)$ solo per un fattore numerico, si può scrivere:

$$(Q - O) \times \alpha R(\alpha - r^2) (Q - O) = 0,$$

ma $R(\alpha - r^2) = R\alpha + (\alpha - I_1 \alpha) r^2 + r^4$, perciò si deduce facilmente:

$$(Q - O) \times \alpha (\alpha - I_1 \alpha + r^2) (Q - O) + I_1 \alpha = 0,$$

da cui apparisce che la superficie d'onda è di 4° ordine.

3. Un'importante e nota proprietà della superficie d'onda si può stabilire molto facilmente ricorrendo alla (10'). Essa è la seguente: se si considera l'ellissoide di centro O, definito dall'equazione:

$$(11) \quad (P - O) \times \alpha^{-1}(P - O) = 1,$$

e sulle normali ai piani per O si portano, a partire da O, dei segmenti eguali ai semiassi delle ellissi sezioni di tali piani coll'ellissoide, gli estremi di tali segmenti stanno sulla superficie d'onda.

Per questa ragione si dice che la superficie d'onda (10') è la *superficie apsidale* dell'ellissoide (11) rispetto al punto O.

Consideriamo infatti un raggio qualunque Oq uscente da O, e l'ellisse sezione del piano σ normale ad esso, e passante per O, coll'ellissoide (11), e sia P uno dei vertici (o apsi) di tale ellisse; è chiaro che la tangente in P all'ellisse (appartenendo al piano σ) forma angolo retto con Oq , ed è inoltre normale ad OP, perciò la normale in P all'ellissoide deve giacere sul piano POq .

Ora, com'è notissimo, il vettore

$$(12) \quad p = \alpha^{-1}(P - O)$$

è normale in P all'ellissoide (11), perciò il vettore

$$(13) \quad p_1 = (P - O) \wedge p$$

è diretto secondo la tangente all'ellisse nel vertice P, e quindi un punto qualunque Q preso su Oq si può rappresentare colla formula:

$$(14) \quad Q - O = m p_1 \wedge (P - O),$$

ove m è un numero reale. Per quanto abbiamo detto, bisogna scegliere m in modo che $OQ = OP = r$.

Sostituendo poi nella (14) a p_1 il suo valore (13), e sviluppando, si ha:

$$Q - O = m [(P - O)^2 \cdot p - (P - O) \times p \cdot (P - O)],$$

ma dalle (11), (12) segue $(P - O) \times p = 1$, quindi:

$$Q - O = m [r^2 \alpha^{-1}(P - O) - (P - O)] = m (r^2 \alpha^{-1} - 1)(P - O),$$

da cui:

$$(r^2 \alpha^{-1} - 1)^{-1} (Q - O) = m (P - O),$$

moltiplicandola scalarmente, membro a membro, per la (14) si ha senz'altro:

$$(15) \quad (Q - O) \times (r^2 \alpha^{-1} - 1)^{-1} (Q - O) = 0,$$

ossia :

$$(Q - O) \times \alpha (\alpha - r^2)^{-1} (Q - O) = 0,$$

che coincide colla (10').

Aggiungiamo ancora l'osservazione seguente. Se si considera l'ellissoide:

$$(16) \quad (P - O) \times \alpha (P - O) = 1$$

(che è polare reciproco dell'ellissoide (11) rispetto alla sfera di centro O e raggio 1) e se ne cerca la superficie apsidale, essa è data dalla (15), ove si muti α^{-1} in α , perciò è espressa da:

$$(Q - O) \times (r^2 \alpha - 1)^{-1} (Q - O) = 0,$$

od anche:

$$(Q - O) \times (\alpha - r^{-2})^{-1} (Q - O) = 0,$$

(che è polare reciproca della (15) rispetto alla sfera di centro O e raggio 1) la quale coincide colla (4) se si prende $V = 1/r$; perciò vediamo che le velocità di propagazione corrispondenti ad una direzione $Q - O$ uscente da O sono i valori inversi dei semiassi della ellisse intersezione dell'ellissoide (16) col piano passante per O e normale alla direzione considerata.

Ritroviamo così una proprietà stabilita, in altro modo, dal prof. Levi-Civita (L.-C., p. 87).

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali di Levi-Civita nel problema dei getti liquidi.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. AMALDI.

1. In una Memoria recente ⁽²⁾, il prof. Levi-Civita ha trattato analiticamente il problema dei getti liquidi nel caso in cui questi siano di spessore piccolissimo rispetto alla lunghezza (assimilabili quindi a linee materiali) e la pressione interna (nelle vicinanze dell'orifizio) resti sensibilmente superiore alla pressione atmosferica. I notevolissimi risultati che egli ha ottenuti hanno trovato buona conferma sperimentale.

La questione è ricondotta dal punto di vista analitico ad un sistema di sei equazioni alle derivate parziali in sei funzioni incognite di due variabili indipendenti.

In questa Nota mi propongo di giustificare in modo preciso l'applicazione del teorema generale di esistenza ed unicità a detto sistema; farò poi vedere su un esempio elementare che questo teorema non è esatto se, ad

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) *Sui getti liquidi*, «Rendiconti del Seminario Mat. e Fis. di Milano», vol. V, 1931.

esempio, si considera una sola equazione e si suppone che l'ordine della derivata (fatta rispetto ad una sola variabile indipendente) che compare al primo membro possa essere raggiunto al secondo membro rispetto a quella variabile e complessivamente superato rispetto ad un gruppo di più variabili indipendenti.

Ciò era già stato rilevato dalla Kowalevsky nel caso dell'equazione del calore e, come è noto, si perviene alla conclusione che, se esiste un integrale olomorfo soddisfacente alle condizioni di Cauchy, esso è unico; nell'esempio qui considerato si vede che esistono infiniti integrali olomorfi e non olomorfi soddisfacenti alle stesse condizioni del tipo di Cauchy.

2. Sia D una curva qualunque, uscente da un punto G_0 . Associando ad ogni punto G di D un'area piccolissima τ di cui G sia il baricentro e normale a D , il luogo di τ al variare di G ha la forma tubolare che conviene ad un getto liquido. Poichè la configurazione del getto è, in generale, variabile nel tempo, l'area τ è funzione di s , ascissa curvilinea di G a partire da G_0 nel verso del moto delle particelle fluide, e del tempo t . Assumiamo la porzione del getto compresa tra le ascisse s ed $s + ds$ ad un punto materiale localizzato nel punto G di ascissa s e sia w la sua velocità scalare; sia inoltre \bar{p} la media lungo la generica sezione τ della differenza p tra la pressione che regna in seno al liquido e la pressione atmosferica.

Nell'ipotesi che \bar{p} sia > 0 ed eguale al valore di p in G e che lo stesso comportamento abbia luogo per la $\frac{\partial p}{\partial s}$, le equazioni differenziali che reggono il problema sono

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \\ \ddot{G} = \mathbf{F} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial (\bar{p} \mathbf{t})}{\partial s} \\ \mathbf{t} \times \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

In queste equazioni μ è la densità del fluido, \mathbf{F} è la forza totale esterna (unitaria) agente sul getto, \mathbf{t} è il versore tangenziale a D nel punto G ; \ddot{G} è la derivata seconda sostanziale di G . Dette x, y, z le coordinate di G , l'equazione (3) del sistema (S) dà luogo a tre equazioni scalari del 2° ordine. Complessivamente le funzioni incognite sono sei: $\tau, w, \bar{p}, x, y, z$.

Poichè si ha:

$$\ddot{G} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial s} + 2w \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} + w^2 \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + w \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial s},$$

la (3) si può scrivere, effettuando la derivazione parziale rispetto ad s , di $\bar{p}t$

$$\left(w^2 + \frac{\bar{p}}{\mu}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial s} = \mathbf{K},$$

dove \mathbf{K} designa l'espressione vettoriale

$$(3') \quad \mathbf{K} = \mathbf{F} - \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) \frac{\partial G}{\partial s} - 2w \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}.$$

Abbiamo posto per $\frac{\partial w}{\partial s}$ la sua espressione ricavata dall'equazione (2) (di continuità). Dalla (3'), moltiplicando scalarmente per $\mathbf{t} = \frac{\partial G}{\partial s}$ e tenendo conto di (4), si ha

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} = \mathbf{K} \times \mathbf{t}.$$

In definitiva, se si osserva che

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t} \times \mathbf{t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial s} \times \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial s}\right)^2 = 0,$$

il sistema differenziale è

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \\ \tau \frac{\partial w}{\partial s} = - \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial s} = \mathbf{K} \times \mathbf{t} \\ \left(w^2 + \frac{\bar{p}}{\mu}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \mathbf{K} - \left(\mathbf{F} \times \mathbf{t} + \frac{w}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \times \mathbf{t}\right) \mathbf{t}. \end{array} \right.$$

I coefficienti delle derivate $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial \bar{p}}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial s^2}$ nella seconda, terza e quarta equazione di (S') sono essenzialmente positivi e nei primi membri delle equazioni (S') compariscono la derivata prima di τ , w , \bar{p} rispetto ad s e le derivate seconde di x , y , z rispetto alla stessa variabile s .

Il sistema (S') è normale poichè nei secondi membri si presentano al più derivate di 1° ordine rispetto a t (di ordine zero rispetto ad s) nei riguardi delle τ , w , \bar{p} e di 2° ordine rispetto a t (di 1° ordine rispetto ad s) nei riguardi di x , y , z , e non compariscono di queste funzioni derivate di ordine superiore al secondo. Dunque, esiste ed è unica una sestupla di funzioni olomorfe τ , w , \bar{p} , x , y , z delle variabili s , t , soddisfacenti il sistema, tali

che, per $s = 0$, le τ , w , \bar{p} e le x , y , z insieme con la derivata prima rispetto ad s , si riducano a funzioni olomorfe di t , arbitrariamente assegnate.

3. Ricordiamo le condizioni affinché il sistema di equazioni analitiche

$$\frac{\partial^{r_v} \varphi_v}{\partial t^{r_v}} = \Phi_v(t, x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_m; \dots),$$

$$(v = 1, 2, \dots, m)$$

nelle m funzioni incognite $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ delle $n + 1$ variabili indipendenti sia normale rispetto alla variabile t che chiameremo principale.

I secondi membri 1) non debbono contenere derivate di cui l'ordine rispetto a t sia maggiore di $r_v - 1$ per ogni φ_v , 2) non debbono contenere derivate di ordine totale maggiore di r_v per ogni φ_v . Per tali sistemi (detti da qualche Autore sistemi di Kowalevsky) esiste una soluzione regolare unica $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ la quale è tale che le quantità

$$\varphi_v, \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{r_v-1} \varphi_v}{\partial t^{r_v-1}} \quad (v = 1, 2, \dots, m)$$

si identifichino, per un prefissato valore t_0 di t , con altrettante funzioni arbitrariamente assegnate, regolari nell'intorno di un punto $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ a condizione che i secondi membri Φ_v siano anch'essi regolari in corrispondenza ai valori iniziali dei loro argomenti.

Per dimostrare questo teorema si fa vedere che, in base alle equazioni ed ai dati, si possono calcolare tutte le derivate delle φ_v nel punto $\mathcal{S}_0(t_0, P_0)$ e si dimostra poi che i corrispondenti sviluppi tayloriani convergono in un intorno di \mathcal{S}_0 .

Se si lascia cadere la condizione 2), tenendo ferma la 1), la Kowalevsky ha fatto vedere che il teorema non è esatto.

Più precisamente, considerando l'equazione del calore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

ed assumendo la t come variabile principale, se si assegna il valore $\varphi_0(x)$ di $\varphi(t, x)$ per $t = 0$, essendo $\varphi_0(x)$ olomorfa nel punto $x = 0$, non sempre esiste una soluzione $\varphi(t, x)$ olomorfa nel punto $t = 0$, $x = 0$ e tale che $\varphi(0, x) = \varphi_0(x)$.

Daremo qui un esempio di un'equazione per la quale nessuna delle condizioni (1) e (2) è soddisfatta e la convergenza della serie formale dipende dalla scelta di una funzione arbitraria $\psi(t)$ (della variabile principale t). Se questa è olomorfa in $t = 0$, qualunque sia la funzione $\varphi_0(x)$, olomorfa in $x = 0$, esiste una soluzione $\varphi(t, x)$ olomorfa in $t = 0$, $x = 0$. Esistono quindi in tal caso infinite soluzioni per il problema di Cauchy relativo all'equazione considerata.

L'equazione cui alludo è

$$(E) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}.$$

Si ha

$$\left(\frac{\partial^v \varphi}{\partial t^v} \right)_{t=0} = \left(\frac{\partial^{v+1} \varphi}{\partial t^v \partial x} \right)_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^v \varphi}{\partial t^v} \right)_{t=0},$$

da cui

$$\left(\frac{\partial^v \varphi}{\partial t^v} \right)_{t=0} = c_v e^x, \quad (v = 1, 2, \dots)$$

essendo le c_v infinite costanti arbitrarie.

Lo sviluppo tayloriano di $\varphi(t, x)$ nel punto $t = 0$ è

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(x) + e^x \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v}{v!} t^v.$$

Secondo che la serie $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_v}{v!} t^v$ è convergente o no, tale è lo sviluppo di $\varphi(t, x)$ nel punto $t = 0, x = 0$; soddisfatta la condizione di convergenza, la $\varphi_0(x)$ non deve soddisfare ad alcuna condizione speciale, all'infuori, s'intende, della regolarità nel punto $x = 0$.

La (E) può integrarsi direttamente osservando che

$$\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A(x),$$

essendo A una funzione arbitraria (integrabile). Integrando questa equazione (lineare) in φ , si ha

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(x) + e^x \psi(t),$$

avendo posto

$$\varphi_0(x) = e^x \int e^{-x} A(x) dx;$$

$\psi(t)$ è una nuova funzione arbitraria.

L'espressione ora ottenuta per le soluzioni $\varphi(t, x)$ della (E) è più generale di quella ottenuta precedentemente, poichè basta supporre per $\varphi_0(x)$ e $\psi(t)$ soltanto l'esistenza della derivata prima.

Matematica (Analisi). — *Sulle funzioni omogenee.* Nota di G. GALLINA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. L. BERZOLARI.

1. In una Nota, pubblicata su questi Rendiconti⁽²⁾, il sig. A. Del Chiaro ha osservato che la dimostrazione esposta in diversi trattati di Calcolo per invertire il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, basata sulla affermazione che dall'essere nulla la derivata rispetto a t di

$$\frac{f(tx_1, \dots, tx_r)}{t^n}$$

segua la costanza del rapporto stesso, non è esatta se la frazione è discontinua per $t = 0$ ⁽³⁾; ha mostrato poi, con un esempio, che una funzione può soddisfare all'equazione di Eulero senza essere omogenea; e infine ha dato, per il caso di n intero positivo, condizioni sufficienti affinché una funzione, soddisfacente all'equazione di Eulero, sia omogenea di grado n .

Ora, nel caso di n reale qualsiasi, può convenire esaminare direttamente gli integrali dell'equazione di Eulero

$$p_1 x_1 + \dots + p_r x_r - n f = 0,$$

la cui espressione generale è data dalla relazione

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_r) = \rho^n \varphi\left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho}\right)$$

nella quale φ è una funzione arbitraria dei propri argomenti, e

$$\rho = + \sqrt{x_1^2 + \dots + x_r^2}.$$

Poichè in qualsiasi punto (x_1, \dots, x_r) dell' S_r nel quale l'espressione

$$(2) \quad \rho^n \varphi\left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho}\right)$$

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(2) *Sulle funzioni omogenee*, «Rend. della R. Accad. dei Lincei», serie 6ª, vol. XIII, p. 475 (1931).

(3) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, vol. I, Nota a p. 37 (Gauthier-Villars, Paris, 1927).

è reale, qualunque sia il valore positivo di t , si ha

$$\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}^n \varphi \left(\frac{tx_1}{\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}}, \dots, \frac{tx_r}{\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}} \right) = \\ = t^n \rho^n \varphi \left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho} \right),$$

cioè la (2) soddisfa alla identità

$$(3) \quad f(tx_1, \dots, tx_r) = t^n f(x_1, \dots, x_r),$$

la (1) mostra intanto che ogni integrale dell'equazione di Eulero è sempre, in tutto il suo campo di esistenza, almeno una funzione omogenea positiva.

Affinchè poi la (2) possa soddisfare alla (3) anche per valori negativi di t , è necessario che, per tali valori, t^n risulti reale, cosa la quale, essendo

$$(-t)^n = t^n e^{(2k+1)n\pi i}$$

con k intero arbitrario, non può avverarsi altro che se

$$n = \frac{2h}{2k+1} \quad \text{oppure} \quad n = \frac{2h+1}{2k+1}$$

con h intero arbitrario, cioè: il numero n deve necessariamente essere eguale ad una frazione irriducibile avente per denominatore un numero dispari.

Siccome poi, per t negativo, si ha

$$\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}^n \varphi \left(\frac{tx_1}{\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}}, \dots, \frac{tx_r}{\sqrt{(tx_1)^2 + \dots + (tx_r)^2}} \right) = \\ = (-t)^n \rho^n \varphi \left(-\frac{x_1}{\rho}, \dots, -\frac{x_r}{\rho} \right)$$

affinchè sussista la (3), ossia affinchè si abbia

$$(-t)^n \rho^n \varphi \left(-\frac{x_1}{\rho}, \dots, -\frac{x_r}{\rho} \right) = t^n \rho^n \varphi \left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho} \right),$$

è ancora necessario che sia rispettivamente

$$\varphi \left(-\frac{x_1}{\rho}, \dots, -\frac{x_r}{\rho} \right) = \varphi \left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho} \right)$$

oppure

$$\varphi \left(-\frac{x_1}{\rho}, \dots, -\frac{x_r}{\rho} \right) = -\varphi \left(\frac{x_1}{\rho}, \dots, \frac{x_r}{\rho} \right)$$

secondochè

$$n = \frac{2h}{2k+1} \quad \text{oppure} \quad n = \frac{2h+1}{2k+1},$$

cioè: la (2) deve necessariamente essere una funzione pari oppure dispari secondochè il numeratore della frazione irriducibile che esprime n è pari oppure dispari.

Inversamente, si vede facilmente che le condizioni, ora dimostrate necessarie, sono anche sufficienti affinchè la (2) soddisfi alla (3) per valori negativi di t : esse sono dunque condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'integrale (2) sia una funzione omogenea di grado n in tutto il suo campo di esistenza, esclusa al più l'origine.

Quando il campo di esistenza della (2) comprende anche l'origine, cioè quando l'espressione (2) conserva significato per valori tutti nulli delle variabili, e si voglia che essa sia omogenea in tutto il suo campo di esistenza, è ancora necessario imporre la condizione che la (3) sussista anche per $t = 0$, cosa la quale esige che n sia positivo, affinchè t^n abbia senso per $t = 0$, e che la funzione sia nulla nell'origine, come si deduce dalla (3) per $t = 0$. E, come prima, queste ulteriori condizioni sono ad un tempo necessarie e sufficienti.

Riassumendo, si può enunciare la proposizione seguente che inverte il teorema di Eulero:

ogni integrale dell'equazione di Eulero è sempre, in tutto il suo campo di esistenza, almeno una funzione omogenea positiva, la quale è anche omogenea quando e solo quando il grado n di omogeneità è espresso da una frazione irriducibile avente per denominatore un numero dispari, ed essa è funzione pari oppure dispari secondochè il numeratore di quella frazione è pari o dispari, e per di più, se l'origine appartiene al suo campo, essa è ivi nulla ed n è positivo.

2. A proposito delle funzioni omogenee — supponendo che il campo Γ di esistenza di una funzione $f(x_1, \dots, x_r)$ comprenda tutti i punti dell' S_r a distanza finita, meno l'origine, e ricordando che in tale ipotesi, per definizione, la $f(x_1, \dots, x_r)$ si dice omogenea di grado n quando, in tutti i punti (x_1, \dots, x_r) di Γ , soddisfa identicamente alla (3) per qualsiasi valore di t diverso da zero — è agevole dimostrare le seguenti proprietà, le ultime tre delle quali mettono in rilievo come il comportamento di una funzione omogenea in tutto Γ sia completamente determinato dal suo comportamento nei punti di un insieme I ottenuto prendendo ad arbitrio su ogni retta dell' S_r uscente dall'origine un punto distinto dall'origine.

a) Se una funzione $f(x_1, \dots, x_r)$ è omogenea di grado n , essa è in ogni punto di Γ continua e derivabile secondo la retta che unisce quel punto con l'origine.

Infatti, dalla (3) si ricava

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(tx_1, \dots, tx_r) = f(x_1, \dots, x_r)$$

la quale conferma la continuità della funzione nel punto (x_1, \dots, x_r) secondo la retta s che lo unisce con l'origine.

Tenendo ancora presente la (3) si ottiene poi

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(tx_1, \dots, tx_r) - f(x_1, \dots, x_r)}{(t-1)\rho} = \\ & = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^n - 1)f(x_1, \dots, x_r)}{(t-1)\rho} = \frac{n}{\rho} f(x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

la quale attesta la derivabilità della $f(x_1, \dots, x_r)$ secondo la retta s , e mostra che è

$$(4) \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial s} = \frac{n}{\rho} f(x_1, \dots, x_r).$$

b) Se una funzione $f(x_1, \dots, x_r)$, per qualsiasi valore di t diverso da zero, soddisfa alla (3) nei punti dell'insieme I , essa è omogenea di grado n .

Poichè la $f(x_1, \dots, x_r)$ per ipotesi soddisfa alla (3) finchè il punto (x_1, \dots, x_r) appartiene all'insieme I , per concludere che essa è omogenea basterà provare che essa soddisfa alla (3) anche nei punti di Γ non appartenenti all'insieme I .

Sia perciò (kx_1, \dots, kx_r) uno qualsiasi di questi punti, e sia (x_1, \dots, x_r) il punto dell'insieme I che sta sulla retta che unisce il primo punto con l'origine, per modo che sarà

$$f(kx_1, \dots, kx_r) = k^n f(x_1, \dots, x_r).$$

Ma, scrivendo nella (3) kt al posto di t , si ottiene

$$f(tkx_1, \dots, tkx_r) = t^n k^n f(x_1, \dots, x_r)$$

che, per la precedente, diventa:

$$f(tkx_1, \dots, tkx_r) = t^n f(kx_1, \dots, kx_r)$$

la quale mostra appunto l'asserto.

c) Se una funzione $f(x_1, \dots, x_r)$ omogenea di grado n ammette la derivata parziale rispetto ad una delle variabili in tutti i punti dell'insieme I , essa ammette la derivata parziale rispetto a quella variabile in tutti i punti di Γ , e questa derivata è a sua volta una funzione omogenea di grado $n-1$.

Infatti, se (tx_1, \dots, tx_r) è un punto generico di Γ , non appartenente all'insieme I , e (x_1, \dots, x_r) è il punto dell'insieme I che sta sulla retta che unisce il primo punto con l'origine, tenendo conto che per ipotesi, ad esempio, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_r) - f(x_1, x_2, \dots, x_r)}{h} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial x_1}$$

e del fatto che t è generico, ma fisso, risulta

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(tx_1 + th, tx_2, \dots, tx_r) - f(tx_1, tx_2, \dots, tx_r)}{th} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} t^{n-1} \frac{f(x_1 + h, x_2, \dots, x_r) - f(x_1, x_2, \dots, x_r)}{h} = \\ &= t^{n-1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial x_1} \end{aligned}$$

ossia

$$(5) \quad \frac{\partial f(tx_1, tx_2, \dots, tx_r)}{\partial tx_1} = t^{n-1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial x_1}$$

la quale, in virtù del teorema b), dimostra altresì che la derivata è una funzione omogenea di grado $n-1$.

d) Se una funzione $f(x_1, \dots, x_r)$ omogenea di grado n è differenziabile in tutti i punti dell'insieme I , essa è differenziabile in tutti i punti di Γ e in ognuno di essi soddisfa all'equazione di Eulero.

Infatti, se (tx_1, \dots, tx_r) è un generico punto di Γ non appartenente all'insieme I , e (x_1, \dots, x_r) è il punto dell'insieme I che sta sulla retta che unisce il primo punto con l'origine, tenendo conto che per ipotesi si ha

$$f(x_1 + h_1, \dots, x_r + h_r) - f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_i} h_i + \varepsilon \sigma,$$

dove

$$\sigma = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_r^2}$$

ed ε è infinitesimo con σ , e del fatto che, per il teorema c), le derivate parziali della funzione esistono in tutto Γ e soddisfano alla (5) e alle relazioni che da essa si ottengono cambiando l'indice 1 nei rimanenti, risulta

$$\begin{aligned} & f(tx_1 + th_1, \dots, tx_r + th_r) - f(tx_1, \dots, tx_r) = \\ &= t^n [f(x_1 + h_1, \dots, x_r + h_r) - f(x_1, \dots, x_r)] = \\ &= t^n \left[\sum_{i=1}^r \frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_i} h_i + \varepsilon \sigma \right] = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f(tx_1, \dots, tx_r)}{\partial tx_i} th_i + \varepsilon \sigma t^n \end{aligned}$$

la quale prova la prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte basta ricordare che, essendo la $f(x_1, \dots, x_r)$ differenziabile, la sua derivata nel punto (x_1, \dots, x_r) - che

ora va inteso non solo appartenente all'insieme I, ma generico in Γ - secondo la retta s che lo unisce con l'origine è data da

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial s} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{\rho}$$

e osservare che, dal confronto di questa con la (4), segue appunto l'equazione di Eulero

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial f(x_1, \dots, x_r)}{\partial x_i} x_i = n f(x_1, \dots, x_r).$$

Matematica (Geometria). — *Sulle congruenze di Ribaucour deformabili*. Nota di M. CRENNÀ, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. FUBINI.

Riferendomi alla Memoria del Bianchi: *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili* ⁽²⁾ che suppongo nota al lettore e della quale adotterò le notazioni ⁽³⁾, deduco dalle formole generali del Bianchi, relative a una qualsiasi congruenza di sfere, le espressioni di $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}; \Delta, \Delta', \Delta''$, relative a una congruenza di Ribaucour deformabile, dalle quali risulta che la differenza degli elementi lineari e delle seconde forme, relativi alle due falde dell'inviluppo, è data rispettivamente da ⁽⁴⁾:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (\bar{E} - \bar{E}_1) du^2 + 2(\bar{F} - \bar{F}_1) du dv + (\bar{G} - \bar{G}_1) dv^2 = \\ & = \frac{2R\sqrt{1 - \Delta_1 R}}{\varphi} (\varphi - R) [D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (\Delta - \Delta_1) du^2 + 2(\Delta' - \Delta'_1) du dv + (\Delta'' - \Delta''_1) dv^2 = \\ & = \frac{\sqrt{1 - \Delta_1 R}}{\varphi} (\varphi - 2R) [D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2] \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

(2) In «Memorie della R. Accademia dei Lincei», serie 5^a, vol. XII, fasc. X (1918). Per i frequenti richiami a questa Memoria essa verrà indicata, costantemente, in seguito con: M. c.

(3) Richiamo qui il significato di alcune notazioni di cui debbo fare uso: indicherò con $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}; \Delta, \Delta', \Delta''; e, f, g$; rispettivamente i coefficienti della prima, seconda e terza forma fondamentale delle due falde dell'inviluppo di una congruenza di sfere (di Ribaucour deformabile) con $E, F, G; D, D', D''$ i coefficienti delle prime due forme fondamentali della superficie dei centri.

(4) Con l'indice 1 si distinguono gli elementi di una falda.

dove con φ si è indicato il valore comune dei rapporti

$$(3) \quad \frac{E_o}{R_{11}} = \frac{F_o}{R_{12}} = \frac{G_o}{R_{22}} = \varphi$$

che caratterizzano le congruenze di Ribaucour deformabili ⁽¹⁾.

Dalla (1) segue immediatamente che in una congruenza di Ribaucour deformabile:

- a) Le due falde risultano applicabili se è $\varphi = R$ (e viceversa);
- b) Le asintotiche della superficie dei centri corrispondono, sulle due falde, a linee che si corrispondono per archi uguali (e viceversa) ⁽²⁾;
- c) Le due falde sono in corrispondenza conforme se ai sistemi ortogonali di una falda (e quindi anche dell'altra) corrispondono sistemi coniugati sulla superficie dei centri, o se, ai sistemi isotermi di una falda (e quindi anche dell'altra) corrispondono sistemi isoterma-coniugati sulla superficie dei centri (e viceversa).

Dal teorema c) segue che: nei teoremi di Guichard alle linee di curvatura delle due falde a curvatura media costante o minime corrispondono sistemi isoterma-coniugati sulla quadrica rotonda luogo dei centri ⁽³⁾; nel teorema di Guichard ad ogni sistema isoterma delle due falde a curvatura media costante corrisponde un sistema isoterma-coniugato sulla quadrica rotonda luogo dei centri ⁽⁴⁾.

Dalla (2) segue che in una congruenza di Ribaucour deformabile:

- α) Le due falde hanno identiche, in punti corrispondenti, le seconde forme fondamentali se è $\varphi = 2R$ (e viceversa);
- β) Sulle due falde si corrispondono i sistemi coniugati (gli isoterma-coniugati, le asintotiche) se si corrispondono i sistemi coniugati (gli isoterma-coniugati, le asintotiche) su una falda (e quindi anche sull'altra) e sulla superficie dei centri (e viceversa) ⁽⁵⁾.

Dal teorema β) segue che ⁽⁶⁾: Il sistema della superficie di rotazione logaritmica o del catenoide accorciato o del senoide iperbolico (assunti come super-

(1) Cfr.: BIANCHI, M. c., p. 26.

(2) Nei teoremi b) e c) si intendono escluse le congruenze particolari con $\varphi = R$ che vengono considerate in seguito.

(3) Basta osservare che le congruenze considerate nei teoremi di Guichard sono di Ribaucour deformabili (con conservazione cioè delle linee di curvatura, nella corrispondenza stabilita fra le due falde dell'involuppo) e che le linee di curvatura di una superficie minima o a curvatura media costante costituiscono un sistema isoterma.

(4) Perchè la corrispondenza stabilita fra le due falde è conforme (cfr.: BIANCHI, M. c., p. 76).

(5) Nel teorema β) resta escluso il caso particolare $\varphi = 2R$ che verrà esaminato in seguito.

(6) Assumendo a superficie dei centri di una congruenza di Ribaucour deformabile la superficie di rotazione logaritmica (per la quale una delle falde dell'involuppo si riduce a una retta) oppure il catenoide accorciato o il senoide iperbolico, l'involuppo risulta una superficie pseudosferica (cfr.: BIANCHI, M. c., pp. 76-80) sulla quale le linee di curvatura formano, come è noto, un sistema isoterma-coniugato. Nessuna di queste congruenze appartiene alla classe $\varphi = 2R$, come sarà visto in seguito.

ficie dei centri di una congruenza di Ribaucour deformabile) che corrisponde alle linee di curvatura della falda (o delle falde) inviluppo (pseudosferiche) si mantiene isoterma-coniugato per qualunque deformazione della superficie stessa.

* * *

Dai precedenti risultati *a)* ed *α)* apparisce che le speciali congruenze di Ribaucour deformabili nelle quali è $\varphi = R$, oppure $\varphi = 2R$ meritano una particolare considerazione perchè, in esse, risultano identiche, sulle due falde dell'inviluppo, rispettivamente la prima e seconda forma fondamentale. Mi propongo di determinare la superficie dei centri di siffatte congruenze, considerando prima il caso $\varphi = 2R$ che presenta un interesse maggiore. Si avrà adunque per le (3)

$$(4) \quad \frac{E_o}{R_{11}} = \frac{F_o}{R_{12}} = \frac{G_o}{R_{22}} = 2R$$

ossia

$$(5) \quad E_o = 2R \cdot R_{11}, \quad F_o = 2R \cdot R_{12}, \quad G_o = 2R \cdot R_{22}$$

sistema che si ridurrà a due sole equazioni potendosi rendere identica con particolare scelta delle u, v (come si verificherà presto) l'equazione intermedia. Il problema può formularsi in questi termini: *stabilire se esistono forme possibili da attribuire al ds^2 di una superficie di rotazione⁽¹⁾ per cui il sistema differenziale (5) ammetta soluzioni per R .* Seguendo le tracce del Bianchi, assumerò le linee $R = \text{cost.}$ a linee $u = \text{cost.}$, per cui risulterà $R = R(u)$ funzione della sola u , e a linee $v = \text{cost.}$ le rispettive traiettorie ortogonali. Il ds^2 della superficie dei centri potrà scriversi sotto la forma

$$(6) \quad ds^2 = T^2 dr^2 + r^2 dv^2$$

dove T è una funzione di r da determinarsi insieme ad R ⁽²⁾. Calcolando i valori di R_{11} , R_{12} , R_{22} rispetto alla forma (6) ed osservando che è $E_o = T^2 - R'^2$, $F_o = 0$, $G_o = r^2$ il sistema (5) assume la forma

$$(7) \quad \begin{cases} R'' - \frac{T'}{T} R' = \frac{T^2 - R'^2}{2R} \\ R' = \frac{T^2}{2R} r \end{cases}$$

risultando identica la seconda equazione di (5).

(1) La superficie luogo dei centri di una congruenza di Ribaucour deformabile deve essere una deformata di una superficie di rotazione (cfr.: BIANCHI, M. c., p. 27).

(2) Per l'integrazione di questo sistema seguo il metodo usato dal BIANCHI (M. c., p. 68 e segg.) per un sistema analogo.

Derivando la seconda equazione di (7) per rapporto ad r , confrontando con la prima e riducendo si ottiene $T' = \frac{T^3 r}{4R^2}$. Il sistema proposto equivale perciò al seguente:

$$(8) \quad \begin{cases} T' = \frac{T^3 r}{4R^2} \\ R' = \frac{T^2 r}{2R} \end{cases}$$

Dividendo la prima per la seconda e poi integrando si ricava

$$(9) \quad T^2 = bR \quad (b = \text{cost. arb.}).$$

Sostituendo l'espressione (9) nella seconda equazione di (8) e integrando si ottiene

$$(10) \quad 2R = \frac{1}{2} b r^2 + c \quad (c = \text{cost. arb.}).$$

Si hanno così le formole

$$(11) \quad \begin{cases} T^2 = \frac{b^2 r^2 + 2bc}{4} \\ R = \frac{b r^2 + 2c}{4} \end{cases}$$

Perchè le soluzioni siano reali deve essere $b^2 r^2 + 2bc > 0$ e inoltre $\Delta_r R < 1$ affinchè le due falde dell'involuppo siano reali e distinte; questa seconda condizione si traduce con $R'^2 < T^2$, ossia per (8) e (11) $bc r^2 > -2c^2$. Deve dunque essere $bc > 0$, cioè le due costanti b e c debbono avere segni uguali. Ponendo $b' = \frac{b}{2}$ per il ds^2 della superficie dei centri si è pervenuti all'espressione

$$(12) \quad ds^2 = (b'^2 r^2 + b'c) dr^2 + r^2 dv^2$$

nella quale si può porre $b'c = 1$, dovendo tale prodotto risultare sempre positivo, pur di alterare r per un conveniente fattore di proporzionalità; si ha perciò:

$$(13) \quad ds^2 = (1 + \gamma^2 r^2) dr^2 + r^2 dv_1^2.$$

L'espressione (13) fornisce l'elemento lineare del *paraboloide di rotazione* con la parabola meridiana $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma r^2}{2}$. Esprimendo R dato da (11) in funzione di γ si ottiene l'espressione $R = \frac{1}{2\gamma} (1 + \gamma^2 r^2)$ che coincide con la distanza

del punto mobile sul paraboloide dal fuoco. Tutte queste circostanze coincidono perfettamente con quelle contemplate nel famoso teorema di Guichard⁽¹⁾ per cui si può formulare il

TEOREMA: *La corrispondenza stabilita nel teorema di Guichard fra le due falde inviluppo ad area minima è tale che conserva i sistemi coniugati (gli isotermod-coniugati, le asintotiche), sulle falde medesime, per qualunque deformazione della congruenza; anzi, in punti corrispondenti, sono identiche le seconde forme fondamentali per le due falde inviluppo, ed è questa l'unica congruenza di Ribaucour deformabile in cui si verifichi tale circostanza.*

*
* * *

Per il caso $\varphi = R$ si procederà in modo perfettamente analogo al precedente. Si dovrà avere:

$$(5') \quad E_o = R \cdot R_{11} \quad , \quad F_o = R \cdot R_{12} \quad , \quad G_o = R \cdot R_{22}$$

che si traduce nel sistema equivalente:

$$(7') \quad \begin{cases} R'' - \frac{T'}{T} R' = \frac{T^2 - R'^2}{R} \\ R' = \frac{T^2}{R} r . \end{cases}$$

Derivando la seconda equazione rispetto ad r , confrontando con la prima e riducendo si ricava:

$$(8') \quad T' = 0$$

da cui

$$(9') \quad T = a \quad (a = \text{cost. arb.}).$$

Sostituendo il valore di T fornito da (9') nella seconda di (7') e integrando si ricava

$$(10') \quad R^2 = a^2 r^2 + b \quad (b = \text{cost. arb.}).$$

Si hanno così le formole

$$(11') \quad \begin{cases} T = a \\ R^2 = a^2 r^2 + b . \end{cases}$$

Perchè le soluzioni siano reali si dovrà avere $a^2 r^2 + b > 0$ e perchè le due falde siano reali e distinte $R'^2 < T^2$ ossia $a^2 r^2 < a^2 r^2 + b$;

(1) Cfr.: BIANCHI, M. c., p. 64 e segg.

dovrà dunque essere $b > 0$ e il ds^2 della superficie dei centri assume la forma:

$$(12') \quad ds^2 = a^2 dr^2 + r^2 dv^2.$$

L'espressione (12') fornisce l'elemento lineare di una *svilupabile*, come facilmente si verifica, mentre il valore di R fornito da (11') soddisfa alla seconda equazione dell'applicabilità:

$$R^2 \Delta_{22} R - R \Delta_2 R + R \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 R_{11} - 2 \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v} R_{12} + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 R_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = (1 - \Delta_1 R) (K_0 R^2 - 1),$$

che traduce la condizione necessaria e sufficiente perchè esista una deformazione della congruenza di sfere per cui tutte le sfere passino per un punto fisso ⁽¹⁾. D'altra parte le formole ⁽²⁾ che forniscono i valori di D, D', D'' appartenenti alla superficie luogo dei centri, nella configurazione di essa per la quale tutte le sfere passano per un punto fisso, danno, nel caso presente, i valori $D = 0, D' = 0, D'' = 0$, per cui la superficie è un piano. Si ha perciò il seguente

TEOREMA: *Si consideri una congruenza di sfere coi centri distribuiti sopra un piano e passanti tutte per un punto fisso. Deformando comunque il piano, le due falde dell'inviluppo delle sfere risultano sempre applicabili* ⁽³⁾. Dall'analisi che conduce al teorema enunciato risulta pure che le precedenti congruenze sono le uniche congruenze di Ribaucour deformabili in cui le due falde dell'inviluppo siano applicabili.

(1) Cfr.: BIANCHI, M. c., p. 19, formola (II).

(2) Cfr.: BIANCHI, M. c., p. 19, formole (25).

(3) Le due falde dell'inviluppo saranno *superfici isoterme* per le quali soltanto può esistere una deformazione della congruenza (di Ribaucour) per effetto della quale tutte le sfere vengano a passare per un punto fisso (cfr.: BIANCHI, M. c., pp. 106-107).

Meccanica. — *Sopra un teorema di Staude-Wan der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso.* Nota di M. MANARINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

Come è noto, dato un corpo pesante sospeso per un punto fisso O, esistono infinite rette per O, formanti un cono quadrico (cono di Staude), che sono per il corpo assi di permanente rotazione uniforme con opportuna velocità angolare.

Nel 1923 dal Wan der Woude fu dimostrata⁽²⁾ la notevole proprietà che cotesto cono è formato dalle rette per O che sono assi principali d'inerzia rispetto ad un loro punto. In questa Nota mostro che queste proposizioni si possono ottenere e completare in maniera semplice ed elegante, deducendo per la durata di una intera rotazione permanente una formula notevole identica a quella di Galileo relativa al pendolo semplice (n. 2). Aggiungo infine alcuni teoremi sulla geometria delle masse.

1. Premettiamo una formula che estende il teorema di Huygens sui momenti d'inerzia.

Se m_i è una distribuzione di masse di baricentro G, O ed O_1 due punti qualunque dello spazio, pei quali sia posto $O_1 - O = la$, $G - O = g$, con a vettore unitario, α_O ed α_{O_1} le omografie d'inerzia relative ai detti punti O ed O_1 ⁽³⁾ ed m la massa totale, si ha la relazione

$$(I) \quad \alpha_O = \alpha_{O_1} + m [2a \times g - H(a, g) + H(g, a)] l - \\ - m [I - H(a, a)] l^2 \quad (4).$$

Allora affinchè l'asse (O, a) sia asse principale d'inerzia per un suo punto O_1 è necessario e basta che sia a direzione unita di α_{O_1} e cioè

$$\alpha_{O_1} a = pa;$$

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(2) Cfr. « Math. Zeitschr. », B. 16, pp. 170-172; oppure LEVI-CIVITA, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II. parte II, p. 127, Zanichelli, Bologna.

(3) Cfr. R. MARCOLONGO, *Meccanica razionale*, vol. II, p. 203, III ediz., Hoepli, Milano.

(4) Questa formula si ottiene subito prendendo l'espressione di α_O e sostituendovi $P - O$ con $(P - O_1) + (O_1 - O)$. D'altra parte, una forma particolare di essa, per O_1 coincidente con G, trovasi in P. PAINLEVÉ e CH. PLATRIER, *Cours de Mécanique*, p. 9, Gauthier-Villars, Paris, 1929, sotto il titolo: *Teor. di König per i tensori d'inerzia*. Cfr. anche C. BURALI-FORTI e T. BOGGIO, *Meccanica razionale* (Coll. Lattes) pp. 180-200. $H(a, b)$ è il solito simbolo d'una diade.

la quale per la (I) diventa

$$\alpha_0 \mathbf{a} - m [(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) \mathbf{a} - \mathbf{g}] l = p \mathbf{a}.$$

Perchè ciò sia, poichè $(\mathbf{a} \times \mathbf{g}) \mathbf{a}$ è diretto come \mathbf{a} , anche $\alpha_0 \mathbf{a} + m l \mathbf{g}$ deve essere diretto come \mathbf{a} ; il che accadrà se

$$(II) \quad \alpha_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + m l \mathbf{g} \wedge \mathbf{a} = 0.$$

Detto O' il punto $O + (\mathbf{g} \times \mathbf{a}) \mathbf{a}$ ove il piano per G perpendicolare ad (O, \mathbf{a}) incontra quest'asse, posto $G - O' = b \mathbf{b}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, con \mathbf{b} e \mathbf{c} vettori unitari, si hanno le seguenti condizioni necessarie e sufficienti affinché si verifichi la (II):

$$(III) \quad \alpha_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{g} = 0,$$

$$(IV) \quad l = \frac{\alpha_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{c}}{m b}.$$

Poichè $\alpha_0 \mathbf{a}$ è diretto come la normale esterna all'ellissoide d'inerzia relativo ad O nel punto P ove l'asse (O, \mathbf{a}) , nel verso di \mathbf{a} , incontra l'ellissoide stesso, la (III) esprime che questa normale deve stare nel piano di G e dell'asse (O, \mathbf{a}) .

La (III) al variare di \mathbf{a} , rappresenta un cono quadrico di vertice O , che è quindi il cono degli assi uscenti da (O) che sono assi principali d'inerzia rispetto ad un loro punto O_1 . Questi punti O_1 nelle generatrici del cono sono definiti dalla $O_1 - O = l \mathbf{a}$, con l dato in grandezza e segno dalla (IV).

2. Se un corpo pesante è sospeso in O ed è in movimento, l'equazione del moto riferita ad un osservatore solidale col corpo ha la nota forma

$$\frac{d \alpha_0 \boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \alpha_0 \boldsymbol{\omega} = m g (G - O) \wedge \mathbf{a},$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore velocità angolare, g l'accelerazione della gravità, \mathbf{a} il versore verticale diretto verso il basso ed inoltre si è tenuto conto che $\alpha_0 \boldsymbol{\omega}$ è uguale alla coppia d'impulso rispetto ad O .

Se vogliamo che il moto sia una rotazione permanente intorno a un determinato asse, dovremo porre anzitutto $\boldsymbol{\omega} = \text{cost.}$; supposto ciò per lo spazio è facile vedere che è $\boldsymbol{\omega} = \text{cost.}$ anche nel corpo, onde, per essere α_0 costante nel corpo, ne consegue che $\alpha_0 \boldsymbol{\omega}$ è pure costante nel corpo e quindi la precedente diviene:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \alpha_0 \boldsymbol{\omega} = m g (G - O) \wedge \mathbf{a}.$$

Da questa consegue che \mathbf{a} è costante nel corpo, onde dalla nota formula che lega le derivate di \mathbf{a} rispetto allo spazio ed al corpo si trae:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{a} = 0;$$

perciò posto

$$\omega = \pm \omega a$$

la precedente diviene

$$\omega^2 a \wedge \alpha_O a = mg(G - O) \wedge a;$$

moltiplicando questa scalarmente una volta per a ed un'altra per c , si hanno le due equazioni:

$$(V) \quad \alpha_O a \wedge a \times (G - O) = 0,$$

$$(VI) \quad \omega^2 = \frac{mgh}{\alpha_O a \wedge a \times c}.$$

La (V) esprime il teorema di Staude (*cono di Staude* degli assi di permanente rotazione) e paragonata con la (III), ci dà il teorema di Wan der Woude: *gli assi uscenti da O che sono assi principali d'inerzia rispetto ad un loro punto, posti verticalmente, sono assi di permanente rotazione.*

In più la (VI) in virtù della (IV) dà per la velocità angolare il valore

$$(VII) \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

cioè: *la durata d'una intera rotazione è*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

formula identica a quella di Galileo per il pendolo semplice.

Oltre alla semplicità di questo risultato, è notevole il fatto che la lunghezza l , che ivi solo compare, è proprio la distanza dal punto di sospensione O , del punto rispetto al quale l'asse di rotazione è asse principale d'inerzia, punto che potrebbe chiamarsi il *centro d'inerzia dell'asse*.

Dalla (VII) si deducono subito varie conseguenze. Anzitutto avendo posto $O_1 - O = l a$ con a versore del peso e quindi diretto verso il basso, e dovendo essere per la realtà di $\omega l > 0$, si conclude che il *centro d'inerzia* O_1 dell'asse della rotazione permanente deve trovarsi al di sotto del punto di sospensione O .

Se $l = 0$, ossia se l'asse di permanente rotazione è asse principale d'inerzia rispetto al punto di sospensione O , risulta $\omega = \infty$; questo caso trovasi considerato ad es. in Levi-Civita, loc. cit., p. 129.

Dalla (V) risulta pure la nota osservazione⁽¹⁾ che al cono di Staude appartengono i tre assi principali d'inerzia e l'asse baricentrale per O , e la (IV) aggiunge che per i tre primi $l = 0$ e per quella baricentrale $l = \infty$.

(1) Cfr. anche: R. MARCOLONGO, loc. cit., p. 282.

La (VI) ci assicura che se l'asse di permanente rotazione contiene il baricentro è $\omega = 0$; se poi è asse principale d'inerzia rispetto al punto di sospensione si ha $\omega = \infty$, se è asse centrale ω è indeterminato.

3. Poniamo ora, il solido pesante sospeso per O, in rotazione intorno ad una retta verticale (O, \mathbf{a}) con \mathbf{a} diretto verso il basso, e distinta dalle generatrici del cono di Staude relativo al punto O. Sarà

$$\psi = \alpha_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0.$$

In tal caso l'asse istantaneo di rotazione devia subito dalla sua posizione iniziale. Vediamo se sia possibile aggiungere una sollecitazione riducendosi ad una coppia di momento $\mathbf{\Omega}$ rispetto ad O, che costringa il corpo a ruotare uniformemente intorno al dato asse.

Scrivendo l'equazione del moto riferendola ad un osservatore solidale col corpo e ragionando come al n. 2, si perviene all'equazione

$$\omega^2 \mathbf{a} \wedge \alpha_0 \mathbf{a} = mg(G - O) \wedge \mathbf{a} + \mathbf{\Omega}.$$

Anzitutto si vede che deve essere $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{a} = 0$, ossia la coppia deve agire in un piano verticale. Inoltre si ha:

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{b} = -\omega^2 \alpha_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\omega^2 \psi,$$

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{c} = mgh + \omega^2 \mathbf{a} \wedge \alpha_0 \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Se $\psi \neq 0$, la coppia agisce in un piano verticale distinto dal piano baricentrale; se $\psi = 0$ l'asse (O, \mathbf{a}) è una generatrice del cono di Staude e se non è soddisfatta la (VI), la coppia $\mathbf{\Omega}$ si riduce a dover giacere nel piano baricentrale e si ha, per quanto riguarda la grandezza ed il senso di $\mathbf{\Omega}$, in forza della (IV):

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{c} = mgh - \omega^2 mhl = mh(g - \omega^2 l).$$

Dunque: se si pone in rotazione il corpo intorno ad una generatrice del cono di Staude relativo al punto di sospensione, con una velocità angolare $\omega^2 \neq \frac{g}{l}$, quest'asse devia dalla posizione iniziale; per impedire ciò basta applicare una coppia, giacente nel piano baricentrale per l'asse, di momento

$$\mathbf{\Omega} = mh(g - \omega^2 l) \mathbf{c}.$$

4. La condizione (III) del n. 1, che dev'essere soddisfatta affinché una retta r per O sia asse principale d'inerzia rispetto ad un suo punto, può porsi sotto un'altra forma che non dipende dalla posizione particolare del punto O, e che riesce utile per dedurre alcune interessanti osservazioni riguardanti la geometria delle masse.

Infatti, riferendoci al baricentro G , la (I) del n. 1 diviene:

$$\alpha_O = \alpha_G + m(G - O)^2 - mH[(G - O), (G - O)]^{(1)}.$$

Sostituendo in (III) e (IV), ricordando le posizioni fatte e ponendo inoltre $O_1 - O' = l_1 \mathbf{a}$, si ottengono facilmente le relazioni

$$(VIII) \quad \alpha_G \mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0,$$

$$(IX) \quad l_1 = \frac{\alpha_G \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{mh}.$$

La (VIII) ci dà, in altra forma, la condizione (III) affinchè la retta (O, \mathbf{a}) sia asse principale d'inerzia rispetto ad un suo punto O_1 , e la (IX) ci dà la posizione del punto O_1 sulla retta, riferita al punto O' ove il piano per G incontra perpendicolarmente la r . La (VIII) ha sulla (III) il vantaggio di operare sempre con la stessa omografia centrale d'inerzia α_G , qualunque sia il dato punto O per il quale deve passare la retta r . La regola esposta al n. 1 può essere sostituita con la seguente: *affinchè una retta (O, \mathbf{a}) sia asse principale d'inerzia rispetto ad un suo punto O_1 , occorre che la normale all'ellissoide centrale d'inerzia nel punto ove la (G, \mathbf{a}) lo incontra stia nel piano determinato dalla retta e dal baricentro.*

Si traggono ancora le osservazioni seguenti:

a) La (VIII) dimostra che l'esistenza del punto O_1 sulla r dipende soltanto dal suo versore \mathbf{a} e dalla giacitura determinata da r e dal baricentro G . Pertanto, se questa esistenza è accertata per una retta r lo è pure per tutte le rette del piano che r determina con G e parallele ad r ; il luogo dei punti O_1 su questo piano e per queste rette è l'iperbole equilatera di equazione

$$hl_1 = \frac{\alpha_G \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{m},$$

h , ed l_1 essendo le coordinate del punto corrente. Ciò si verifica certamente sopra i piani per G e per le generatrici del cono di Staude relativo ad un punto Q qualunque dello spazio. Le rette per G ammettono sempre l'esistenza del punto O_1 e questo è improprio per tutte, fatta l'eccezione per gli assi centrali d'inerzia che sono costituiti da tutti punti O_1 .

Si può completare l'osservazione notando che assegnata una direzione \mathbf{a} , il piano per G determinato dai vettori \mathbf{a} e $\alpha_G \mathbf{a}$, contiene tutte le rette parallele ad \mathbf{a} per le quali esiste il punto O_1 il cui luogo è l'accennata iperbole equilatera; ogni retta parallela ad \mathbf{a} esterna a questo piano non può essere asse principale d'inerzia per nessuno dei suoi punti, ossia, non può essere generatrice di nessun cono di Staude relativi ai suoi punti.

(1) Quest'uguaglianza esprime in sostanza il teorema d'Huggens e può enunciarsi in modo analogo.

b) Se la distribuzione di masse presenta un piano di simmetria perpendicolare ad \mathbf{a} (che passerà per G) la (VIII) è verificata e la (IX) dà $l_x = 0$, ossia O_x coincide con O' . In tal caso il vettore $\alpha_G \mathbf{a}$ risulta parallelo ad \mathbf{a} ed il piano di questi due vettori risulta indeterminato: in queste condizioni tutte le rette perpendicolari al piano di simmetria sono assi principali d'inerzia rispetto al loro punto d'intersezione col piano stesso.

Considerando una direzione \mathbf{a} parallela a questo piano di simmetria, il vettore $\alpha_G \mathbf{a}$ risulta pure parallelo ad esso onde concludiamo che *se un sistema di masse ammette un piano di simmetria, ogni retta di questo è un asse principale d'inerzia rispetto ad uno dei suoi punti.*

c) Se una distribuzione di masse presenta un asse s di simmetria, tutte le rette dello spazio ortogonali ad s , oppure complanari con s , sono assi principali d'inerzia rispetto ad un loro punto: le prime lo sono rispetto all'intersezione del piano per G perpendicolare ad esse.

d) Se una distribuzione di masse ha un centro di simmetria, ogni retta dello spazio è asse principale d'inerzia rispetto ad uno dei suoi punti e precisamente rispetto all'incontro di essa col piano per G ad essa perpendicolare.

Meccanica. — *Sul problema brachistocrono di Zermelo.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, pres. dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa.* Nota di G. VIOLA, pres. dal Corrisp. A. BEMPORAD.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica* ⁽¹⁾. Nota I di G. PICCARDI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

L'analisi elementare spettroscopica viene condotta, si può dire esclusivamente, su spettri atomici, secondo procedimenti quasi del tutto empirici, ma che hanno dato, per lunghi anni, ottima prova in ricerche qualitative e spesso buona anche in ricerche quantitative.

Gli spettri per uso analitico sono ottenuti, com'è noto, generalmente in emissione (fiamma, arco, scintilla, geissler) e solo in un caso particolarissimo, quello delle terre rare, anche in assorbimento da cristalli o soluzioni (questo s'intende per analisi elementari, nello studio dei composti, specialmente organici, l'assorbimento da liquidi o cristalli è largamente usato). Spettri di assorbimento di sostanze allo stato gassoso non vengono in genere usati a scopo di analisi.

I criteri analitici qualitativi si ricavano dalle « coincidenze » riscontrate fra le righe dello spettro della sostanza in esame e le righe di spettri campione; quelli quantitativi si ricavano, invece, per condizioni standards, dal grado di « persistenza » delle righe osservate, dal confronto delle intensità di date righe dello spettro in esame, con le intensità delle stesse righe in spettri campione, oppure, in casi particolari, anche dai rapporti di intensità che intercedono fra date righe di un elemento e date righe di un altro elemento, presenti nello stesso spettro, od anche dalla lunghezza delle righe spettrali, ottenute in particolari condizioni.

Dal punto di vista concettuale le ricerche quantitative vengono eseguite, generalmente, secondo i metodi classici, quantunque, dal punto di vista sperimentale, siano possibili forti miglioramenti, specialmente per quanto riguarda la stima delle intensità con l'impiego di filtri graduati e di procedimenti microfotometrici. Del resto, i risultati raggiunti da abili sperimentatori, per particolari problemi, anche servendosi di mezzi semplicissimi, sono veramente notevoli e tali da dare la più legittima fiducia nei metodi usati.

Ma l'analisi spettroscopica, perchè sia veramente proficua e tale da giustificare il suo impiego a preferenza di quella chimica, bisogna che sia rapida (e perciò semplice), precisa e sensibile. Queste condizioni non sono purtroppo realizzate (sia per ricerche qualitative, che quantitative) che se gli elementi di cui si vuole stabilire la presenza, o la concentrazione, pre-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1931.

sentano spettri relativamente semplici, con righe di grande persistenza e situate in regioni facilmente accessibili con gli ordinari apparecchi. Allora dal punto di vista qualitativo, l'analisi spettroscopica supera e sostituisce più che vantaggiosamente ogni metodo chimico per sensibilità e semplicità, mentre da quello quantitativo, può talvolta raggiungere la precisione dei metodi chimici. È questo il caso, veramente fortunato, degli elementi Li, Na, Mg, Ca, Sr, Ba, Al, Cu, Hg ecc. Ma vi sono elementi, come K e Rb, che pur presentando spettri semplicissimi non possiedono che righe di piccola persistenza; altri elementi, poi, danno spettri straordinariamente complicati, ricchi di migliaia di righe che sono, in genere, anche pochissimo persistenti. Un esempio tipico a questo riguardo è fornito dal Ce, che dà uno spettro di circa 8000 righe sottilissime, delle quali solo sei o sette (e considero qui come righe anche piccoli gruppi di due o tre righe a piccola separazione) sono osservabili per concentrazioni superiori al millesimo, circa una quarantina per concentrazioni superiori al centesimo e tutte le altre a concentrazioni superiori!

Ora, in spettri molto ricchi di righe, l'identificazione di un elemento può divenire difficile ed incerta, se non si dispone di apparecchi di adeguato potere risolvete (capaci, in qualche caso, di separare delle righe distanti anche frazioni di unità \AA , per evitare che le coincidenze fortuite siano così numerose da render dubbio il risultato dell'analisi). Talvolta è anche consigliabile l'applicazione di criteri statistici, analoghi a quelli usati correntemente in astrofisica pei casi dubbi di identificazione. Può essere, poi, anche del tutto impossibile il determinare con qualche precisione la concentrazione di uno di questi elementi, ed è già un buon risultato lo stabilirne molto approssimativamente l'ordine di grandezza, e benchè con mezzi adeguati ed una buona organizzazione di lavoro si possa ottenere qualche cosa anche in condizioni difficili, la fatica ed il tempo spesi sono tali, da far preferire, senza alcuna esitazione, i procedimenti soliti della chimica a quelli spettroscopici.

Un caso veramente eccezionale a questo riguardo, sarebbe offerto dagli elementi del gruppo delle terre rare (che presentano spettri complicatissimi e che sono ribelli ai procedimenti chimici) se i composti di alcuni di questi elementi non fossero capaci di dare, sia allo stato cristallino, sia allo stato di soluzione dei magnifici spettri di assorbimento, che rendono sovente inutile l'uso degli spettri di emissione.

Vi sono dei casi, dunque, in cui per un complesso di circostanze, l'analisi spettroscopica usuale, cessa di esser usabile correntemente con vantaggio.

Ho pensato allora, se, nei casi sopra accennati, invece di servirsi di mezzi di eccitazione relativamente potenti e spezzare completamente le molecole in atomi, riempiendo così gli spettrogrammi di una miriade di fittissime righe, non sia più conveniente ricorrere all'uso di mezzi di ecci-

tazione più modesti e limitarsi a demolire parzialmente appropriati composti, fino allo stato di molecole biatomiche, le quali possono emettere, in condizioni opportune, dei bellissimi e brillantissimi spettri di bande (sovente, e questa è cosa importantissima, in assoluta assenza di righe atomiche) su cui si possono condurre tutte le ricerche del caso.

Purtroppo, non è sempre possibile trovare delle molecole che si prestino allo scopo e che presentino una stabilità adeguata ai mezzi di eccitazione; a volte la molecola è troppo labile e si dissocia; a volte, invece, è così stabile che non si riesce a farle emettere uno spettro coi mezzi di eccitazione adottati; ma in ogni modo, nei casi in cui queste molecole sono ottenibili ed eccitabili facilmente, lo studio del loro spettro di bande si dimostra di una immensa utilità.

Effettivamente, se uno spettro di bande non è, da un punto di vista, diciamo così, assoluto, come in realtà non lo può essere, più caratteristico di uno spettro di righe, da un punto di vista pratico lo è enormemente di più e lo si può identificare con tutta facilità, spesso senza bisogno di ricorrere a misure di lunghezze d'onda od a sovrapposizione di spettri. Ciò risulta immediatamente chiaro, pensando alla particolare struttura degli spettri di bande, per i quali, a differenza di quelli atomici, la cui energia è unicamente di origine elettronica, l'energia totale è tripartita fra energia elettronica, energia di oscillazione dei nuclei atomici ed energia di rotazione della molecola.

Ora, negli atomi, gli spettri risultano semplici, se le strutture elettroniche esterne sono semplici (idrogeno, metalli alcalini, alcalino terrosi, trivalenti, ecc.) e complicati se queste sono complicate (metalli a valenze multiple, terre rare, ecc.). Ma nelle molecole, a parte il fatto che le strutture elettroniche esterne possono esser semplici anche se quelle degli atomi che le costituiscono sono complicate, una complicazione della struttura esterna influenza solo la parte dell'energia che è unicamente di origine elettronica, cioè la struttura fine della banda. Ora, per una ricerca analitica, la struttura fine non interessa affatto, perchè basta conoscere soltanto la parte, diciamo così grossolanamente topografica dello spettro, cioè la distribuzione delle varie bande nelle varie regioni ed i relativi giuochi di intensità, cioè, in definitiva, basta conoscere soltanto gli effetti dell'oscillazione dei nuclei atomici. Anche gli effetti della rotazione possono interessare da un punto di vista, diciamo così, macroscopico, in quanto, a seconda che le variazioni del momento di inerzia della molecola, nel passaggio da uno stato di rotazione ad un altro, sono positive o negative, le bande risultano, come si dice usualmente « sfumate » verso le piccole o verso le grandi lunghezze d'onda. E ciò serve come criterio quantitativo, nel riconoscimento delle bande; come pure serve da criterio qualitativo il fatto che certe bande siano o no risolte in righe con un determinato apparecchio, o sotto una certa dispersione.

Poichè l'emissione delle bande, corrispondentemente ai vari stati di oscillazione, avviene secondo un meccanismo assai semplice e secondo un certo schema costante per tutte le molecole biatomiche, lo spettro risulta necessariamente assai semplice; se considerato, s'intende, nei soli riguardi dell'oscillazione. Del resto, in molti casi, purtroppo, lo studio degli spettri di bande si riduce forzatamente a quello della sola oscillazione, perchè le bande stesse non sono risolubili in righe, neanche con i più potenti apparecchi.

Per la sua apparente semplicità e per il suo aspetto particolare, uno spettro di bande può risultare veramente prezioso nei riguardi di una ricerca qualitativa; ma possiede inoltre caratteristiche che lo rendono prezioso per altre ricerche, anche di grande finezza.

Infatti, sempre nei riguardi dell'oscillazione, si nota una distribuzione fissa delle intensità, di cui oggi si può dar ragione con considerazioni teoriche, per cui, una volta ordinato lo spettro, restano in certo modo stabilite le relazioni di intensità fra i vari gruppi di bande e fra le bande di ciascun gruppo. Restano cioè fissati i gradi di persistenza delle varie bande di un gruppo e dei vari gruppi di bande e quindi la sensibilità e la precisione che può presentare il metodo, nel caso particolare studiato. Ora, il fatto che in uno spettro ricco di bande, si possano stabilire questi certi rapporti fissi di intensità, è straordinariamente vantaggioso per una ricerca quantitativa. Effettivamente il tipo specialissimo di distribuzione delle intensità, in un di questi spettri, rende, per dirla in breve, all'analista lo stesso servizio del filtro graduato; se un gruppo di bande, per eccesso o per difetto di intensità si presenta di cattivo rendimento microfotometrico, si può a colpo sicuro scegliere un altro gruppo, o sistema, la cui intensità generale sia quella voluta per ottenere una buona stima delle intensità. Così, ad es., i gruppi di bande caratterizzate da numeri quantici uguali, cioè con differenze uguali a 0, come le bande $0-0$, $1-1$, $2-2$, ecc., sono i più intensi ed anche i più persistenti e servono bene per piccole concentrazioni; quelli le cui bande sono caratterizzate da numeri quantici differenti, come $0-1$, $1-2$, $2-3$, ecc., oppure $0-2$, $1-3$, $2-4$, ecc., sono tanto meno intensi, quanto più grandi sono le differenze fra i numeri quantici e servono bene, invece, per forti concentrazioni dell'elemento da ricercare. Anche dalla distribuzione dell'intensità nell'interno di una banda si possono trarre indicazioni notevoli.

In tal modo, una ricerca quantitativa di rigore può esser condotta con molta maggior facilità su di uno spettro di bande, anche mediocre, che non su di uno spettro di righe ottenuto in condizioni difficili.

Bastano forse, questi brevi accenni per dare una idea di come uno spettro di bande possa diventare un ausilio non trascurabile per sensibilità e precisione (per quanto è possibile) in ricerche sia qualitative che quantitative. Da vari anni mi sto servendo correntemente di questo metodo, per la ricerca dell'Y e

del La (terre rare incolori e prive di spettro di assorbimento anche nella regione ultravioletta) durante le operazioni di frazionamento in corso nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze, con ottimi risultati; ma i vantaggi e gli svantaggi ed il rendimento del metodo di analisi condotto in base agli spettri molecolari, vanno esaminati caso per caso ed a questa Nota seguiranno altre, che brevemente daranno notizia dei risultati ottenuti per particolari elementi.

Chimica (Chimica fisiologica). — *Sulla presenza di un composto organico fosforato acido-solubile nella ghiandola sottomascellare del cane* ⁽¹⁾. Nota di A. ROSSI e G. SCOZ, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

L'attività ghiandolare presenta alcune analogie, dal punto di vista fisiologico, con l'attività muscolare. Tanto il muscolo che la ghiandola ⁽³⁾, possono funzionare per es. in assenza di O_2 , ma hanno bisogno di O_2 per ricostituire quei composti che, scindendosi, forniscono all'organo l'energia necessaria per la sua attività.

Attratti da queste analogie, alcuni Autori hanno pensato alla possibilità che l'attività di questi organi (muscolo e ghiandola) sia legata a fenomeni chimici simili se non eguali. Hanno pensato cioè, alla possibilità che l'energia necessaria alla funzione ghiandolare potesse essere fornita, come nel muscolo, dalla scissione di un estere fosforico di uno zucchero, simile al lattacidogeno di Embden che fino a non molto tempo fa si credeva dovesse da solo fornire al muscolo l'energia a questo necessaria. La dimostrazione di lattacidogeno come tale nella ghiandola non sono riusciti finora a dare né Schmitz e Chrometska ⁽⁴⁾, né Krause ⁽⁵⁾, ma essi, ed altri ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾, hanno potuto dimostrare la esistenza nella ghiandola di acido fosforico, acido lattico, glucosio, in quantità variabile con lo stato di attività dell'organo. Camis, infatti, sperimentando sul succo della ghiandola sottomascellare, ha dimostrato che l'acido fosforico inorganico aumenta con l'attività ghiandolare (perfino del 300 %, rispetto alla ghiandola a riposo), e che l'acido fosforico

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(3) F. BOTTAZZI, *Ricerche sulla ghiandola salivare posteriore dei Cefalopodi*. « Atti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXIX, p. 32 (1920).

(4) E. SCHIMTZ, e F. CHROMETZKA, Citati da Krause.

(5) F. KRAUSE, *Phosphorsäure und Milchsäurebildung im Drüsenbrei*, « Zeitschr. f. physiol. Chemie », Bd. 168, p. 216 (1927).

(6) M. CAMIS, *Sur le métabolisme de l' H_3PO_4 dans la glande sousmaxillaire*. « Arch. Intern. de Physiol. », vol. 22, p. 343 (1924).

(7) O. RIESSER, Citato da Krause.

del sangue refluo della ghiandola aumenta, e fortemente, appena la ghiandola passa dallo stato di riposo a quello di attività, fenomeno quest'ultimo osservato anche da Bergonzi e Bolcato ⁽¹⁾. Krause ⁽²⁾, invece, sperimentando sul filtrato dell'estratto della ghiandola a riposo trattata con acido tricloracetico, ha trovato circa 40 mg. di fosforo (P) per 100 gr. di tessuto e ha visto che questa quantità non varia praticamente durante l'attività secretiva. Egli ha osservato inoltre, che se si mette una poltiglia ghiandolare in soluzione contenente bicarbonato e la si tiene in termostato a 42° per 2 ore, il contenuto di acido fosforico aumenta da gr. 0,1 a 0,25, e quello di acido lattico perfino da gr. 0,56 a gr. 0,279 per 100 gr. di tessuto; che in dette condizioni di esperimento la formazione di acido fosforico è favorita dalla presenza di certi cationi (Na) e rallentata dai fluoroioni; e che la presenza di acido nucleinico o di candiolina (esosodifosfato di calcio) provoca la comparsa di una forte quantità di acido fosforico senza contemporaneo aumento dell'acido lattico. In base a questi risultati, Krause emette l'ipotesi che nella ghiandola possano esistere due complessi, di cui uno capace di dare, scindendosi, acido fosforico e acido lattico, l'altro solo acido fosforico.

Quasi contemporaneamente alle ricerche di Krause, gli Eggleton hanno dimostrato nei muscoli la presenza di un composto di acido fosforico con creatinina, detto da loro fosfagene, composto che scompare rapidamente. Le ricerche degli Eggleton ⁽³⁾, di Meyerhoff ⁽⁴⁾, e in Italia di Martino ⁽⁵⁾, hanno potuto stabilire che questa sostanza è un componente normale del tessuto muscolare striato e liscio, mentre, secondo Martino, non esiste nelle ghiandole (gli Eggleton lo hanno trovato nel testicolo di ratto).

Tenendo presente la scoperta di fosfagene, la contraddizione tra i dati di Camis e di Krause potrebbe spiegarsi, ammettendo nelle ghiandole l'esistenza di fosfagene o di un composto analogo.

Camis, difatti, determina il solo acido fosforico inorganico presente come tale nella ghiandola; Krause, invece, ammessa la eventuale esistenza

(1) M. BERGONZI e V. BOLCATO, *Contributo allo studio del comportamento degli acidi fosforico e lattico e del glicogeno nella attività funzionale della ghiandola sottomascellare*. «Arc. d. Sc. Biol.», vol. 14, p. 573 (1930).

(2) F. KRAUSE, *Zur Frage des Vorkommens einer lactacidogenartigen Substanz in Drüsen*. «Zeitschr. f. physiol. Ch.», Bd. 173, p. 235 (1928).

(3) Ph. EGGLETON, and Gr. P. EGGLETON, *The inorganic Ph. and the labile form of organic Ph. in the gastrocnemius of the frog*. «Biochem. Journ.», vol. 21, p. 190 (1927); *The physiological significance of phosphagen*. «Journ. of Physiol.», vol. 65, p. 155 (1927); *Further observations on phosphagen*. «Journ. of Physiol.», vol. 65, p. 15 (1928); *The position of Ph. in the chemical mechanism of muscular contraction*. «Chem. Rev.», vol. 9, p. 432 (1929); *A method of estimating phosphagen and some other phosphorous compounds in muscle tissue*. «Journ. of Physiol.», vol. 68, p. 193 (1929).

(4) O. MEYERHOFF, *Die Chemischen Vorgänge in Muskel*. Berlin, 1930 p. 92 e sgg.

(5) G. MARTINO, *Ricerca del fosfagene in vari organi*. «Boll. Soc. It. d. Biol. Sper.», vol. 3, p. 114 (1928).

di quel composto, dato il procedimento da lui adottato, lo comprenderebbe senz'altro nella determinazione.

Confrontando i dati di Camis e di Krause, l'esistenza di un composto simile al fosfagene ci è sembrata possibile, e abbiamo iniziato le presenti ricerche allo scopo di confermare o meno questa possibilità.

Tecnica. Gli animali (cani) furono uccisi in diversi modi. Alcuni vennero uccisi per decapitazione, e la loro testa venne poi messa subito in ghiacciaia entro una grossa capsula circondata di ghiaccio. Dopo qualche tempo (alcune ore) si prelevava la ghiandola, la si pesava rapidamente, e la si sminuzzava in un mortaio di porcellana con acido tricloracetico e sabbia di quarzo. Una parte del filtrato la si trattava subito con la miscela di Mathison; in un'altra parte si determinava il fosforo direttamente con il metodo di Lohman⁽¹⁾. Altri animali, per evitare dissanguamento, vennero uccisi trafiggendo loro direttamente il cuore. Si prelevava rapidamente la ghiandola sottomascellare, la si pesava subito, la si teneva per un paio d'ore in miscela frigorifera, e poi la si sminuzzava con sabbia di quarzo e acido tricloracetico in un mortaio raffreddato. Dal filtrato, si prendevano due porzioni eguali di liquido, e si precipitava il fosforo con la miscela di Mathison: in una porzione, immediatamente, nell'altra, dopo un'ora di permanenza in un termostato a 37°. Si determinava poi il fosforo secondo Lohman.

Per il dosaggio del fosforo totale, abbiamo proceduto come segue: la ghiandola, seccata in stufa a 110°, è stata incenerita in muffola alla più bassa temperatura possibile. Le ceneri, riprese con HCl diluito sono state evaporate a bagnomaria, riprese con acqua e acido cloridrico, filtrate e neutralizzate con ammoniaca; il fosforo è stato precipitato in soluzione fortemente nitrica come fosfomolibdato ammonico secondo Woy. Il precipitato, disciolto in ammoniaca è stato di nuovo precipitato e pesato come fosfomolibdato ammonico secondo Finkener.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

Fosforo nel filtrato della ghiandola pestata con acido tricloracetico: mgr. per 100 gr. di ghiandola.

A. Animali uccisi per decapitazione:	1	2	3	4
1. Fosforo precipitato con la miscela di Mathison e determinato sec. Lobman (fosforo inorganico).	28,9	28,5	27,4	23,0
2. Fosforo determinato sec. Lohman (fosforo inorganico + fosforo fosfagenico)	29,1	30,5	30,0	27,9
Differenze:	1,8	2,0	3,2	4,9

(1) K. LOHMAN, *Über die Isolierung verschiedener natürlichen Phosphorsäureverbindungen und die Frage ihrer Eigentlichkeit*. «Bioch. Zeit.», Bd. 194, p. 306 (1928).

B. Animali uccisi con ferita al cuore :		5	6	7	8
Fosforo precipitato con la miscela di Mathison e determinato sec. Lohman.	subito (fosforo inorganico) . .	29,0	31,0	32,6	33,0
	dopo permanenza in termostato (fosforo inorganico + fosforo fosfagenico),	39,0	40,0	34,6	36,0
	Differenze :	10,0	9,0	2,0	3,0

Fosforo totale determinato nelle ceneri: mgr. per 100 gr. di tessuto fresco.

9	10
143	144

Dalle nostre ricerche risulta che nella ghiandola sottomascellare del cane il fosforo, per i risultati ottenuti col metodo da noi adottato, è presente sotto due forme: l'una non solubile in acido (100 mgr. per 100 gr. di tessuto); l'altra, l'acido-solubile (40 mgr. per 100 gr. di tessuto), fatto già osservato per altre vie da Krause. La parte acido-solubile, che è quella che più ci interessa, presenta, inoltre, a sua volta, delle caratteristiche tali da far ricordare il fosfagene degli Eggleton.

Se si opera con molta rapidità, si nota infatti che questa porzione acido-solubile compare bensì tutta intera, ma solo se si lascia la ghiandola per qualche tempo in ambiente acido e a 37° come se esistesse nella ghiandola un composto fosforato analogo al fosfagene capace di scindersi in ambiente acido liberando acido fosforico.

Conclusioni.

1. Nella ghiandola sottomascellare del cane esistono circa 140 mgr. di fosforo (P) per 100 gr. di tessuto fresco.

2. Di questi 140 mgr. circa 40 sono in forma di composto acido-solubile.

3. Una parte almeno di questa porzione acido-solubile è determinabile solo dopo incubazione in termostato a 37° dell'estratto acido, il che fa supporre trattarsi di un composto organico fosforato labile, che, almeno per questo suo comportamento, ricorda il fosfagene degli Eggleton.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Ricerche sul metabolismo della cistina* ⁽¹⁾. Nota di G. SCOZ, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

L'importanza della cistina come fattore limitante la utilizzazione delle proteine è conosciuta da tempo (Sherman e Woods) ⁽³⁾. In questi ultimi anni, da diversi Autori, è stata studiata anche l'influenza di questo aminoacido, che senza dubbio è uno dei più importanti per l'economia animale, sull'accrescimento del peso del corpo e del pelo negli animali.

Per quanto riguarda l'accrescimento del pelo, le ricerche finora fatte hanno avuto due obbiettivi: 1° stabilire se negli animali alimentati con una dieta ricca di cistina il pelo crescesse più folto che in altri alimentati con una dieta povera di cistina; 2° vedere se nel pelo dei primi, la quantità di zolfo e di cistina fosse maggiore che nei secondi.

I diversi Autori che hanno lavorato intorno a questo argomento non sono arrivati però alle stesse conclusioni, perchè, mentre alcuni (Lightbody e Lewis ⁽⁴⁾; Beadles, Braman e Mitchel) ⁽⁵⁾, hanno osservato negli animali alimentati con una dieta ricca di cistina un pelo più folto che nei controlli, altri (Barrit, King e Pickard ⁽⁶⁾; Bucciardi) ⁽⁷⁾, quest'aumento non hanno potuto osservare. Lo stesso si può dire per quanto concerne la composizione chimica del pelo, che secondo alcuni Autori (Wilson e Lewis) ⁽⁸⁾, viene influenzata da una dieta ricca di cistina, mentre secondo altri questa influenza è dubbia, o non dimostrabile (Barrit, King e Pickard ⁽⁶⁾; ved. letteratura in Bucciardi) ⁽⁷⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 6 dicembre 1931.

(3) H. C. SHERMAN and E. WOODS, *The determination of cystine by means of feeding experiments*. « Journal of Biol. Chem. », vol. 66, p. 29 (1925).

(4) H. D. LIGHTBODY and H. B. LEWIS, *The relation of the protein and cystine content of the diet to the growth of hair in the white rat*. « Journal of Biol. Chem. », vol. 82, p. 485 (1929).

(5) Y. R. BEADLES, W. W. BRAMAN and H. H. MITCHEL, *The regulation between cystine deficiency in the diet and growth of hair in the white rat*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. 88, p. 625 (1930).

(6) J. BARRIT, A. TH. KING and Y. N. PICKARD, *The effect of cystine diet on keratin composition in rabbit wool*. « Bioch. Journ. », vol. 24, p. 1060 (1930).

(7) BUCCIARDI G., *Ricerche sul contenuto in zolfo nei peli e nei capelli. Importanza della cistina e del solfo nel sistema pilifero*. « Arch. d. Fisiol. », vol. 28, p. 564 (1930).

(8) R. H. WILSON and H. B. LEWIS, *The cystine of hair and other epidermal tissues*. « Journ. of Biol. Chem. », vol. 73, p. 543 (1927).

b) nei *cuccioli*, che sono ancora in esperimento, non si è potuto osservare finora nessuna apprezzabile differenza nell'accrescimento del pelo.

Le ricerche sopra riportate confermano l'influenza positiva della cistina sull'accrescimento generale corporeo. Per quanto riguarda l'accrescimento del pelo, il peso totale di questo è senza dubbio maggiore negli animali a cistina che nei controlli. Ma tale differenza è da mettere, innanzi tutto, in relazione col maggiore accrescimento del peso corporeo, e quindi con maggiore sviluppo della superficie corporea degli animali a cistina. Più dimostrativo è, evidentemente, il calcolare il peso del pelo per unità di superficie. Ma il calcolo fatto in questo modo non ha dato risultati decisivi, in quanto che solo in due delle tre esperienze eseguite, la differenza esiste. È perciò necessario fare delle ricerche più numerose e possibilmente su animali più giovani di quelli che io ho adoperato; solo così si potrà arrivare a delle conclusioni sicure.

II. — BILANCIO DELLO ZOLFO.

In un altro gruppo di animali (cani) ho iniziato poi lo studio del bilancio dello zolfo, proponendomi di stabilire: 1° il fabbisogno minimo di zolfo dell'organismo per kg. di peso; 2° come si comporta il bilancio dello zolfo dopo un periodo di digiuno assoluto; 3° dopo un periodo di dieta povera di cistina; 4° in seguito alla rasatura del pelo.

1. Circa il fabbisogno di zolfo necessario per ottenere l'equilibrio a un livello minimo, ho trovato che questo è rispettivamente di mg. 17.2 nel cane 1; di mg. 14.3 nel cane 3; di mg. 15.5 nel cane 4; mentre la ripartizione dello zolfo eliminato con le urine e le fecce è la seguente:

Cane n°	Zolfo neutro mg.	Zolfo totale mg.	Zolfo totale/Zolfo neutro mg.
1	2.2	17.2	7.81
3	2.7	14.3	5.29
4	2.5	15.5	7.27

(Si noti che la quantità di zolfo somministrata era rappresentata dallo zolfo contenuto nella caseina e nella farina di frumento della razione alimentare).

Se si eleva la quantità di zolfo contenuta nella dieta oltre il fabbisogno minimo mediante aggiunta di cistina alla dieta, l'equilibrio viene raggiunto a un livello più alto; quello che varia invece, è il rapporto zolfo neutro/zolfo totale. Così, per esempio:

Cane n°	Zolfo neutro mg.	Zolfo totale mg.	Zolfo totale/Zolfo neutro mg.
1	5.9	26.8	4.54
3	5.9	16.8	2.84
4	4.8	21.2	4.41
5	5.0	21.8	4.36

il che dimostra che quanto maggiore è la quantità di zolfo neutro somministrato, tanto minore è la parte che ne viene ossidata.

2. Durante il digiuno, nei primi giorni l'eliminazione dello zolfo si mantiene allo stesso livello e si ripartisce nello stesso modo che nell'equilibrio minimo; in seguito, aumenta lievemente come mostrano i seguenti dati:

Cane 4 — 1° giorno di digiuno: zolfo neutro mg. 2.2; Z. totale mg. 16
 » 8° » » : » » » 3.5; » » » 22.8

Cane 6 — Per i primi 3 giorni
 di digiuno : » » » 2.6; » » » 20.5
 » Al 7° e 8° giorno : » » » 3.5; » » » 25

Il bilancio dello zolfo dopo il digiuno di 9 giorni, è stato studiato sugli stessi animali. Si è osservato costantemente un periodo più o meno lungo di ritenzione di zolfo; ritenzione che in un caso ha raggiunto i 49 mg. *pro die*.

3. La stessa ritenzione si verifica negli animali, quando si dia loro dapprima una dieta completa, ma povera di zolfo, e poi la stessa dieta arricchita di zolfo con cistina.

4. Ho potuto infine notare ritenzioni di zolfo anche in un altro caso, e precisamente in cani che vengano rasati dopo essere stati messi a una dieta contenente zolfo in quantità superiore a quella richiesta dal fabbisogno minimo dell'organismo. In questi casi, la ritenzione può essere anche cospicua e continuare per diverso tempo. Così, per esempio:

Nel cane	1	è stata di mg.	56	di zolfo per giorno
»	»	2	»	43
»	»	3	»	17

Dal complesso di queste ricerche mi pare risulti confermata l'influenza della cistina sull'accrescimento, non solo della massa corporea, ma anche del pelo. E risulta inoltre chiaramente l'importanza dello studio del ricambio dello zolfo per una migliore interpretazione dei fatti osservati.

ERRATA-CORRIGE

Errata

Corrige

pag. 313 riga 3: *sintomia*

sintonia

INDICE DEL VOLUME XIV, SERIE VI. — RENDICONTI

1931

INDICE PER AUTORI

A

- AGOSTINI P. — VEDI CAGLIOTI V.
AMANTEA G. e FAMIANI V. — «Sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B nel colombo». 210.
ARMELLINI G. — «Nuova interpretazione cosmogonica dell'equipartizione della energia tra le stelle». 65.
ID. — Presenta il II volume del suo «Trattato di Astronomia siderale». 537.
ID. e ARMELLINI CONTI G. — «Ricerche sopra le variazioni dell'assorbimento atmosferico ed osservazioni varie». 455, 545.
ARMELLINI CONTI G. — VEDI ARMELLINI G.

B

- BACCAREDDA M. — VEDI PASSERINI L.
BARBA G. — «Parallelismo generalizzato in una V_3 ». 78, 174.
ID. — «Trasporti metrici di punteggiate e trasporti rigidi di fasci». 468.
BARBARO L. — VEDI CORBELLINI A.
BARONI A. — «Le misure del paracoro applicate allo studio della costituzione dei polisolfuri, poliseleniuri e delle catene miste di zolfo e selenio». 28.
ID. — «Soluzioni solide fra gli alogenuri alcalini». 215.
BARRECA P. — «Metodo per ridurre all'equatore ed all'equinozio le singole

durate di colorazioni vespertine e mattutine di nubi». 427.

- BELLUIGI A. — «Sulla depressione gravimetrica di Gattatico-Parma». 24.
ID. — «Ancora sulle depressioni gravimetriche nella valle padana». 497.
BERNSTEIN V. — «Sopra l'ultraconvergenza di certe serie di Dirichlet». 475.
BOGGIO T. — «Sulla superficie d'onda di Fresnel». 551.
BOLAFFI A. — «Ricerche sui lipoidi dei tumori umani e particolarmente sul solfofosfolipide del tumore». 62.
BOMPIANI E. — «Invarianti d'intersezione di due curve sghembe». 456.
BORTOLOTTI E. — «Connessioni affini associate ad una $(n+1)$ -pla di congruenze in una varietà n -dimensionale». 462.
BRUNELLI G. — «Nuovi contributi alla biologia lagunare». 520.
BUCCIANTE L. — «Sopravvivenza dei tessuti embrionali di pollo mantenuti in liquido di Ringer a bassa temperatura». 356.

C

- CACCIAMALI G. B. — «Conflitti orogenici». 131.
ID. — «Convogliamento e ricorugamento dell'«Erciniano» nell'orogenesi alpina». 221.
CAGLIOTI V. e AGOSTINI P. — «Sull'impiego dei raggi X in analisi quantitativa». 301.

- CAGLIOTI V. — Vedi PARRAVANO N.
 CAGNASSO A. — Vedi CAMBI L.
 CAMBI L. e CAGNASSO A. — «Ditiocarbammati manganici». 71.
 CLEMENTE P. — «Maggiorazione delle soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine». 88.
 COLLA C. — Vedi FERRARI A.
 CORBELLINI A. e BARBARO L. — «Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-diammina 1,1'dinaftile». 341.
 COTRONEI G. e GUARESCHI C. — «Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti)». 44, 368.
 ID. e SPIRITO A. — «Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli». 149.
 CRENNA M. — «Sulle congruenze di Ribaucour deformabili». 566.
 CROCCO G. A. — «Sui corpi aerotermodinamici portanti». 161.
 CROCCO L. — «Su di un valore massimo del coefficiente di trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente». 490.
 CURZI M. — «Una nuova specie di "Helminthosporium" in una malattia del banano segnalata nella Somalia Italiana». 146.
 ID. — «Alcuni casi di "cancrena pedale" da "Sclerotium" osservati in Italia». 233.

D

- DAL PIAZ G. — «Sull'andamento delle linee di dislocazione che accompagnano i massicci intrusivi di M. Croce, Ivigna, Bressanone nell'Alto Adige». 310.
 DE BENEDETTI A. — «Su un metodo di misura della birifrazione massima di minerali biassici, coll'ausilio del piatto di Fedorow». 134.
 DE CARLI F. — «Viscosità delle miscele di tetracloruro di stagno con idrocarburi aromatici». 120, 200.

- DE FINETTI B. — «Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali». 259.
 DEI C. — «Un dispositivo dinamico di confronto delle costanti di due triodi». 107.
 DE MIRA FERNANDES A. — «Sul problema brachistocrono di Zermelo». 577.
 DEVOTO G. — «Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi. - VI. Soluzioni acquose di solfammide». 432.

E

- ENRIQUES F. — Presenta la Nota del sig. L. Godeaux, aggiungendo una sua dichiarazione circa la priorità della ricerca in questione. 537.

F

- FAMIANI V. — «Sul quoziente beri-berico (Q_b) nell'alimentazione con riso brillato e grano autoclavato». 206.
 ID. — «Contributo alla conoscenza del valore nutritivo di alcuni cereali». 306.
 ID. — Vedi AMANTEA G.
 FANTAPPIÈ L. — «Sull'espressione generale dei funzionali analitici lineari». 248.
 FERRARI A. e COLLA C. — «Ricerche chimiche e cristallografiche sui nitriti complessi». 435.
 ID., ID. — «Ricerche chimiche e cristallografiche su i nitriti complessi. - II. Nitriti doppi di potassio e nichelio e di potassio e cobalto». 511.
 FINIKOFF S. — «La transformation T des congruences de droites». 421.

- FUBINI G. — «Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili». 453.

G

- GALAMINI A. — «Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti albin ovariectomizzati». 373.
 ID. — «La curva del digiuno e della rialimentazione nei ratti maschi castrati». 447.

GALAMINI A. e SERIANNI E. — « Modificazioni dei tassi glicemico e idremico in seguito a somministrazione di glicio e acqua ». 378.

GALLINA G. — « Sulle funzioni omogenee ». 561.

GARBASSO A. (Presidente). — Comunica che hanno ringraziato per la loro elezione i Soci Nazionali: *G. A. Blanc, A. Russo, G. Silva*. 395.

Id. — Dà il doloroso annunzio della morte dei Soci: *A. Dionisi, E. Repossi, F. Becke, J. Eriksson*. 395.

Id. — Presenta tre plichi suggellati inviati dai sigg. *Curatolo, Barricelli, Candiani*. 395.

GATTI D. — Vedi MASCARELLI L.

GHERMANESCO M. — « Sur les fonctions n -métaharmoniques de p variables ». 252.

Id. — « Sur les fonctions n -métaharmoniques ». 325, 415.

GHIRON M. — « Enzimi ed immunità ». 48.

GODEAUX L. — « Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux ». 479.

GUARESCHI C. — « Fusione di otocisti nei trapianti xenoplastici tra Anuri e Urodeli ». 227.

Id. — Vedi COTRONEI G.

H

HOSTINSKY B. — « Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires ». 326.

J

JOLLES ZVI. — « Contributo allo studio delle proprietà ossidanti dei diazoidrati normali ». 115.

K

KOURENSKI M. — « L'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue et deux variables indépendantes ». 408.

Id. — « L'intégration des équations, qui déterminent les fonctions conjuguées de Beltrami ». 482.

KRALL G. — « L'invariante adiabatico nel moto libero dei giroscopi ». 179.

Id. — « Influenze adiabatiche delle maree nel moto kepleriano di due corpi celesti giroscopici ». 270.

L

LABOCCETTA L. — « Generazione geometrica della funzione I_x (intiero di x) e delle altre funzioni numeriche Fr_x , Cm_x , R_x ad essa associate ». 3.

LAMPARIELLO G. — « Onde elastiche nei mezzi anisotropi ». 265.

Id. — « Onde di discontinuità nei mezzi elastici più generali ». 338.

Id. — « Sulle equazioni differenziali di Levi-Civita nel problema dei getti liquidi ». 496, 556.

LEVI G. — Commemorazione del Socio Straniero *Albert Brachet*. 382, 395.

LEVI-CIVITA T. — Presenta in omaggio il suo volumetto: « Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa ». 536.

LO SURDO A. (Accademico Segretario aggiunto). — Presenta i libri giunti in dono segnalandone alcuni. 395.

M

MANARINI M. — « Sopra un teorema di Staude-Wan der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso ». 496, 572.

MARCHIAFAVA E. — Commemorazione del Socio *Antonio Dionisi*. 528, 536.

MARCUCCI O. — « Ricerche complementari sui trapianti di abbozzi embrionali su organismi già differenziati (esperienze sugli Anfibi) ». 365.

MASCARELLI L., GATTI D. e PIRONA M. — « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. - Influenza di alcuni sostituenti in 2' su alcune reazioni dell' NH_2 in 2 ». 506.

MASOTTI A. — « Osservazioni sul moto piano di un sistema di punti nel quale è stationario il centro delle velocità ». 20.

- MASOTTI A. — «Sul centro delle pressioni idrostatiche». 99.
- MERCOGLIANO D. — «Sulle equazioni della superficie di Veronese». 12.
- MEZZADROLI G. — «Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sul seme bachi irradiato prima della incubazione». 441.
- ID. e VARETON E. — «Azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da circuito aperto oscillante di rame e di zinco, funzionanti in prossimità di radio-oscillatore per onde ultracorte». 52.
- ID., ID. — «Influenza di terre radioattive italiane sullo sviluppo dei bachi da seta». 225.
- ID., ID. — «Confronto fra l'azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da un semplice circuito oscillante aperto e da uno in sintonia con radio-oscillatore per onde ultracorte». 313.
- ID., ID. — «Contributo allo studio della fotosintesi dei glucidi in luce ultravioletta a partire da soluzioni acquose di anidride carbonica attivata». 347.
- ID., ID. — «Azione di terre radioattive italiane sulla germinazione dei semi e sulla crescita delle piante». 443.
- ID., vedi RONDONI P.
- MILLOSEVICH F. — Invia un reverente saluto alla memoria di *Enilio Repossi*. 395.
- MIRANDA C. — «Sulle proprietà asintotiche dei potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni illimitate di masse». 81.
- MOISIL Gr. C. — «Sur la généralisation des fonctions conjuguées». 401.

N

- NATTA G. e PASSERINI L. — «Solfosali aventi la struttura degli spinelli». 38.

O

- OBRECHKOFF N. — «Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes». 489.
- OCCHIALINI G. — «Uno spettrografo magnetico per raggi β emessi da sostanze debolmente radioattive». 103.

- ODDONE E. — «Un contributo della sismometria alla storia della Terra». 192.
- ORRÙ A. — «Osservazioni sul contenuto in acqua dell'albume e del tuorlo dell'uovo di gallina durante lo sviluppo dell'embrione». 523.

P

- PALOZZI G. — «Corrispondenze proiettivamente associate, in un punto, ad una superficie». 14.
- PARISI E. — «Sulla presenza di un nuovo zucchero nei mieli destrogiri». 125.
- PARRAVANO N. — Presenta i libri giunti in dono segnalandone alcuni. 537.
- ID. e CAGLIOTI V. — «Le leghe di zinco e manganese». 166.
- PASQUINI P. — «Sul differenziamento correlativo della lente cristallina e della cornea nello sviluppo di anfibi Anuri ed Urodeli». 56.
- PASSERINI L. e BACCAREDDA M. — «Ricerche sugli spinelli. — IV. I solfocromiti di manganese e di cadmio». 33.
- ID. — Vedi NATTA G.
- PELOSI L. — «Sulle corde massime e minime normali ad un'ipersuperficie» 322.
- PERRI T. — «Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta (processi distruttivi e potenza di ricupero)». 229.
- PICCARDI G. — «Spettri molecolari ed analisi spettroscopica». 578.
- PINCHERLE L. — «Sul magnetron di Hull». 290.
- PINCHERLE S. — «Sopra uno speciale operatore lineare». 237, 317.
- PINTE E. — «Sur les développées des courbes dans l'espace hilbertien». 244.
- PIRONA M. — Vedi MASCARELLI L.
- PLACINTEANU I. — «Les équations du mouvement de trois corps à masses variables». 496.
- POLARA V. — «Lo spettro Raman nelle soluzioni di zucchero». 293.
- PRATESI P. — Vedi SCAGLIARINI G.
- PREVIATTI BORTOLOZZI M. — «Sulla equazione delle asintotiche di una V_2 col σ_2 a tre dimensioni». 487.

Q

QUARLERI A. — « Sulla teoria della "scia" nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo ». 332.

RESTAINO S. — Vedi ZAMBONINI F.

R

RICCA V. — « Spettro Raman dell'ammoniaca in soluzione a concentrazioni diverse ». 197.

ID. — « Sullo spettro Raman dell'acido solforico e sull'azione di un campo elettrico su di esso ». 288.

RIGHINI G. — « Sul profilo della riga λ 5183 del Mg nello spettro del sole ». 285.

RONDONI P. e MEZZADROLI G. « Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sull'adenocarcinoma trapiantabile del topo ». 169.

ROSENBLATT A. — « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles ». 93.

ID. — « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. — II. Amortissement exponentiel à l'infini ». 184.

ID. — « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. — III. Convergence de l'algorithme. » 279.

ROSSI A. e SCOZ G. — « Sulla presenza di un composto organico fosforato acidosolubile nella ghiandola sottomascellare del cane ». 527, 582.

ROVERETO G. — « Falde a trucioli e falde a doppio viaggio ». 75.

S

SANZO L. — « Uova e primi stadi larvali di "Myctophum Gemellari" Cocco (= "Scopelus Gemellari" C. e V.). » 515.

SCAGLIARINI G. e PRATESI P. — « Determinazione volumetrica del vanadio e del molibdeno. (Considerazioni elettrochimiche sull'attività riduttrice del rame metallico) ». 298.

SCORZA-DRAGONI G. — « A proposito di un teorema di Rosenblatt ». 7.

SCOZ G. — « Ricerche sul metabolismo della cistina ». 527, 586.

ID. — Vedi ROSSI A.

SEGRÈ E. — « Righe di quadrupolo negli spettri dei raggi X ». 501.

SERIANNI E. — Vedi GALAMINI A.

SEVERI F. — Presenta il vol. I dell' « Enciclopedia delle matematiche elementari » redatta a cura del Socio *Berzolari* e dei proff. *Vivanti* e *Gigli* e ne parla. 536.

SOMIGLIANA (Presidente). — Dà lettura del telegramma col quale il sen. A. GARBASSO si scusa di non poter essere presente alla seduta. — 536.

ID. — Ringrazia il Socio E. MARCHIAFAVA per la bella ed elevata commemorazione del Socio *A. Dionisi*. 536.

SPIRITO A. — « Ricerche su trapianti di abbozzi oculari di Triton su parti isolate di embrioni di Rana esculenta ». 154.

ID. — « Ricerche su trapianti omoplastici di abbozzi oculari su parti isolate di di embrioni di Rana esculenta ». 361.

ID. — Vedi COTRONEI G.

T

TALLARICO G. — « Il volume delle cariosidi di grano in relazione col valore nutritivo ». 139.

TORTORICI P. — « Sui massimi e minimi delle funzioni convesse ». 472.

V

VARETON E. — Vedi MEZZADROLI G.

VIOLA G. — « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». 577.

W

WEINSTEIN A. — « Sur le mouvement d'un fluide à travers un barrage perméable ». 276.

Z

ZAGAMI V. — « Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di "Lathyrus sativus L." nei ratti albi ». 218.

ZAMBONINI F. e RESTAINO S. — « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. - XIV. Solfati di praseodimio e sodio ». 69.

ZANONI G. — « Su alcuni fenomeni di correlazione nelle piante ». 352.

INDICE PER MATERIE

A

- Astronomia.** — « Nuova interpretazione cosmogonica dell' equipartizione dell' energia tra le stelle ». ARMELLINI G. 65.
- « Ricerche sopra le variazioni dell' assorbimento atmosferico ed osservazioni varie ». ARMELLINI G. e ARMELLINI CONTI G. 455, 545.
- « Sul profilo della riga λ 5183 del Mg nello spettro del sole ». RIGHINI G. 285.

B

- Biologia.** — « Ricerche sui lipoidi dei tumori umani e particolarmente sul solfofosfolipide del tumore ». BOLAFFIA. 62.
- « Nuovi contributi alla biologia lagunare ». BRUNELLI G. 520.
- « Sopravvivenza dei tessuti embrionali di pollo mantenuti in liquido di Ringer a bassa temperatura ». BUCCIANTE L. 356.
- « Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli (trapianti di abbozzi embrionali in organismi differenziati o adulti) ». COTRONEI G. e GUARESCHI C. 44, 368.
- « Costruzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli ». COTRONEI G. e SPIRITO A. 149.
- « Una nuova specie di "Helminthosporium" in una malattia del banano segnalata nella Somalia Italiana ». CURZI M. 146.
- « Alcuni casi di "cancrena pedale" da "Sclerotium" osservati in Italia ». ID. 233.
- « Enzimi ed immunità ». GHIRON M. 48.
- « Fusione di otocisti nei trapianti xenoplastici tra Anuri e Urodeli ». GUARESCHI C. 227.
- Biologia.** — « Ricerche complementari sui trapianti di abbozzi embrionali su organismi già differenziati (esperienze sugli Anfibi) ». MARCUCCI O. 365.
- « Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sul seme bachi irradiato prima della incubazione ». MEZZADROLI G. 441.
- « Azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da circuito aperto oscillante di rame e di zinco, funzionanti in prossimità di radio-oscillatore per onde ultracorte ». ID. e VARETON E. 52.
- « Influenza di terre radioattive italiane sullo sviluppo dei bachi da seta ». ID., ID. 225.
- « Confronto fra l'azione esercitata sullo sviluppo dei bachi da seta da un semplice circuito oscillante aperto e da uno in sintonia con radio-oscillatore per onde ultracorte ». ID., ID. 313.
- « Contributo allo studio della fotosintesi dei glucidi in luce ultravioletta a partire da soluzioni acquose di anidride carbonica attivata ». ID., ID. 347.
- « Azione di terre radioattive italiane sulla germinazione dei semi e sulla crescita delle piante ». ID., ID. 443.
- « Sul differenziamento correlativo della lente cristallina e della cornea nello sviluppo di anfibì Anuri ed Urodeli ». PASQUINI P. 56.
- « Sul comportamento dell'abbozzo oculare di Triton trapiantato in embrioni di Rana esculenta (processi distruttivi e potenza di ricupero) ». PERRI T. 229.
- « Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sull'adenocarcinoma trapiantabile del topo ». RONDONI P. e MEZZADROLI G. 169.
- « Uova e primi stadi larvali di "Myctophum Gummellari" Cocco (= "Scope-

lus Gemellari" C. e V.), SANZO L. 515.

Biologia. — « Ricerche su trapianti di abbozzi oculari di Triton su parti isolate di embrioni di Rana esculenta ». SPIRITO A. 154.

— « Ricerche su trapianti omoplastici di abbozzi oculari su parti isolate di embrioni di Rana esculenta ». ID. 361.

— « Su alcuni fenomeni di correlazione nelle piante ». ZANONI G. 352.

Bollettino bibliografico. — 397, 538.

C

Chimica. — « Sulla possibilità di ottenere fenomeni beri-berici durevoli da privazione del fattore B nel colombo ». AMANTEA G. e FAMIANI V. 210.

— « Le misure del paracoro applicate allo studio della costituzione dei polisolfuri, poliseleniuri e delle catene miste di zolfo e selenio ». BARONI A. 28.

— « Soluzioni solide fra gli alogenuri alcalini ». ID. 215.

— « Sull'impiego dei raggi X in analisi quantitativa ». CAGLIOTI V. e AGOSTINI P. 301.

— « Ditiocarbammati manganici ». CAMBI L. e CAGNASSO A. 71.

— « Sulla decomposizione anomala del tetrazoderivato della 2,2'-di.ammia 1,1'-dinastile ». CORBELLINI A. e BARBARO L. 341.

— « Viscosità delle miscele di tetracloruro di stagno con idrocarburi aromatici ». DE CARLI F. 120, 200.

— « Ricerche sulla costante dielettrica dei liquidi. — VI. Soluzioni acquose di solfammine ». DEVOTO G. 432.

— « Sul quoziente beri-berico (Q_b) nell'alimentazione con riso brillato e grano autoclavato ». FAMIANI V. 206.

— « Contributo alla conoscenza del valore nutritivo di alcuni cereali ». ID. 306.

— « Ricerche chimiche e cristallografiche sui nitriti complessi ». FERRARI A. e COLLA C. 435.

— « Ricerche chimiche e cristallografiche su i nitriti complessi. — II. Nitriti doppi

di potassio e nichelio e di potassio e cobalto ». ID., ID. 511.

Chimica. — « Contributo allo studio delle proprietà ossidanti dei diazoidrati normali ». JOLLES ZVI. 115.

— « Contributo alla conoscenza del difenile e dei suoi derivati. — Influenza di alcuni sostituenti in 2' su alcune reazioni dell' NH_2 in 2 ». MASCARELLI L., GATTI D. e PIRONA M. 506.

— « Solfosali aventi la struttura degli spinelli ». NATTA G. e PASSERINI L. 38.

— « Sulla presenza di un nuovo zucchero nei mieli destrogiri ». PARISI E. 125.

— « Le leghe di zinco e manganese ». PARAVANO N. e CAGLIOTI V. 166.

— « Ricerche sugli spinelli. — IV. I solfocromiti di manganese e di cadmio ». PASSERINI L. e BACCAREDDA M. 33.

— « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica ». PICCARDI G. 578.

— « Sulla presenza di un composto organico fosforato acido-solubile nella ghiandola sottomascellare del cane ». ROSSI A. e SCOZ G. 527, 582.

— « Determinazione volumetrica del vanadio e del molibdeno. (Considerazioni elettrochimiche sulla attività riduttrice del rame metallico) ». SCAGLIARINI G. e PRATESI P. 298.

— « Sugli effetti dell'alimentazione esclusiva con semi di "Lathyrus Sativus L." nei ratti albin ». ZAGAMI V. 218.

— « I solfati doppi dei metalli delle terre rare e dei metalli alcalini. — XIV. Solfati di praseodimio e sodio ». ZAMBONINI F. e RESTAINO S. 69.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Straniero *Albert Brachet*. LEVI G. 382, 395.

— Commemorazione del Socio *Antonio Dionisi*. MARCHIAFAVA E. 528, 536

F

Fisica. — « Metodo per ridurre all'equatore ed all'equinozio le singole durate di colorazioni vespertine e mattutine di nubi ». BARRECA P. 427.

Fisica. — « Un dispositivo dinamico di confronto delle costanti di due triodi ». DEI C. 107.

— « Uno spettrografo magnetico per raggi β emessi da sostanze debolmente radioattive ». OCCHIALINI G. 103.

— « Sul magnetron di Hull ». PINCHERLE L. 290.

— « Lo spettro Raman nelle soluzioni di zucchero ». POLARA V. 293.

— « Spettro Raman dell'ammoniaca in soluzioni a concentrazioni diverse ». RICCA V. 197.

— « Sullo spettro Raman dell'acido solforico e sull'azione di un campo elettrico su di esso ». ID. 288.

— « Righe di quadrupolo negli spettri dei raggi X ». SEGRÈ E. 501.

— « Su alcune peculiarità della variazione annua dell'umidità relativa ». VIOLA G. 577.

Fisiologia. — « Decorso del digiuno e della rialimentazione in ratti albin ovariectomizzati ». GALAMINI A. 373.

— « La curva del digiuno e della rialimentazione nei ratti maschi castrati ». ID. 447.

— « Modificazioni dei tassi glicemico e idremico in seguito a somministrazione di glicosio e acqua ». ID. e SERIANNI E. 378.

— « Osservazioni sul contenuto in acqua dell'album e del tuorlo dell'uovo di gallina durante lo sviluppo dell'embrione ». ORRÙ A. 523.

— « Ricerche sul metabolismo della cistina ». SCOZ G. 527, 586.

— « Il volume delle cariossidi di grano in relazione col loro valore nutritivo ». TALLARICO G. 139.

G

Geofisica. — « Sulla depressione gravimetrica di Gattatico-Parma ». BELLUIGI A. 24.

— « Ancora sulle depressioni gravimetriche nella valle padana ». ID. 497.

— « Un contributo della sismometria alla storia della Terra ». ODDONE E. 192.

Geologia. — « Conflitti orogenici ». CACCIAMALI G. B. 131.

— « Convogliamento e ricorugamento dell'« Erciniano » nell'orogenesi alpina ». ID. 221.

— « Sull'andamento delle linee di dislocazione che accompagnano i massicci intrusivi di M. Croce, Ivigna, Bressanone nell'Alto Adige ». DAL PIAZ G. 310.

— « Falde a trucioli e falde a doppio viaggio ». ROVERETO G. 75.

M

Matematica. — « Parallelismo generalizzato in una V_3 ». BARBA G. 78, 174.

— « Trasporti metrici di punteggiate e trasporti rigidi di fasci ». ID. 468.

— « Sopra l'ultraconvergenza di certe serie di Dirichlet ». BERNSTEIN V. 475.

— « Sulla superficie d'onda di Fresnel ». BOGGIO T. 551.

— « Invarianti d'intersezione di due curve sghembe ». BOMPIANI E. 456.

— « Connessioni affini associate ad una $(n+1)$ -pla di congruenze in una varietà n -dimensionale ». BORTOLOTTI E. 462.

— « Maggiorazione delle soluzioni periodiche di una equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine ». CLEMENTE P. 88.

— « Sulle congruenze di Ribaucour deformabili ». CRENNNA M. 566.

— « Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali ». DE FINETTI B. 259.

— « Sull'espressione generale dei funzionali analitici lineari ». FANTAPPIÈ L. 248.

— « La transformation T des congruences de droites ». FINIKOFF S. 421.

— « Su un teorema del Séveri per le funzioni analitiche di due variabili ». FUBINI G. 453.

— « Sulle funzioni omogenee ». GALLINA G. 561.

— « Sur les fonctions n -métaharmoniques de p variables ». GHERMANESCO M. 252.

— « Sur les fonctions n -métaharmoniques ». ID. 325, 415.

Matematica. — « Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux ». GODEAUX L. 479.

- « Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires ». HOSTINSKY B. 326.
- « L'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une inconnue et deux variables indépendantes ». KOURENSKY M. 408.
- « L'intégration des équations, qui déterminent les fonctions conjuguées de Beltrami ». ID. 482.
- « Generazione geometrica della funzione I_x (intiero di x) e delle altre funzioni numeriche $Fr\ x$, $Cm\ x$, $R\ x$ ad essa associate ». LABOCCETTA L. 3.
- « Sulle equazioni differenziali di Levi-Civita nel problema dei getti liquidi ». LAMPARIELLO G. 496, 556.
- « Sulle equazioni della superficie di Veronese ». MERCOGLIANO D. 12.
- « Sulle proprietà asintotiche dei potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni illimitate di masse ». MIRANDA C. 81.
- « Sur la généralisation des fonctions conjuguées ». MOISIL Gr. C. 401.
- « Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes ». OBRECHKOFF N. 489.
- « Corrispondenze proiettivamente associate, in un punto, ad una superficie ». PALOZZI G. 14.
- « Sulle corde massime e minime normali ad un'ipersuperficie ». PELOSI L. 322.
- « Sopra uno speciale operatore lineare ». PINCHERLE S. 237, 317.
- « Sur les développées des courbes dans l'espace hilbertien ». PINTE E. 244.
- « Sulla equazione delle asintotiche di una V_2 col σ_2 a tre dimensioni ». PREVIATTI BORTOLOZZI M. 487.
- « A proposito di un teorema di Rosenblatt ». SCORZA-DRAGONI G. 7.
- « Sui massimi e minimi delle funzioni convesse ». TORTORICI P. 472.

Meccanica. — « Sui corpi aerotermodinamici portanti ». CROCCO G. A. 161.

Meccanica. — « Su di un valore massimo dei coefficiente di trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente ». CROCCO L. 490.

- « Sul problema brachistocrono di Zermelo ». DE MIRA FERNANDES A. 577.
- « L'invariante adiabatico nel moto libero dei giroscopi ». KRALL G. 179.
- « Influenze adiabatiche delle maree nel moto kepleriano di due corpi celesti giroscopici ». ID. 270.
- « Onde elastiche nei mezzi anisotropi ». LAMPARIELLO G. 265.
- « Onde di discontinuità nei mezzi elastici più generali ». ID. 338.
- « Sopra un teorema di Staude-Wan der Woude relativo al moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso ». MANARINI M. 496, 572.
- « Osservazioni sul moto piano di un sistema di punti nel quale è stazionario il centro delle velocità ». MASOTTI A. 20.
- « Sul centro delle pressioni idrostatiche ». ID. 99.
- « Les équations du mouvement de trois corps à masses variables ». PLACINTEANU I. 496.
- « Sulla teoria della "scia" nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo ». QUARLERI A. 332.
- « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux incompressibles ». ROSENBLATT A. 93.
- « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. — II. Amortissement exponentiel à l'infini ». ID. 184.
- « Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux. — III. Convergence de l'algorithme ». ID. 279.
- « Sur le mouvement d'un fluide à travers un barrage perméable ». WEINSTEIN A. 276.

Mineralogia. — « Su un metodo di misura della birifrazione massima di minerali biassici, coll'ausilio del piatto di Fedorow ». DE BENEDETTI A. 134.

P

Presentazione di Note e Memorie.

— 537.

Personale accademico. — 395, 536.

Presentazione di plichi suggellati.

Presentazione di libri. — 395, 536,

— 395.

537.
